مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج١)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤسّسون والشارحون

بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

الدكتور رشدي راشد

www.j4know.com

www.j4know.com

www.j4know.com

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤسّسون والشارحون

بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

www.j4know.com

تُرْجِمَتْ هــذِهِ الأعمــالُ ونُشِــرَتْ
بِدَعْمٍ ماليٍّ مِنْ مدينةِ الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية،
ضِمْنَ مبادرةِ الملك عبد الله لِلْمحتوى العَرَبِيّ

www.j4know.com

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج١)

الرياضيات التحليلية
بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول
المؤسّسون والشارحون

بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

الدكتور رشدي راشد

ترجمة:
نقولا فارس، بدوي المبسوط،
منى غانم، نزيه المرعبي، محمود حكيم
«أعضاء فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي»

www.j4know.com

الفهرسة أثناء النشر ـ إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛ ترجمة نقولا فارس... [وآخ.].

٥ ج (ج ١، ٨٦٢ ص). ـ (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج١)
محتويات: ج ١. المؤسّسون والشارحون: بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود.
ببليوغرافية: ص ٨١١ ـ ٨٣٤.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.
ISBN 978-9953-82-373-7 (vol. 1)
ISBN 978-9953-82-372-0 (set)

١. الرياضيات عند العرب ـ تاريخ. ٢. أ. فارس، نقولا (مترجم). ب. العنوان. ج. السلسلة.

510.1

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبناها مركز دراسات الوحدة العربية»

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales
du IX$^{\text{ème}}$ au XI$^{\text{ème}}$ siècle
vol. 1: Fondateurs et Commentateurs
Banū Mūsā, Ibn Qarra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn Samḥ, Ibn Hūd
par Roshdi Rashed
(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1996)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ ـ لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (+٩٦١١)
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (+٩٦١١)
e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

حقوق الطبع والنشر والتوزيع محفوظة للمركز

الطبعة الأولى
بيروت، ٢٠١١

www.j4know.com

المحتويـات

www.j4know.com

www.j4know.com

www.j4know.com

www.j4know.com

www.j4know.com

www.j4know.com

تقديـــم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدِّم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُترجَمُ وتُنشَرُ بالتعاون بين **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية** و**مركز دراسات الوحدة العربية**، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفّذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمة الكتب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في التوجّه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعَدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطة عربية، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلمية وتحقيقها، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليلية والهندسة ورياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

www.j4know.com

وتبينّ هذه المجلدات بشكل جليٍّ أن الحضارة العربية الإسلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قرون، وهذا يؤكّد ما أقرّه العالِم جورج سارتون في كتابه المرجعي **مدخل في تاريخ العلم**، كما أوضحت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لِعِلْمِ غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقرة كابن الهيثَم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشكر مركز دراسات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠/ ٤/ ١٤٣٢هـ
رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية
د. محمد بن إبراهيم السويل

www.j4know.com

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب

بدأ رشدي راشد منذ أكثر من خمس عشرة سنة نشرَ أجزاء متتابعة من دراسة موسوعيّة متكاملة في «الرياضيّات التحليلية»، ترمي إلى تجميع الوثائق المتعلّقة بهندسة اللامتناهيات في الصغر، المكتوبة بالعربية، وإلى تحقيقها وشرحها وكتابة تاريخها خلال فترة ازدهارها القصوى بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد.

ومع حلول سنة ٢٠٠٦ للميلاد، وصل عدد مجلّدات هذه المجموعة القيِّمة إلى خمسة، صدرت باللغة الفرنسية، وجاءت كمساهمة أساسيّة لا غنى عنها في دراسة التراث العلمي العربي وكتابة تاريخه عبرَ تحقيق مخطوطاته ونشرها، وفي التأريخ للعلوم الريّاضيّة العربيّة وتطبيقاتها.

ولقد بلغ البحث في ميدان هندسة اللامتناهيات في الصغر، خلال الفترة التاريخيّة المذكورة، ذروته مع ابن الهيثم، بعد أن تأسَّس في القرن التاسع الميلادي مع بني موسى.

ونحن نود أن نشكر الأستاذ رشدي راشد، الذي عهد إلينا ترجمة هذا الجزء من «الرياضيات التحليلية»، وأْتَمَنَنا على هذا، وكذلك على السماح لنا بنقل الرسوم الهندسية والعديد من العبارات الرياضية من القرص الإلكتروني للنسخة الفرنسية الأصل، وعلى إمدادنا بالنصوص العربية المستشهد بها من المخطوطات والمراجع الأخرى، وعلى مراجعته لأجزاء كثيرة من الترجمة.

لقد استخدمنا في هذه الترجمة، من جهة، المصطلحات الرياضية التي كانت متداولة في ذلك العصر، وحاولنا، من جهة أخرى، قدر الإمكان انتقاء أكثر المصطلحات الرياضية الأخرى انتشاراً وتعبيراً وبعداً عن اللبس. ولقد اعتمدنا غالباً في ترجمة المصطلحات الرياضية الحديثة إلى العربية على «معجم الرياضيات

www.j4know.com

المعاصرة» (تأليف صلاح أحمد وموفَّق دعبول وإلهام حمصي، مؤسسة الرسالة للطبع والنشر والتوزيع بيروت ١٩٨٣).

ونلفت نظر القارئ الكريم إلى ضرورة قراءة الصيغ الرياضية الواردة في الكتاب من اليسار إلى اليمين، إلا في بعض الحالات التي ترد فيها الصيغة ضمن الجملة.

ونحن ندرك جيداً، كما يُدرك كلُّ من مارس ترجمة النصوص الرياضية والعلمية إلى العربية، أنّ المسألة في هذا المضمار معقّدة، ونحن نشكر سلفاً أي نقد بنّاء في هذا الإطار.

نقولا فارس، بدوي المبسوط، منى غانم،
نزيه المرعبي، محمود حكيم
«أعضاء فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي»

www.j4know.com

تمهيـد

يتّفق مؤرّخو العلوم، بدون إشكال، على أنّ إحدى مهمّاتهم الأساسيّة هي رسم تشكّل التقاليد العلميّة. وقد تبدو هذه العمليّة سهلة، إذ غالباً ما تظهر التقاليد أمام المؤرّخين تحت أسماء وعناوين تتيح التعرّف الفوري على هذه التقاليد. ولكن ما أن ينكبّ هؤلاء على عملهم حتى يتبدّد ظاهر البساطة الخادع هذا. فالصفة الملازمة لكلّ تقليد علمي هي أنّه يتطوّر ويتنوّع ويتجدّد مع تعاقب المؤلّفين والمبدعين ومع بروز المسائل. ولا تلبث أن تبرز عقبات أخرى على هذا المسار، ويجد المؤرّخ نفسه في مواجهة المسائل التي من بينها المسألة الشهيرة الخاصة بـ «الأسلوب»؛ والمقصود هنا هو أيضاً الأسلوب العلمي الذي يميّز التقليد ويطبع هويّته، بغض النظر عن الأشكال التي يتقدّم بها هذا التقليد وعن التحوّلات التي يتعرّض لها. تكمن كل الصعوبة في عزل العلامة الفارقة التي، بالرغم من الإحساس المتواصل بوجودها، لا يسهل الإمساك بها. ولكن معرفة هذه العلامة الفارقة هي وحدها التي تتيح الرؤيةَ الصحيحة لأعمال شخصٍ ما، والتي تُمَكّنُ من فهم معناها. يُعطي هذا المسار الظاهراتيّ للتقليد دوره التنظيمي؛ فهو يستخلص ترابط الأعمال الناسجة لهذا التقليد، ويحمي المؤرّخ من اتّباع ميوله الخاصّة، كأن يتوه في البحث عن الروّاد أو أن يؤخذ بِوَهم اكتشاف ما هو جديد.

ويبدو لنا أنّ هذه المهمّة، الضروريّة بالنسبة إلى تاريخ العلوم بشكل عام، تُلبّي حاجات عاجِلة فيما يتعلّق بتاريخ الرياضيّات وتاريخ العلوم في عصر الإسلام الكلاسّيكي. تعود أسباب حالة الاستعجال هذه، إلى هشاشة البحث التاريخي في هذا الميدان وإلى نقاط الضعف في تاريخه: فالبحث في تاريخ العلوم والرياضيّات في عصر الإسلام الكلاسّيكي، معزول بسبب اللغة وهو محصور في الغالب ضمن نطاق الدراسات الشرقيّة، ويخضع لمعايير نوعيّة ما تزال

www.j4know.com

غامضة ومُشوّشة. يجب أن نضيف، إلى هذا، عائقاً آخر يعود إلى الحوادث، التي قد يتعرّض لها الموضوع، ويمنع إرجاء هذا البحث في التقاليد؛ فكيف يتم التعرّف على هذه التقاليد المتوارية خلف تنوّع الوقائع، مع غياب صانعيها الرئيسيّين أحياناً؟ لنتذكّر مثال التقليد الجبري، عندما كنّا لا نعرف عن السموأل أو عن شرف الدين الطوسي أكثر من مجرّد اسميهما؛ ولنتذكّر تاريخ نظريّة الأعداد مع غياب أعمال الخازن والفارسي... إلخ، أو تاريخ علم المناظر دون أعمال ابن سهل، أو علم الفلك دون فكرة واضحة عن مدرسة مراغة. ولا شكّ أنّ من الممكن دائماً، حتى في ظروف كهذه، أن نكشف تقليداً ما؛ ولكنّ الأمر يختلف عندما يكون المطلوبُ رسمَ حدود التقليد وعزل عناصره الموحِّدة وتقدير الأسباب في تحوّلاته المتوالية. فهذا الأمر يتطلّب تأمّلاً مَعرفيّاً دقيقاً ويقِظاً بشكل دائم ولو أنّ هذا التأمّل يبقى، كما ينبغي أن يكون، خفيّاً. مثل هذا التحليل فقط يتيح لنا فهم طريقة انتقال البنى المعرفيّة وتطوّرها، من زمن إلى آخر.

أتاح لنا هذا النهج، الذي وجّه أعمالنا في تاريخ الجبر وفي نظريّة الأعداد والتحليل الديوفنطي وفي علم المناظر، والذي ما زال نهجَنا في مؤلّفِنا هذا، فَتْحَ بعض المسالك في هذا المجال أو ذاك، إن لم نقل أنّه مكّننا من قَطْع أشواط على الدروب التي يجب أن نسلكها. لم نتخلَّ أبداً في هذه الأبحاث، في تاريخ الرياضيّات والعلوم في عصر الإسلام الكلاسّيكي، عن المصادرة التالية: «لا يسعنا فهم أيّ شيء عن الابتكارات الفرديّة إذا لم ندرجها ضمن التقاليد التي شهدت ولادتها»؛ ونحن كنّا، وما زلنا ندعو، إلى ضرورة القطع مع نهج الاختصار التاريخي الذي ما زال متّبَعاً في هذا المضمار. فلم يعد يكفي الاتّكال على الأبحاث العشوائيّة وعلى قطف زهرة من كلِّ بستان.

نهدف في هذا الكتاب، إلى رسم التقليد البحثي في «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر»؛ ونحن نطمح، هذه المرّة، إلى استكشاف كلّ الطرق فيه، أو إلى استكشاف الطريق المركزيّة فيه على الأقلّ. يرتكز أملنا هذا، بدون شك، على طبيعة حقل هذه الدراسة، كما يرتكز أيضاً على جهود من سبقونا في هذه الدراسة. تتعلّق دراستنا بعدد محدود من المؤلّفات التي وصل القسم

www.j4know.com

الأكبر منها إلينا، والتي يعود تأليفها إلى الفترة الواقعة بين النصف الثاني من القرن التاسع ـ وبشكلٍ خاص مع بني موسى ـ والنصف الأوّل من القرن الحادي عشر، حيث توقّفت بوضوح مع ابن الهيثم. لقد جذبت هذه المادّة، من جهة أخرى، مؤرّخي الرياضيّات الذين تركوا لنا بعض الأعمال، التمهيديّة والمؤقّتة، إنّما الثمينة أيضاً بدون أدنى شك: نذكر في هذا المجال، بشكل خاصّ، الترجمات إلى الألمانيّة التي قام بها هـ. سوتر (*H. Suter*).

ما هو المعنى الذي تغطّيه عبارة «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر» هذه التي نستخدمها؟ لا يتعلّق سؤالنا هذا بالبلاغة الكلاميّة فحسب. فهذه الصيغة التي تبنّيناها ليست مأخوذة من أيّ لفظٍ من ألفاظ الرياضيّات العربيّة في العصر الكلاسّيكي. ويمكن لهذه العبارة، بسبب غياب المراجع، أن تؤدّي إلى تضليل في المعنى: فبين «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر» وَ«حساب اللامتناهيات في الصغر» لا يوجد سوى خطوة سرعان ما تُقطع، رغم الهوّة الفاصلة. وإذا أردنا توضيح هذه المسألة بدقّة، علينا تحليلها مع تمييز عنصرين فيها. العنصر الأوّل عامّ، وهو غياب اسم هذه المادّة العلميّة: فهل نستطيع أن نُدخل مادّة، في تاريخ علمٍ ما، قبل أن يُعتمَدَ اسمٌ لهذه المادّة؟ تلك هي المسألة التاريخيّة والمعرفيّة المطروحة التي تتعلّق بوضع العلم الناتج وباستقلاليّته. ومن جهة أخرى، إذا ما ابتكرنا اسماً، فإنّنا في هذه الحالة على الأقل، نُعَبِّر عن الحاجة الجديدة لتمييز هذه المادّة العلميّة من كلّ ما عداها. ولكن، لا خلاف أنّ غياب الاسم لا يعني عدم وجود الشيء: فمن الذي يستطيع اليوم أن ينكر، مثلاً، وجود بحث منظّم في التحليل التوافيقي قبل ابتكار عنوان هذا العلم، أو وجود إسهاماتٍ في الهندسة الجبريّة الأوّليّة قبل صياغة هذه التسمية، أو وجود دراساتٍ في التحليل الديوفنطي قبل أن يُعطى اسم عالِم الرياضيّات الإسكندراني المذكور لهذا النشاط الرياضي؟ تعود مسألتنا بالتحديد، في هذه الحالة، إلى معرفة طبيعة «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر» هذه، وإلى معرفة تنظيمها وتماسكها ووحدتها، والروابط التي تجمع بين مختلف الفصول التي تتشكّل منها، وباختصار، إلى معرفة مدى المسافة التي تفصلها عن «حساب اللامتناهيات في الصغر». عند ذلك نستطيع، على ما نعتقد، فهمَ مصادر

www.j4know.com

«حساب اللامتناهيات في الصغر» بشكل أفضل، وإدراكَ «بداياته» الحقيقيّة.

إنّ أوّل ما يطمح إليه هذا الكتاب هو استرجاع هذا التقليد في «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر»، قبل القيام بتفحُّص هذا التفاوت بين تاريخ حساب اللامتناهيات في الصغر وبين ما قبل تاريخه. نبدأ إذاً بتحقيق، وشرح كلِّ الكتابات التي وصلت إلينا حول قياس مساحات السطوح والمجسّمات المنحنية (الهلاليّات، والدوائر، والقطوع المكافئة، والقطوع الناقصة، والأكَر، والأسطوانات، والمجسّمات المكافئة) وحول تحديد القِيَم القصوى لمساحات السطوح والمجسَّمات ذات الإحاطات المتساوية. لقد قرَّرنا أن نقصر دراستنا على هذه الكتابات لأنّها تترابط منطقيّاً في وَحْدة تدريجيّة؛ ولقد حصل هذا الترابط بفضل التصويبات والابتكارات المتتالية وليس بالرغم عنها. فكلّ واحد من الرياضيّين الذين قاموا بإسهام في هذا الميدان، دون استثناء، استعاد كتابات أسلافه ليحسّن البراهين الواردة فيها وليتصوَّر امتدادات جديدة لها. أليست هذه الصفة ملازمة لأيّ تقليدٍ حي؟ لم نستبعد كتابات أخرى عن هذه المجموعة الرياضيّة، لسبب ظرفيّ، بل إنَّ سبب ذلك هو أنَّ هذه الكتابات الأخرى، بالرغم من صلات القربى التي تربط بينها وبين هذه المؤلّفات في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، لم تكن بعدُ منتمية عضويّاً إلى هذا التقليد. نقصد بالكتابات الأخرى، الأعمالَ في علم الفلك وميكانيكا السكون والتحليل العددي، حيث تدخل اعتبارات في اللامتناهيات في الصغر. فإذا حصل أن استعدنا هنا إحدى تلك الكتابات، فلتنوير القارئ أو لإرساء أسس الكتابة التاريخيّة. وإذا وردت تلك الكتابات في التعليقات الإضافيّة أو الملاحق، فليس لأنّها مجرّد إضافات إلى تاريخ رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، بل لأنّها متمِّمة لها، وذلك حتّى لو أنّها تستحق أن يُفرَدَ لها مجلّدٌ شبيه بمجلّدات كتابنا هذا.

المجلّد الأوّل من مؤلّفنا هذا نكُرِّسُه للبحث في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، منذ بداية تكوُّنه وحتى عشيّة إنجاز هذه التكوُّن: أي للمؤسّسين. يحتوي إذن هذا المجلّد تحقيقاً وشَرحاً للنصوص المكتوبة بين النصف الثاني من القرن التاسع ونهاية القرن العاشر؛ وهي نصوص تعود إلى بني موسى ولثابت

www.j4know.com

بن قرّة وللخازن ولإبراهيم بن سنان وللقوهي ولابن السمح. ولا بدّ أن نعبّر عن الأسف للفقدان، المؤقّت أو النهائيّ، لأعمال الماهاني وابن سهل ولآخرين غيرهما. وقد رأينا من المناسب أن نضمَّ إلى هذا المجلّد فصلاً عن ابن هود وهو خَلَفٌ لابن الهيثم وشارح له ولابن سنان.

لقد قدَّمنا في المجلّد الثاني تحقيقاً وشَرحاً لأعمال المؤلّف الذي أتمَّ هذا التقليد ووضع نهاية له، وهو ابن الهيثم.

بعد ابن الهيثم، توقّف البحث المجدِّد في هذا المضمار. وهكذا نرى أنَّ تاريخ التحليل الرياضي يعيد نفسه، بعد أرشميدس بأحد عشر قرناً، وفي سياقين رياضيَّين وثقافيَّين مختلفَين. فقد أصيبت محاولتان، للبحث في هذا الميدان، بتوقّف فجائي بعد أن عرفتا نجاحاً واسعاً. يُشكّل هذان التوقّفان الفجائيّان ظاهرةً جديرة باهتمام مؤرّخي التحليل الرياضي؛ كما أنَّ هذه الظاهرة ذاتُ قيمة كبرى بالنسبة إلى الباحث في عِلم المعرفة. وستكون هذه الظاهرة موضوعَ دراستنا في المجلّد الثاني، إذ نكون قد أنهينا المقدّمات الضروريّة وعمليّات العودة إلى الوراء اللازمة لإعادة رسم التقليد الأرشميدي.

ولقد تبيّن لنا، خلال كتابتنا للمجلّد الأخير المذكور، أنّه من الضروري، إذا أردنا فهمَ أبحاث ابن الهيثم في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر ومعرفة التجديدات التي أدخلها في التقليد الأرشميدي، أن نقوم بتحقيق إسهامه في تقليد أبلونيوس ونحلّله. وهكذا تأخذ أبحاثُ ابن الهيثم في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر مكانَها ضمن مجموع كتاباته. فكان لا بدّ لنا من إعداد مجلّدٍ ثالثٍ نُكَرِّس معظمَه، لأبحاث ابن الهيثم في المخروطات وفي تطبيقاتها. سويّة، فإذا أضفنا هذين المجلّدين إلى كتابات ابن الهيثم التي سبق أن نشرناها («المعلومات» و«التحليل والتركيب»)، نحصل لأوّل مرّة على جملة الأعمال الرياضية لابن الهيثم (باستثناء شروحه لأقليدس).

كانت بعضُ النصوص التي حقّقناها وشرحناها في هذه المجلّدات، تُعتَبَر مفقودةً قبل أن نعثر عليها وننشرَها؛ وكان بعضها الآخر ضحيّة التباس وسوء فهمٍ، عملنا على تبديدهما. إنَّ القسم الأعظم من هذه النصوص لم يكن قد

www.j4know.com

حُقّق من قبْل؛ أمّا النصوص القليلة التي سبق أن حُقّقت، فإن تحقيقها لم يحصل بطريقة نقديّة، باستثناء نصّ واحد منها فقط.

ولقد شرحنا عدّة مرّات، في أعمال سابقة، الطريقة التي نَتّبِعها في تحقيق النصوص. أمّا قائمة المراجع المذكورة في هذا المجلّد، فهي ليست كاملة، لأنّنا تعمَّدنا انتقاءها من بين المراجع الموجودة لدينا. لذلك نأمل أن يُفهَمَ غياب بعض المراجع عن هذه اللائحة على أنّه مقصود وليس نتيجة لجهلنا بها. ونتمنّى أخيراً أن يجد العلماء والباحثون بعض النفع في هذا العمل، وأن يصفحوا عمّا ورد فيه من أخطاء. يكفينا أنّنا قد بذلنا فيه قدر مستطاعنا. . .

ولا بدّ لي هنا من شكر الأستاذ كريستيان هوزيل (*Christian Houzel*) لقبوله قراءة هذا الكتاب وفقاً للقواعد المتّبعة في هذه المجموعة من المجلّدات، وهي المهمّة التي أدّاها بكلّ معرفته وسعة اطّلاعه. والشكر الحار للأستاذ فيليب أبغرال (*Philippe Abgrall*) وللسيّدة زوجته، وللأساتذة مارون عوّاد، وهيلين بلّوستا (*Hélène Bellosta*)، وباسكال كروزيه (*Pascal Crozet*) وريجيس مورلون (*Régis Morelon*) لإعادة قراءتهم لهذا الجزء أو ذاك من مخطوطة هذا الكتاب. وأتوجّه بشكري أيضاً للسيّدة ألين أوجيه (*Aline Auger*)، مهندسة الدراسات في المركز الوطني الفرنسي للبحث العلمي، لتعاونها المُخلِص والفعّال، طوال فترة التحضير الصعب للنسخة الفرنسية لهذه المجلّدات، بما فيه إنجاز الفهارس.

رشدي راشد
مدير أبحاث في المركز الوطني للبحث العلمي ـ باريس.
أستاذ في جامعة طوكيو، قسم تاريخ العلوم
وفلسفتها ـ طوكيو.

www.j4know.com

تنبيـــه

لكي لا نعيد رسم الشكل الهندسي نفسه مرّتين، غالباً ما نُحيل، في المقدّمات وفي التعليقات الإضافيّة، إلى الأشكال الهندسيّة الموجودة في النصوص المحقّقة.

ولقد أضفنا بعض الأشكال الهندسيّة في النصوص، لتسهيل الفهم. ونحن نلفت النظر إليها في كلّ مرّة.

نرمز إلى المخطوطات بأحرف. وقد شرحنا هذا الترميز في قائمة المراجع.

< > هذان القوسان يعزلان، في النص العربي، ما قد أضفناه لسدّ ثغرة في المخطوطة.

[] يُستخدَم هذان القوسان في النصّ العربي فحسب، وذلك للدلالة على ضرورة حذف الكلمة أو المقطع المعزولَين، من أجل تماسك النصّ.

/ تدلّ هذه الإشارة على نهاية ورقة المخطوطة.

www.j4know.com

www.j4know.com

الفصل الأوّل

بنو موسى وحساب حجم الكرة وحجم الأسطوانة

١ـ ١ مقدّمة

١ـ١ـ ١ بنو موسى: أعيان وعلماء

يُعرَّف الإخوة الثلاثة محمّد وأحمد والحسن، أبناء موسى بن شاكر، معاً في أغلب الأحيان، باسم والدهم. وتحمل المقالات التي كرّسها لهم المفهرسون القدامى العنوان: "بنو موسى"[١]. وما فتئ المفهرسون المحدثون يتّبعون أقرانهم القدامى، بل يقومون بمجرّد النسخ عنهم[٢]. وقد امتد هذا التقليد، بشكل أو بآخر، إلى اللاتينيّة؛ وذلك أنَّ جيرارد دو كريمون (*Gérard de Crémone*)، على سبيل المثال، يذكرهم على الشكل الآتي: "*Filii Sekir, i. e. Maumeti, Hameti, Hasen*"[٣]. ولا بد من الاعتراف بأنّ هذه الطريقة، في ذِكر حياة بني موسى، لم تمنع كتّاب سِيَرهم من الفصل فيما بينهم، ومن ذكر أحدَهم، هنا أو هناك، دون ذِكر الآخَرَيْن. فضلاً عن ذلك، لم يتوانَ كتّاب السِّيَر هؤلاء عن الإشارة إلى بعض الفروق الفرديّة، ذات الأهميّة الكبرى بالنسبة إلينا. نذكر من هذه الفروق اهتمام محمّد بعلم الفلك والرياضيّات، وإبداع أحمد في ميدان الميكانيكا، وأخيراً، عبقريّة الحسن في علم الهندسة[٤]. ولقد نسب كُتّاب السِيَر أحياناً إلى أحد الإخوة، بمفرده، كتاباتٍ تحمل أسماء بني موسى الثلاثة[٥].

---

[١] انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدّد (طهران، ١٩٧١)، الصفحتان ٣٣٠ـ٣٣١؛ القفطي، "تأريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبّرت (*Julius Lippert*) (لايبزغ (*Leipzig*)، ١٩٠٣)، الصفحات ٣١٥ـ٣١٦ و ٤٤١ـ٤٤٣؛ ابن أبي أصيبعة "عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، تحقيق أ. مولّر (*A. Müller*)، ٣ مجلّدات (القاهرة/كونيغسبرغ (*Königsberg*)، ١٨٨٢ـ٨٤)، المجلّد الأوّل، الصفحات: ١٨٧، ٩ـ١٢ و٢٠٧، ٢٢ و٢٠٨، ١٧؛ تحقيق ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥)، الصفحات: ٢٦٠، ١١ـ١٣ و٢٨٦، ١٩ و٢٨٧، ١٥. إلاّ أنّ ابن أبي أصيبعة يتكلم على "بني شاكر".

[٢] انظر: ك. بروكلمان: (*C. Brockelmann*)، *Geschichte der arabischen Litteratur*، الطبعة الثانية، I (لايدن (Leiden)، ١٩٤٣)، الصفحة ٢١٦؛ هـ. سوتر (H. Suter)، *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (لايبزيغ Leipzig، ١٩٠٠)، الصفحتان ٢٠ـ٢١؛ ف. سيزكين (F. Sezgin)، *Geschichte des arabischen Schrifttums*، V (لايدن Leiden، ١٩٤٢)، الصفحات ٢٤٦ـ٢٥٢؛ م. ستاينشنايدر (M. Steinschneider)، "Die Söhne des Musa ben Schakir"، *Bibliotheca Mathematica*، 1 (١٨٨٧)، الصفحات ٤٤ـ٤٨، ٧١ـ٧٦؛ ج. الدبّاغ، "بنو موسى (Banū Mūsā)"، *Dictionary of Scientific Biography*، المجلّد الأوّل (نيويورك، ١٩٧٠)، الصفحات ٤٤٣ـ٤٤٦؛ المقدّمة العربيّة لأحمد يوسف الحسن لتحقيق "كتاب الحيل" لبني موسى (حلب، ١٩٨١)، الصفحات ١٨ـ٣٠.

[٣] انظر: م. كلاجيت (M. Clagett)، *Archimedes in the Middle Ages*، المجلّد الأوّل (ماديسون (*Madison*)، ١٩٦٤)، الصفحة ٢٣٨.

[٤] في حالة الحسن، على سبيل المثال، يشهد أخواه على قدرته في الهندسة – انظر بداية الفقرة التالية (١ـ١ـ٢). ويورد المفهرسون رواية صحّتها غير مؤكّدة، لكنّ من حسwww.j4know.comعن عبقريّة الحسن في الهندسة. فهو،=

يُجمِع المفهرسون والمؤرّخون في تأكيدهم أهميّة الأعمال العلميّة لبني موسى وعلى أهمّيّة إسهامهم العلمي في ذلك العصر[٦]؛ ويبدو أنّهم يتّفقون على تفوّق الأخ الأكبر محمّد في المجال السياسي، حيث كان دورُ الأخوين الآخرَيْن ضعيفاً جدّاً.

لم نُذكّر بهذه الجوانب لأجل قيمتها الرِوائيّة، بل لأنّها تُظهِر أنّ الأخوة الثلاثة كانوا يعملون بشكل واضح كفريق. ولم تستبعد الأعمالُ الجماعيّة في هذا الفريق الكتاباتِ الفرديّة. وإذا نظرنا إلى هذا الأمر عن قرب، نلاحظ أنّ الأخوة الثلاثة لم يشكّلوا فقط ما قد يسمّيه البعض بلغة عصرنا "فريقاً في البحث"، بل إنَّ هذا الفريق شكّل بالفعل نواة متماسكة لمدرسة في البحث العلميّ. بالإضافة إلى ذلك، لم يكن هذا "الفريق" يحصر عمله في البحث العلمي، بل كان يتدخّل أيضاً في السياسة العلميّة وفي السياسة بمعناها العام. وكان هذا الفريق أيضاً في تنافس مع فرقٍ أخرى كفريق الكِندي، الذي كان أقلّ تماسكاً، كما يبدو. كلُّ هذه الوقائع، التي فرضت نفسها علينا عند دراستنا للشهادات المتعلّقة ببني موسى والكندي وبعصرهم بشكلٍ عام، تُجيز لنا طرحَ هذا السؤال الجديد: ماذا يمثّل بدقّة هذا النوع من التكوُّن، لهذا النوع من "الفِرَق" في القرن التاسع؟

لن نكتفي، للإجابة عن هذا السؤال، بمجرّد ردّ الأمر إلى التفاهم العفوي، أي التواطؤ، بين الأخوة. وذلك أنّ سيرة حياة جان وجاك برنولّي (*Jean et Jacques Bernoulli*)، اللذين عاشا لاحقاً، قدّمت لنا مثالاً مضادّاً ساطعاً، ينقض ذلك. ولا يُمكن، من جهة أخرى، فهمُ هذا الفريق بدون أن نأخذ بعين الاعتبار المدرسة التي كان ينشّطها ويمثّل نواتها. فقد عرف الإخوة الثلاثة كيف يرتبطون مع أفضل

= وفقاً لتلك الرواية، لم يقرأ سوى المقالات الستّ الأولى من "أصول" أقليدس لأنّه توصّل وحدَه إلى النتائج الواردة في المقالات السبع الباقية. وقد لامه الخليفة المأمون شخصيّاً على عدم إنجازه لقراءة كتاب أساسي إلى هذا الحدّ، حتى وإن لم يكن بحاجة إلى ذلك (القفطي، "تأريخ الحكماء"، ص. ٤٤٣).

حول أهميّة إسهام محمّد في علم الفلك، انظر ج. صليبا:

G. Saliba, "Early Arabic critique of Ptolemaic cosmology "*Journal for the History of Astronomy*, 25 (1994): 115-141.

[٥] على سبيل المثال، ينسب النديم إلى أحمد لوحده تأليف "كتاب الحيل"؛ وينسب إلى الحسن كتاب في "الشكل المدَوَّر المستطيل"، وهذه النسبة أكّدها ثابت بن قرّة في بداية مؤلّفه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"؛ وينسب عدّة مؤلّفات إلى محمّد وحدَه.

[٦] على سبيل المثال، النديم، "الفهرست"، الصفحتان ٣٠٤ و٣٣١؛ ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولّر (Müller)، المجلّد الأوّل، الصفحات ١٨٧، ٩-١٢؛ ٢٠٥، ٢٩-٣١؛ ٢١٥، ٢٩-٣١؛ تحقيق رضا، الصفحات ٢٦٠، ١١-١٣؛ ٢٨٣، ٩-١١؛ ٢٩٥، ٩-١١.

www.j4know.com

المترجمين كحُنَيْن بن إسحاق وهلال بن هلال الحمصي، على سبيل المثال[٧]؛ كما استطاعوا استمالة معاونين لهم من مرتبة ثابت بن قرّة[٨]. وكانت هذه المدرسة تعمل على ترجمة الإرث اليوناني، بقدر ما كانت تعمل في البحث المجدِّد؛ ولقد ترافق هذان النشاطان، بحيث لا يمكن فهم أحدهما بدون الآخر، كما أكّدنا ذلك أكثر من مرّة[٩]. وأخيراً، اهتمّ بنو موسى، أيضاً، بإنشاء المؤسّسات العلميّة؛ فقد كانوا على علاقة مع "بيت الحكمة" الشهير في بغداد، وشاركوا في حسابات الأرصاد الفلكيّة، وكذلك في أعمال الهندسة المائيّة. كان هذا الانخراط لبني موسى في الحياة العلميّة والثقافيّة متزامناً مع مشاركتهم في الحياة السياسيّة (على الأقل بالنسبة إلى محمّد) والإداريّة (بالنسبة إلى هذا الأخير وإلى أحمد). نحن إذن أمام الكثير من الوقائع التي حصلت في النصف الأوّل من القرن التاسع للميلاد، ضمن دوائر السلطة والمعرفة في بغداد التي كانت مركزاً لإمبراطوريّة شاسعة تتربّع على قمّة المجد في ذلك العصر. ولا شكّ بأنّ الكلام حول ما كان يُدَبَّر في هذه الدوائر من مشاريع ورهانات يتطلّب تأليف كتابٍ كامل؛ وإنّ بحثاً كهذا، يستحق الخوض فيه، لا سيّما وأنّ حالة بني موسى ليست قطعاً حالة منفردة.

تسمح هذه الصورة التي نرسمها هنا بخطوط عريضة للغاية، بفهم الظروف المحيطة بعمل بني موسى؛ فهي توضح روايات المفهرسين القدامى، وتوحي بالمحاولة الأولى للقيام بدراسةٍ نقديّة للشهادات المنقولة بشأنهم. فبذلك ندرك لماذا تتواجد ، في كتاب واحد (هو تحديداً الكتاب الذي نتناوله هنا)، مسائلُ هندسيّة مع تركيبات آليّة جديدة؛ ونرى أيضاً كيف كان من الممكن أن يتابع أحد الإخوة – أحمد

[٧] كتب النديم في "الفهرست"، ص. ٣٢٦، بصدد هلال بن هلال الحمصي: "وترجم الأربع المقالات الأولة بين يدي أحمد بن موسى". هذه الواقعة تؤيّدها مخطوطات الترجمة. ذلك أنّ عبارة النديم مأخوذة عمليّاً من مقدّمة ترجمة "المخروطات" لأبلونيوس، حيث نقرأ أنَّ هلال بن هلال الحمصي قد كُلّف بترجمة المقالات الأربع الأولى بحضور أحمد بن موسى، انظر "المخروطات"، مخطوطة طهران، ملّي ملك ٨٦٧، الورقة ٣و. انظر:

R. Rashed, *Apollonius*: *Les Coniques,* tome 1.1: *Livre I*, Berlin, New York, 2008, p. 507, 12-14.

[٨] انظر الفصل اللاحق.

[٩] انظر مقال ر. راشد،

R. Rashed, "Problems of the transmission of Greek scientific thought into Arabic: examples from mathematics and optics", *History of Science*, 27, (1989), pp. 199-209

الذي أعيد نشره في

Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe، Variorum CS388 (Aldershot, 1992), I.

www.j4know.com

ـ بحثاً بدأ بـه أخ آخر ـ الحسن؛ ونفهم أخيراً روايـة سيرتهم، غير المؤكّدة برأينـا، والتي يتم تناقُلها حاليّاً، بدون دراسة حقيقيّة.

لقد كان الوسطُ الطليعيُّ والسياسيُّ الصاخبُ الذي كـان يتحرُّك فيـه هؤلاء العلمـاء، حقلاً من أخصب الحقول لنسج الروايات والأساطير. فبعد أن وقع بنـو موسـى ضـحايا للمفهرسين ذوي المخيّلة الجامحـة، أضـحوا أبطـال روايـة خياليّـة. وقـد سـبق أن بيّنـّا أكثـر مـن مـرّة أنّ جمـوح الخيـال كـان نزعـة عنـد المفهـرس القديم، القفطـي[١٠]، وهـو مصدرنا الأساسي عن بني موسى. فقد كان القِفطيّ يحبّ تزيين رواياته لجذب قارئـه، إن لم يكن لتسليته. ويروي القفطـي أنّ والـد بنـي موسـى[١١]، أي موسـى بـن شـاكر، لـم يكـن "مـن أهلِ العلم والأدب، بل كـان فـي حداثتـه حراميّـاً،...، ثـمَّ يخـرج فيقطـع الطريق علـى فراسخ كثيرة من طريق خراسـان". وسنرى أنّ اختيار هذه المنطقة ليس عَرَضـيّاً بتاتـاً فـي بقيّة الرواية. ولم يبخل القفطي، من ناحية أخرى، في إعطاء تفاصيل عن مَكر موسـى بن شاكر، وعـن الوسـائل التـي كـان يستخدمها لخداع النـاس. فيصـف لنـا، مـن ضـمن أشياء أخرى، زَيَّ موسى وحصـانه ...، وكل ذلك بعد ثلاثة قرون ونصـف القـرن مـن حصـول الحـدث[١٢]. تثير هذه التفاصيل الشكوكَ حـول روايـة القفطـي، أو علـى الأقـل، حـول مصـادره.

ويأتي اختيار خراسان مناسباً لتأمين تتمّة الروايـة، وذلك عند الحـديث عـن علاقـة قاطع الطرق مع الشخص الذي سيصبح لاحقاً الخليفة المأمون. وكـان الخليفـة هـارون الرشيد قد جعل المأمون والياً على هذه المنطقة حيث عاش فيهـا، قبـل أن يطيح بأخيـه الأمين ويصبح الخليفة العبّاسي السابع. وتتوالى رواية القفطي وتنتهي كقصّـة حقيقيّـة: يتـوب قـاطع الطـرق، ويصبح رفيقـاً للخليفة اللاحق، ثـمّ يمـوت فـي اللحظـة الملائمـة (يبقى تاريخ وفاته غير واضح) بعد أن يعهد بأولاده الثلاثة إلى الخليفـة. وضـعت هـذه الوفاة، التي حدثت في الوقت المناسب، الأخوة الثلاثة على الطريق الملكي، إذ بـدؤوا

١٠ انظر المجلد الثـاني مـن هـذه الموسـوعة، ص ٣١ـ٣٦؛ وكـذلك "العمـل الجبـري للخيّـام" (حلـب، ١٩٧٩)، الصـفحتان ١٣ـ١٤ مـن المقدّمة العربيّة.

[١١] القفطي، "تأريخ الحكماء"، الصفحات ٤٤١ـ٤٤٣.

[١٢] المرجـع السـابق. هـذه الروايـة غالبـاً مـا يتناولهـا المؤرّخـون القدامى والمحـدثون. لنـذكّر بمثـال واحـد: ابـن العبـري، "تـاريخ مختصـر الدول"، تحقيق أ. صـالِحاني، الطبعة الأو[...]ن ١٥٢ـ١٥٣.

www.j4know.com

حياتهم في حماية الوصي عليهم، الخليفة نفسه، ثمّ أصبحوا، بطلب منه، في عهدة إسحاق بن إبراهيم المُصعَبي، الذي كان حاكم بغداد لفترة من الزمن؛ أدخلهم المُصعَبيُّ، الذي أصبح مربّيَهم، إلى "بيت الحكمة" برعاية عالم الفلك الشهير يحيى بن أبي منصور [الذي توفِّيَ في عام ٢١٧ هـ/٨٣٢ م].

هذه هي رواية القفطي. إنّها القصّة التي سيقتبسها من بعده ابن العبري، ثمّ جميع الآخرين بدون كللٍ، منذ ذلك الحين وحتى أيّامنا هذه. وحتى الساعة لا نعرف أيَّ مصدر مستقل عن رواية القفطي، يؤكّد لنا هذه الرواية بأكملها أو بقسم منها. بل على العكس من ذلك، يأتي التناقض من القفطي نفسه، الذي يقدِّم، في مكان آخر من كتابه، صورة لموسى بن شاكر قليلاً ما تتطابق مع تلك التي قدّمها سابقاً، فهو يُظهِره هذه المرّة كشخص ينتسب إلى الفئة الأكثر تقدّماً من الرياضيّين وعلماء الفلك[١٣]!

ونظراً إلى غياب أيّ مصدر آخر يؤكّدها، لا يمكننا إلا أن نستبعد رواية القفطي هذه، التي أضيفت، على كلِّ حال، في نهاية كتابه[١٤]. ولكن سيرة بني موسى تصبح، عندئذ، باهتة وهزيلة. فلا يبقى سوى القليل للغاية من الوقائع التي تسمح بإغناء سيرتهم المبعثرة في الحوليّات وكتب السِّيَر الأخرى. يظهر محمّد وأحمد، في كتاب الطبري "تاريخ الرسل والملوك"[١٥]، في غمرة الأحداث، ضمن حاشية عدد من الخلفاء المتعاقبين. ونرى كلاً من هذين الأخوين، بين الأشخاص الأثرياء، في عداد مستشاري الخلفاء، أو المسؤولين عن الأعمال الكبرى في الهندسة المدنيّة. وكان اسم كلٍّ من محمّد وأحمد، في عام ٢٤٥ هـ/٨٥٩ م، على قائمة كبار الأغنياء الذين كان عليهم أن يقدّموا للخليفة المتوكّل[١٦]، الأموالَ الضروريّة لبناء مدينته الجديدة، "الجعفريّة"[١٧]. وكانت هذه القائمة تضم حوالى عشرين اسماً لشخصيّات، من بينها بعض الوزراء المشهورين مثل ابن فرّوخانشاه وابن مُخْلَد. وكان محمّد بن موسى،

---

[١٣] نعرض ما كتبه القفطي بدون أن يلاحظ التناقض الفاضح مع ما أكّده سابقاً: "متقدِّم في علم الهندسة، هو [موسى بن شاكر] وبنوه محمّد بن موسى وأحمد أخوه والحسن أخوهما وكانوا جميعاً متقدِّمين في النوع الرياضيّ وهيئة الأفلاك وحركات النجوم. وكان موسى ابن شاكر هذا، مشهوراً في منجِّمي المأمون وكان بنوه الثلاثة أبصَر الناس بالهندسة وعلم الحيَل"، "تأريخ الحكماء"، الصفحة ٣١٥. تتناقض صورة ابن شاكر هذه والتواريخُ المعطاة هنا مع كلِّ نقطة من نقاط الرواية الأخرى.

[١٤] يتعلّق الأمر بالمقالة ما قبل الأخيرة.

[١٥] "تاريخ الرسل والملوك"، تحقيق محمّد أبو الفضل إبراهيم (القاهرة، ١٩٦٧)، المجلّد التاسع، الصفحة ٤١٣.

[١٦] المرجع السابق، الصفحة ٢١٥.

[١٧] المرجع السابق، الصفحة ٢١٦.

www.j4know.com

بعد ثلاث سنوات ـ في العام ٢٤٨ هـ/٨٦٢ م ـ، حاضراً للإصغاء إلى الخليفة المنتصر[١٨] وهو يروي حُلُمه. وفي عام ٢٥١ هـ/٨٦٥-٨٦٦ م، كان محمّد نفسه مكلّفاً من قائد جيش الخليفة، المستعين، بمهمّة استعلاميّة تهدف إلى تقدير قوّات العدو[١٩]. وفي ذلك العام نفسه أيضاً، كان محمّد بن موسى في عداد الوفد المفاوض في مسألة تَنَحّي الخليفة[٢٠].

يبيِّن سياقُ ومضمونُ شهادات الطبري هذه، صحّة هذه الشهادات، كما يؤكّدها مؤرّخون آخرون: فالمسعودي[٢١] يشير إلى علاقات بني موسى مع الخليفة الواثق [٨٤٢-٨٤٧ م]، التي يذكّر بها أيضاً ابن خُرداذبه[٢٢]. وينقل ابن أبي أصيبعة، بدوره، قصّة غالباً ما تروى، وفيها أنّ بني موسى استغلّوا موقعهم في بلاط الخليفة المتوكّل لتدبير الدسائس ضد زميلهم الكِنْدي[٢٣]. وتتّفق جميع هذه الروايات على أنّ الأخوين محمّداً وأحمدَ كانا يتمتّعان بمنزلة جيّدة في بلاط الخلفاء العبّاسيّين ابتداءً من المتوكّل (٨٤٧ م) ووصولاً إلى المستعين (٨٦٦ م) على الأقل، أي قبل وفاة محمّد في عام ٨٧٣ م، وفق النديم. ويؤكّد أحمد بن موسى بنفسه مباشرةً هذا الوضع المُمَيّز، فيروي أنـّه أرسِل إلى دمشق كمدير لديوان البريد[٢٤].

هذه المنزلة الرفيعة التي كان يتمتّع بها بنو موسى، هي التي تزيد من احتمال صحَّة شهادات أخرى قدّمها النديم: فالإخوة بنو موسى أنفسهم موّلوا مهمّات للبحث عن مخطوطات يونانيّة في بقيّة أرجاء الإمبراطورية البيزنطيّة[٢٥]، واستمالوا مترجِمين أجزلوا لهم العطاء. ويؤكّد ابن أبي أصيبعة أقوال ابن النديم، ويذكر، في

[١٨] المرجع نفسه، الصفحة ٢٥٣.
[١٩] المرجع نفسه، الصفحة ٢٩٢.
[٢٠] المرجع نفسه، الصفحة ٣٤٤.
[٢١] "التنبيه والإشراف"، تحقيق م. ج. دو جوج
Al- Tanbīh wa al-ishrāf, éd. M.J. de Goeje, Biblliotheca Geographorum Arabicorum VIII (Leiden, 1894), p. 116.
[٢٢] "المسالك والممالك"، تحقيق م. ج. دو جوج
Al-Masālik wa al-mawālik, éd. M.J. de Goeje, Biblliotheca Geographorum Arabicorum VI (Leiden, 1889),
أعادت طباعته مكتبة "المثنـّى" في بغداد، بدون تاريخ، ص. ١٠٦.
[٢٣] انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولّر (Müller)، ص. ٢٠٧، ٢٢-٢٠٨، ١٧؛ نشر رضا، ص. ٢٨٦، ٩-٢٨٧، ١٥.
[٢٤] في مؤلّف بني موسى ذي العنوان "مقدّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقات ٢٢٣ظ-٢٢٦ظ، نقرأ: "ثم تهيأ لأحمد بن موسى الشخوص إلى الشام واليأ لبر يدها".
[٢٥] انظر: النديم، "الفهرست"، الصفحتان

www.j4know.com

عداد هؤلاء المترجمين، إسحاق بن حنين شخصيّاً وحُبيش وثابت بن قرّة الذي كان يتلقّى أجراً منتظماً من بني موسى.

وتُصَوِّر مصادرُ أخرى جديرة بالثقة، بني موسى كعلماء اهتمّوا بأعمالٍ في الرصد الفلكي والهندسة المدنيّة. فقد أورد ابن خلّكان[٢٦] بدقّة أنّهم قاموا، بطلبٍ شخصيّ من المأمون، بالتثبّت من طول محيط الأرض[٢٧]. واستنتج المؤرّخ وعالم الفلك ك. نلّينو (C. Nallino)[٢٨]، من أقوال ابن خلّكان، بعد أن أخذ بعين الاعتبار أعمارَ الإخوة الثلاثة وما نعرفه عن هذا الحدث العلمي المهمّ، أنّ بني موسى استطاعوا المشاركة فيه كمساعدين لعلماء الفلك في ذلك العصر، ولكن ليس بصفتهم مسؤولين عن التجربة. أمّا بالنسبة إلى الأعمال الكبرى في الهندسة المدنيّة، فيذكر الطبري القناة التي حُفِرت تحت إشرافهم؛ ولقد تكلّمَ ابن أبي أصيبعة[٢٩] على هذا المشروع المائي.

وهكذا شكّل هؤلاء الإخوة الثلاثة، الأثرياء والمقرَّبون من السلطة، فريقاً متماسكاً من الباحثين الطليعيّين في العلوم الرياضيّة وفي الرياضيّات التطبيقيّة، أيضاً، بالمعنى المتعارف عليه في عصرهم، أيْ في الهندسة المائيّة خاصّة والهندسة الميكانيكية؛ كما كانوا ناشطين في الحركة العلميّة لذلك العصر، وشكّلوا نواة لمدرسة علميّة ضمّت إليها ثابت بن قرّة وعلماءَ آخرين. هكذا يظهر لنا بنو موسى الذين سنقوم هنا بدراسة أعمالهم الريّاضيّة.

١-١-٢ أعمال بني موسى الرياضيّة

يقدّم المفهرسون القدامى، وبشكل خاصّ النديم والقِفطي، قائمتين لعناوين كتابات بني موسى في الميكانيكا وعلم الفلك والموسيقى والأرصاد الجويّة والرياضيّات.

---

[٢٦] انظر: "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عبّاس، المجلّد الخامس (بيروت، ١٩٧٧)، ص. ١٦١-١٦٢.

[٢٧] انظر: البيروني، "الآثار الباقية عن القرون الخالية"، تحقيق ك. إ. ساشو (C.E. Sachau) تحت عنوان *Chronologie Orientalischer Völker* (لايبزيغ (Leipzig)، ١٩٢٣)، الصفحة ١٥١؛ كذلك البيروني، "كتاب تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق ب. بولغاكوف (P. Bulgakov) ومراجعة إمام إبراهيم أحمد، ظهر في *Revue de l'Institut des manuscripts arabes* (أيّار_تشرين الثاني ١٩٦٢)، الصفحة ٨٥.

[٢٨] انظر: ك. نلّينو [محاضرات في الجامعة المصريّة]:
C. Nallino, *Arabian Astronomy, its History during the Medieval Times*, (Roma, 1911), pp. 284-286.

[٢٩] انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولّر (Müller)، ص. ٢٠٧، ٢٧-٢٠٨، ١٧؛ تحقيق رضا، الصفحات ٢٨٦، ٢٣-٢٨٧، ١٥.

www.j4know.com

هاتان القائمتان ليستا شاملتين، فلا يُمكننا أن نحسم مسألة عناوين أعمال بني موسى استناداً إلى هاتين القائمتين فقط. ففيما يخصّ الهندسة وهي المادّة التي تهمّنا هنا، يُشير أحمدُ نفسه إلى كتاباتٍ غائبة عن قائمتَيْ المفهرسَيْن، كما يفعل ذلك من بعده رياضيّون لاحقون. ونحن نعرف عناوين خمسة كتب في الرياضيّات تعود إلى بني موسى، وصل إلينا منها اثنان فقط.

١ـ الكتاب الأوّل عنوانه "الشكل المدوّر المستطيل"؛ وقد نَسَبه النديم والقفطي إلى الحسن بن موسى، وهذا ما يؤكّده السجزي، وهو رياضيّ في نهاية القرن العاشر. وهذا الأخير لا يكتفي بذِكر العنوان، موضِحاً أنَّ بني موسى وضعوا "كتاباً في خواصّ القِطْع الناقص وسمّوه الدائرة المستطيلة"، بل يلخّص أيضاً الطريقة التي طبّقوها لإجراء الرسم المتّصِل للقطع الناقص بواسطة خاصّية بؤرتَيْه[٣٠].

من جهة أخرى، يذكّر محمّد وأحمد بن موسى، في كتابهما المقتضب "مقدّمات كتاب المخروطات"، أنّ أخاهما الحسن وضع مؤلّفاً في توليد القطوع المخروطيّة الناقصة وفي برهان مساحتها:

"وتهيّأ للحسن بن موسى بقوته في علم الهندسة واستعلائه فيه النظر في علم قطع الأسطوانة، إذا قُطعت بسطح على غير موازاة لقاعدتها، وكان الخط المحيط بالقطع خطًا تام الإحاطة، فاستنبط علمه وعلم الأعراض الأول التي تعرض فيه من الأقطار والسهام والأوتار، واستنبط علم مساحته"[٣١].

ولكن كتاب "الشكل المدوّر المستطيل" ، حسب شهادة السجزي، يتناول مسألة توليد القطوع الناقصة. كل شيء يشير إذن إلى أنّ الأمر يتعلّق بنفس الكتاب. هذا كلّ ما يمكننا تأكيده؛ وفيما عدا ذلك، يبقى المجال مفتوحاً لبعض التخمينات؛ فيكون الكتاب قد وُضِع قبل أن تتسنّى لمؤلِّفه معرفة معمّقة بـ"مخروطات" أبلونيوس – وربّما كان مُطَّلِعاً على كتاب سيرينوس أنطينوي(*Serenus d'Antinoë*)، "في قطع الأسطوانة"[٣٢]. لقد لعب هذا المؤلَّف لابن موسى دوراً أساسيّاً، وشكَّل نقطة انطلاق

[٣٠] انظر، ضمن ر. راشد، أعمال السجزي الرياضية(بيروت، ٢٠٠٨)، ص. ٢٨٤، ما كتبه السجزي في كتابه "في وصف القطوع المخروطية": "وطريق آخر غريب مستخرج من خواصه. وعمل هذه الخاصة وبنى عليها بنو موسى بن شاكر كتاباً في خواص القطع الناقص وسمّوه الدائرة المستطيلة". ويتعلّق الأمر بخاصَّة "البؤرتين" القائلة إنَّ مجموع الخطّين الخارجين من كلّ نقطة على القطع الناقص إلى البؤرتين يساوي القطر الأعظم .

[٣١] بنو موسى، "مقدّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقتان ٢٢٣ظ-٢٢٤و، تحقيق ر. راشد ضمن: *Les Coniques*, tome 1.1: *Livre I*، ص. ٥٠٥، ٤ـ٨.

[٣٢] سنتناول ثانية هذه المسألة ضمن التح

www.j4know.com

لتطوّر عظيم لهذه الدراسة قام به ثابت بن قرّة الذي استند بفضل هذا المؤلَّف إلى معرفة معمّقة بِـ"مخروطات" أبلونيوس[٣٣].

لم يصل إلينا هذا الكتاب؛ لكن يبدو لنا أنّ جزءاً من نصِّه كان مصدر إيحاء لمساهمة ابن السَّمْح التي وصل إلينا جزءٌ منها في نصٍّ عبري[٣٤]. إنّ أهميّة هذا الكتاب في تاريخ نظريّة المخروطات ورياضيّات اللامتناهيات في الصغر المكتوبة باللغة العربيّة، وإشارات أحمد بن موسى إليه، والمعلومات التي قدّمها السجزي، والتخمينات التي قدّمناها هنا، تحثّ على إعادة تناول مسألة هذا الكتاب بشكل مستقلّ.

٢- الكتاب الثاني هو "مقدّمات كتاب المخروطات" الذي ذكرناه سابقاً، وقد أشار إليه النديم والقفطي، ووصل إليَنا في عدّة مخطوطات. أثبِتَت فيه تسع مقدّمات، "يُحتاج إليها في تسهيل فهم الكتاب"[٣٥]، أي كتاب "مخروطات" أبلونيوس.

٣- يعيد محمّد وأحمد بن موسى، في مقدّمة الكتيّب السابق، رسم تاريخ دراساتهم لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، ويذكران شرحاً كتبه أحمد لسبع مقالات من ذلك المؤلَّف. هذه الإشارة الغامضة هي المعلومة الوحيدة التي لدينا عن هذا الشرح[٣٦].

٤- كتاب عنوانه "الشكل الهندسيّ الذي بيَّن جالينوس أمرَه"، ولم يتم العثور عليه.

٥- الكتاب الذي نحقّقه هنا.

أخيراً، هناك نصٌّ صغير آخر، في تثليث الزاوية، يحمل اسم بني موسى، إلا أنَّ نسبته إليهم تثير، على ما يبدو، صعوباتٍ حقيقيّة[٣٧].

تبرز، من جميع هذه العناوين، بين السطور على الأقلّ، سمة ثابتة، استمرّت تتعزّز على امتداد هذا البحث الذي ابتدأ بالعربيّة مع بني موسى؛ وهي الاهتمام المزدوج بهندسة المخروطات، وبقياس السطوح والأحجام التي تحدّها المنحنيات؛ أي بالاهتمام في آنٍ واحد بتقليد أبلونيوس وبتقليد أرشميدس.

---

[٣٣] انظر لاحقاً تحليل كتاب ابن قرّة: "في قطوع الأسطوانة وبسيطها".
[٣٤] انظر لاحقاً تحليل نص ابن السمح.
[٣٥] مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقة ٢٢٤ظ.
[٣٦] المرجع نفسه، الورقة ٢٢٤ظ، حيث نقرأ: "وتهيأ انصرافه من الشام إلى العراق، فلما صار إلى العراق عاد إلى تفسير السبع مقالات التي وقعت إلينا".
[٣٧] انظر مخطوطة أكسفورد، مكتبة بودليان:
Bodleian Library, Marsh 207.

www.j4know.com

١-١-٣ كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرِّيّة: نصٌّ لاتيني وإعادة كتابة قام بها الطوسي

غريبٌ هو مصير هذا الكتاب. فحتى الآن لم يتم العثور عليه بالعربيّة (باستثناء مقطعين)*، ولم يبقَ منه سوى تحرير قام به نصير الدين الطوسي في القرن الثالث عشر. إلا أنَّ لدينا، لحسن الحظ، ترجمته اللاتينيّة التي أنجزها جيرارد دو كريمون والتي حُقّقت وتُرجِمت إلى عدّة لغات[٣٨].

هذه هي الوقائع. وقد جرى كلّ شيء وكأنّ تحرير الطوسي قد حلّ محل النصّ الأصلي. ويُمكننا أن نتخيّل المسار التالي لهذا الكتاب؛ وهو يبتعد قليلاً، بدون شك، عن مساره الحقيقي: اختار الطوسي نصّ هذا الكتاب، نظراً إلى أهميّته مع سهولة فهمه من قِبَل الطلاب مقارنة بأعمال العلماء اللاحقين في هذا الميدان، ليكون من بين الكتابات التي كان ينبغي تحريرها وإدراجها ضمن المجموعات المشهورة المعروفة تحت عنوان "المتوسّطات"، أي "الكتابات الفلكيّة الصغيرة" التي أضيف إليها بعض كتب الرياضيّات. وقد عرفت هذه المجموعات المخصّصة بالدرجة الأولى للتعليم نجاحاً كبيراً، نستطيع أن نقيسه بالعدد المرتفع لمخطوطاتها التي وصلت إلينا. لقد أمّن إذاً تحريرُ الطوسي لفكر بني موسى انتشاراً واسعاً. لكن هذا النجاح حصل، إذا جاز القول، على حساب النصّ نفسه: فقد كان تداول تحرير الطوسي كبيراً بحيث تمّ إهمال نسخِ نصِّ بني موسى الأصلي الذي اختفى، كما يبدو منذ ذلك الحين؛ وقد باءت بالفشل جميع محاولاتنا للعثور عليه.

---

* تم العثور على مقطعين من هذا المؤلّف، انظر الصفحات ٣٩-٤٧. أضيفت هذه الملاحظة عند تصحيح الأوراق الأولى التي أخرجتها المطبعة، من مجلّدنا هذا.

[٣٨] راجع: م. كورتز:

M. Curtze, " Verba Filiorum Moysi, Filii Sekir, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der Liber trium fratrum de Geometria, nach der Lesart des codex Basileenis F. II. 33 mit Einleitung und Commentar ", *Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturförscher*, vol. 49 (Halle, 1885), pp. 109-167;

وانظر أيضاً هـ. سوتر:

H. Suter , "Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir", *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1902), pp. 259-272;

وانظر م. كلاجيت:

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, pp. 233-367.

انظر كذلك و. كنور:

W. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Boston. Basel, Berlin, 1889), pp. 267-275.

www.j4know.com

أمّا النص اللاتيني فينقص منه، كما سنرى ، مقطعٌ طويل أعاد تحريره الطوسي. يشرح بنو موسى في هذا المقطع التركيبَ الآلي الذي ابتكروه لتحديد قطعتين مستقيمتين بين قطعتين مستقيمتين معلومتين، بحيث تتوالى القطع الأربع في تناسب مُتّصل؛ ويشرحون فيه أيضاً مسألة تثليث الزاوية[٣٩]. وربّما لم يكن جيرارد دو كريمون يرغب بمواجهة الصعوبة الحقيقيّة، اللغويّة والتقنيّة، لهذا المقطع الذي لا تثير صحّة نسبته إلى بني موسى أيّ شكٍّ. لذلك لا بد، من أجل فهم إسهام بني موسى، من العودة إلى نص جيرارد دو كريمون؛ لكنّ من البديهيّ أيضاً، أن نعود بالضرورة إلى تحرير الطوسي لأجل تحقيق هدفنا هذا. وتـُقدِّم لنا هذه الترجمة اللاتينيّة خدمة أخرى، فهي تـُعلِمُنا بالمعنى الذي كان الطوسي يعطيه لكلمة "تحرير"، وتسمح لنا بقياس المسافة التي تفصل تحرير الطوسي عن نصّ بني موسى. لكنَّ تحرير الطوسي لا يلبث، بدوره، أن يلقي الضوء على الترجمة اللاتينيّة، أو على الأقل على سماتها اللغويّة. لذا، ينبغي على الذي يؤرّخ لفكر بني موسى في هذا الميدان، أن يواجه الصعوبة المزدوجة المتمثّلة في استخدام تقليد غير مباشر، وفي العودة إلى نص أعيدت كتابته بعد ثلاثة قرون. ولنحاول، في البداية، أن نفهم، بشكل مؤقّت على الأقل، كيف أراد الطوسي أن "يُحرِّر" أو أن "يُعيد كتابة" مؤلَّف بني موسى، وذلك بعد أن أشرنا مسبقاً إلى العقبتين اللتين يواجههما المؤرِّخُ في هذه الحالة.

ترتبط العقبة الأولى بأسلوب كتابة بني موسى ومعاصريهم؛ فهم يتوجّهون إلى رياضيّي زمانهم، إلى طلاب الرياضيّات وعلم الفلك. وكان يجب أن تكون لهؤلاء القرّاء معرفة جيّدة بمؤلَّفيْ "الأصول" و"المعطيات" لأقليدس، وبكتابات أخرى. فإذا حدث أن يستخدم بنو موسى قضيّة من هذين المؤلَّفَيْن بدون التذكير بها بوضوح، فإنَّ ذلك يعود بالضبط إلى أنـّهم كانوا يعوّلون، بشكل بديهيّ، على معرفة القرّاء بهذين المؤلَّفَيْن. ولم يفكّر أحدٌ قَطُّ بلومهم على هذه الممارسة، التي كانت مألوفة وقديمة العهد. إنَّ الطوسي نفسه، الذي كان أفضل العارفين بأعمال أقليدس وكان يدرك الإحالات المضمَرة لبني موسى، لم يعتبر قط أنـّه من الضروري توضيحها، ولم يرَ

[٣٩] انظر نص بني موسى أدناه، ص. ٢٤

www.j4know.com

فـي عدم ذكرهـا أيَّ نقص ينبغـي سَدّه. والظن بـأنّ هذه الممارسـة تنطـوي علـى نيّـة لإخفاء المصادر، يعني عدم معرفة التقاليد الرياضيّة في ذلك الزمن؛ ويجب التذكير، في هذا الصدد، بأنَّه قد يحدث أن يستخدم بنو موسى قضـايا، سبق لهم أن برهنوها، دون أن يذكروا ذلك بشكل واضح.

تـرُجِعنا العقبـة الثانيـة إلـى صـياغة الطوسـي التـي تتوجّـه، هـي أيضـاً، إلـى طـُلاب متقدّمين في الرياضيّات. لم يكن هؤلاء الطُلاّب مطَّلعين على أعمال أقليدس فحسب، بـل كـانوا قـادرين علـى إتمـام مراحـلَ، أوّليّـة علـى الأقـل، مـن البـراهين. ولـم يُهمِـل الطوسي هذه المراحل، بسبب قصور في تحريره، بل إنـَّه قام بذلك عن قصد.

ولكنـَّنا نعرف أنَّ الإيجاز هو أحد معايير تحرير الطوسي؛ فهو، علـى امتداد نصّ بني موسى، يحذف ما يبدو لـه غير ضـروري للعرض الرياضـي الدقيق. وقد يوافق الـبعض علـى خياراتـه أو يرفضـها؛ لكـنَّ هـذا الاقتصـاد فـي التحريـر، بالنسـبة إلـى الطوسي، ضـامنٌ لأناقة الـنصّ علـى الأقلّ، بـل يُضـفي عليـه، أيضـاً بشكل مُضـمَر، صبغة تعليميّة.

لنعد الآن إلى معنى هذه "التحارير" أو "إعادات الكتابة" التي قـام بهـا الطوسـي. إنّ هذه المسألة، رغم أهميّتها الكبرى، لـم تـُدرسَ من قَبل حسب معلوماتنـا؛ ونـحن لـن ندرسها هنا إلا في حالة كتاب بني موسى.

سنبدأ بـإبراز بعض السِّمات العامّـة لـِ"تحريـر" الطوسـي، قبـل أن نباشـر بالتحليـل الدقيق لمثال نأخذه من كل جوانبه. عندما "يحرّر" الطوسي، فإنـَّه يريد الوصـول إلـى نـصٍّ خـالٍ من المقـاطع النافلـة ومن الإطـالات التـي ليسـت مفيـدة برأيـه. والعمليّـات المتداولة عنده بشكل أساسي هي: حذف التكرار، واستبعاد الإسهاب، وإعـادة صـياغة الجمل مع إدخال الضمائر لتقوية العبارات الطويلة. نشير إذاً إلى الأمور التالية:

١- قـام الطوسـي بعمليّـات حـذف واسـعة فـي المقـاطع التـي خصّـصـها بنـو موسـى لعرض دوافعهم، وبخاصّة في المقدّمة، حيث يشرحون مـا حـدا بهـم إلـى تحرير هذا الكتـاب ويصـفون الطريقـة التـي اختاروهـا فـي كتـابتهم الخاصّـة. وتعامـل الطوسـي بالأسلوب نفسه مع الخاتمة حيث يعود بنو موسى إلى مختلف النتائج التي توصّلوا

www.j4know.com

إليها. ولا نظنّ أنّ هناك حاجة إلى التذكير بالأهميّة الكبرى لهذه المقاطع بالنسبة إلى المؤرّخين.

٢- عمد الطوسي إلى حذف المقاطع التي يرى فيها تكراراً. ففي بداية القضيّة السادسة عشرة، يشرح بنو موسى كيف تسمح مسألة إيجاد مقدارين بين اثنين آخرين معلومَيْن بحيث يتوالى الأربعة في تناسب متّصل، بحلِّ مسألة استخراج الجذر التكعيبي. وفي نهاية الكتاب يذكّرون بالمعنى نفسه[٤٠]. وقد اختفى هذا التذكير من صياغة الطوسي.

٣- يقوم الطوسي، في الكتابات الرياضيّة، بتشذيب النصّ، إلا أنّه يحافظ على ما هو أساسي فيه. والعبارات المستخدَمة لعرض القضيّة ولبرهانها، مثل: "مثال"، "أقول"، "برهان"، "إن أمكن ذلك"، "هذه صورته"، "وذلك ما أردنا أن نبيّن"، حُذف بعضها بشكل منهجيّ، والبعض الآخر حُذِف في أغلب الأحيان.

يبقى أن نقول إنّ الطوسي، على امتداد هذا "التحرير"، لم يُشوِّه قطُّ، في الصفحات الرياضيّة حصراً، لا المعنى ولا حرْفيّة النصّ في القسم الأساسي منه. فهو يفصل، بعناية متناهية، أقواله وشروحه عن تلك العائدة إلى بني موسى، مبتدئاً إيّاها بكلمة "أقول". وتبيّن مقارنة "تحريره" بالنص اللاتيني أنّه لم يغيّر قطُّ بنية الاستدلال والعرض؛ فتحريره إذاً هو، بالفِعل، الخلاصة الأساسيّة لنص بني موسى.

لقد اتّضح، إذاً، أنّ الوضع أقل خطورة ممّا كُنّا نخشاه. فسنقبَل بأنّ لدينا، بالفعل عبر "تحرير الطوسي"، نصَّ بني موسى، في القسم الأساسي منه. ولنأخذ، لمزيد من الإقناع، مثال القضيّة الرابعة عشرة، ونحاول "إعادة تشكيل" النصَّ العربي المترجم إلى اللاتينيّة. لا شكَّ أنّ إعادة التشكيل التخمينيّة هذه قد تبتعد عن الأصل في اختيار بعض الكلمات أو الصيغ اللغويّة؛ ونحن ندَّعي أنّها لن تبتعد عنه كثيراً. وهي، على أيِّ حال، ستساعدنا على اكتشاف الفروق بين تحرير الطوسي والنصّ الأصلي. لنذكّر، لضرورات المقارنة، أنّ الأحرف الهندسيّة جـ، و، ز، ط، أصبحت على

[٤٠] انظر القضيّة التاسعة عشرة من النص اللاتيني:

www.j4know.com

التوالي لدى جيرارد دو كريمون G، U، Z، T وأصبحت لدينا، C، F، G، I. [أنظر الجدول الأوّل]

ويُمكن أن يعترض البعض، أيضاً، على الحجج التي قدّمناها في الفقرات السابقة، بالقول بعدم إمكانيّة الحكم بطريقة دقيقة _لا هنا ولا في مكان آخر_على أمانة الترجمة اللاتينيّة. وممّا لا شك فيه أنّ أيّ حكم من هذا النوع يَبقى غيرَ ممكن، إلى حين العثور على نصّ بني موسى نفسه أو، إذا تَعَذر ذلك، على مقطع أو عدّة مقاطع من هذا النصّ. ولقد قادنا البحث عن مثل هذه المقاطع إلى العثور على قضيّتين أكّد تحليلُهما المقارَن، كما يبدو، النتائجَ التي حصلنا عليها[٤١].

إذا استثنينا الحوادث المرتبطة بنسخ الاستشهاد، سنرى أنّ جيرارد دو كريمون ينقل حرفيّاً النصّ العربي؛ ومن جهة أخرى سنرى أنّ تحرير الطوسي يجري وفق المسار الذي وصفناه. وقبل أن ندوّن في جدول جديد المقارَنات التي تـُمكّن من تبيين هذه الأقوال، نذكّر بأنَّ الاستشهادين اللذين عثرنا عليهما موجودان ضمن شرح لِـ"أصول" أقليدس[٤٢]، لمؤلِّف مجهول الهويّة، يذكر فيه هذا المؤلّف، من بين آخرين، ثابت بن قرّة، النيريزي، الأنطاكي، ابن الهيثم، ابن هود وكذلك الدمشقي والفارابي. ويذكر هذا المؤلِّفُ نفسُه بني موسى عندما يهتم بمسألة تثليث الزاوية. فيكتب: "وقد تقسم الزاوية بثلاثة أقسام على ما ذكره بنو شاكر. ويقدم لذلك مقدمة"[٤٣]. وعند ذاك يورد القضيّة الثانية عشرة من مؤلَّف بني موسى، قبل أن يتناول القضيّة الثامنة عشرة.

[انظر الجدول الثاني].

تؤكّد لنا المقارنة أمانة الترجمة اللاتينيّة لنصّ بني موسى. فقد ثبت لدينا، بالنسبة إلى قضيّتين مختلفتين، متباعدتين بما يكفي، أنّ جيرارد دو كريمون ينقل حرفيّاً النصَّ العربي. ومن جهة أخرى، تبيّن هذه الترجمة طبيعة تحرير الطوسي كما وصفناه حتى قبل أن نعثر على هذين الاستشهادين.

---

[٤١] أضيف هذا القسم عند تصحيح الأوراق الأولى التي أخرجتها المطبعة، من مجلّدنا هذا. نشير إلى أنّ الاستشهاد، بالمقطعين اللذين عثرنا عليهما، يبيّن أنّ مؤلّف بني موسى كان لا يزال متداوَلاً حتى نهاية القرن الثالث عشر الميلادي على الأقل.
[٤٢] مخطوطة حيدر أباد، الجامعة العثمانية ٩٩٢.
[٤٣] المرجع نفسه، الورقة ٥٠و.

www.j4know.com

لم يُهمِل الطوسي، الذي كان رياضيّاً من المرتبة الأولى، مهمّة إعادة كتابة بعض المؤلّفات الريّاضيّة الأساسيّة. يتّضح هنا هدف هذه المهمّة؛ فهو يتمثّل في تشذيب النصّ الأصلي، وتغيير أسلوبه قليلاً، بدون المسِّ، مع ذلك، بالأفكار الرياضيّة المثبتة، أو ببنية المؤلَّف؛ ويحصل ذلك بدون التدخُّل في الاستدلال وبدون إدخال شيء إلى المؤلَّف من خارجه. إنَّ القيام بهذه المهمَّة أبعد من أن يكون سهلاً، وهي بحاجة إلى رياضيّ من منزلة الطوسي للقيام بها على أحسن وجه. إلا أنّ القيام بها لا يجري بشكل رتيب. فالقضايا الأكثر تعقيداً من الناحية الرياضيّة والتقنيّة هي الأقلُّ تلاؤماً مع هذه المهمّة. يبقى نصُّ الطوسي، بخصوص هذا الصنف من القضايا، أكثر قرباً، بالفعل، من نصّ بني موسى، كما تشهد على ذلك، في هذه الحالة المقارنة بالنص اللاتيني؛ وهذا ما يحدث بخصوص القضيّتين السابعة عشرة والثامنة عشرة حيث يختلط بالرياضيّات وصفُ آلات تقنيّة. لكن، هنا بالتحديد، ينقص من النصّ اللاتيني الذي نحقّقه مقطع، من ثلاث صفحات، بقي محفوظاً لحسن الحظ في تحرير الطوسي.

لقد أتاح هذا المقطع المفقود في النصّ اللاتيني، الفرصة لظهور الأقوال الأكثر إثارة للبلبلة. نـُشير في البداية إلى أنّ الطريقة التي يقترحها بنو موسى في هذا المقطع، خلافاً لكلّ ما قد قيل، ليست تلك التي تحمِلُ، وفقاً لأقوال أوطوقيوس (*Eutocius*)، اسم أفلاطون. ونؤكّد أيضاً أنّ لا شيء يسمح في هذا المقطع بتشكيكٍ محتمَل في أصالته أو في نسبته إلى بني موسى. فالطوسي نفسه، الذي لم يتوانَ قطُّ عن فصل أقواله عن أقوال بني موسى، لم يترك أيَّ غموض حول هذه النقطة. من جهة أخرى، لا يسمح تاريخ النصّ العربي بأيِّ شكّ في نسبة هذا المقطع إلى بني موسى. وأخيراً يقدّم النصّ العربيّ والترجمة اللاتينيّة جواباً واضحاً بخصوص هذه المسألة. فالنصّ المطعون بصحّته يقع في نهاية القضيّة السابعة عشرة في نصّ بني موسى؛ وهؤلاء يوردون في القضيّة الثامنة عشرة، وبشكل هو على أكثر ما يكون من الوضوح، الطريقة الآليّة المعروضة في هذا المقطع. يأتي عرض القضيّة الثامنة

www.j4know.com

عشرة كما يلي: "لنا أن نقسم بهذه الحيلة أيّ زاوية شئنا بثلاثة أقسام متساوية"، في حين نقرأ في النص اللاتيني:

"Et nobis quidem possibile est cum hoc ingenium sit inventum ut dividamus quemcunque angulum volumes in tres divisions equales" (ص. ٣٤٤، ١، ١-٣)

غير أنّ من يقرأ النصّ اللاتيني وحده لا يقع على هذه "الحِيَلة" التي يشير إليها هنا بنو موسى، والتي لا يمكن بالتالي أن يكون ذكرها من فِعل الطوسي. وقد كتب بنو موسى بعد ذلك بقليل، وفقاً لتحرير الطوسي: "فتحرِّك بالحيلة المذكورة زح..." (انظر أدناه ص.١٣٣، ١)، ونقل جيرارد دو كريمون هذه العبارة إلى اللاتينيّة على الشكل التالي:

« Et quoniam possibile est nobis per ingenium quod narravimus in eis que premissa sunt et per ea que sunt ei similia ut moveamus lineam ZH…» (٣٤٦-٣٤٨، ١، ٣٣-٣٥)

أي ما معناه: "وبما أنـّه يمكن لنا بطريقة الحِيَل التي وصفناها في القضيّتين السابقتين وبالأشياء التي تشبهها، أن نـُحرّك الخطّ *GH* ...".

من الواضح إذاً أنّ بني موسى قد وصفوا هذه الحِيَل سابقاً في مقطع لم يترجمه جيرارد دو كريمون.

لا مفرَّ إذاً، أمام من يهتمّ بهذا الإسهام لبني موسى، من أن يخوض المعركة على جبهتين: تحرير الطوسي والترجمة اللاتينيّة. فالثانية توضح معنى الأولى؛ والأولى بدورها تساعد على تثبيت حدود الثانية. يقدّم لنا تحرير الطوسي، من بعض النواحي، خلاصة نصّ بني موسى، بشكل أكثر أمانةً بالرغم من تدخـّلات الطوسي. لكنـّنا لايمكن أن ننكر أنّ الترجمة اللاتينيّة، تنقل إلينا جيّداً التفاصيل والأقوال والتكرارات...، التي حذفها الطوسي والتي تشكّل كلُّها جزءاً لا يتجزّأ من النصّ.

أخيراً، أمّن كلٌّ من "تحرير" الطوسي وترجمة جيرارد دو كريمون، البقاءَ لنصّ بني موسى، بإعطائه دوراً تاريخيّاً، إذ أصبح المرجعَ الأساسيَّ في التعليم الأرشيمدي طيلة عدّة قرون.

www.j4know.com

الجدول الأوّل

ملاحظات	III تحرير الطوسي	II النص العربي الذي يُحتمل أن يكون في أساس النص اللاتيني I (ترجمة جيرارد)	I ترجمة جيرارد دي كريمون Gérard de Crémone
نلاحظ أنّه تمّ الحفاظ على المعنى وأنّ عبارة الطوسي أقصر بقليل.	سطح نصف الكرة المستدير ضعف سطح الدائرة العظيمة التي هي قاعدتها.	(١) كل نصف كرة فإن مساحة سطحه (أو بسيطه) ضعف مساحة سطح الدائرة العظيمة التي تقع فيها.	(1) *Embadum superficiei omnis medietatis spere est duplum embadi superficiei maioris circuli qui cadit in ea.*
الفرق الوحيد يكمن فيما يلي: في النص (III)، الدائرة الكبرى هي قاعدة نصف الكرة، بينما هذا مضمَر في النصّين (I و II).	فليكن ا ب جـ د نصف كرة، ودائرة ا ب جـ عظيمة تقع فيها وهي قاعدتها، و د قطبها.	(٢) مثال ذلك: فليكن ا ب جـ د نصف كرة، ودائرة ا ب جـ عظيمة تقع فيها ونقطة د قطب هذه الدائرة.	(2) *Verbi gratia, sit medietas spere BCAD, et maior circulus qui cadit in ea sit circulus ABC, et punctum D sit polus huis circuli.*
قام الطوسي بحذف هذه الجملة.		(٣) فأقول إن: مساحة سطح (أو بسيط) نصف كرة ا ب جـ د ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ، وبرهانه أن ...	(3) *Dico ergo quod embadum superficiei medietatis spere ABCD est duplum embadi superficiei circuli ABC, quod sic probatur.*
قد يحدث أن لا يحتفظ المترجم اللاتيني سوى بإحدى الكلمتين "embadum مساحة" و "superficies سطح". ولقد قام الطوسي بحذف الجزء الثاني ليذهب مباشرة إلى البديل الآخر.	فإن لم يكن ضعف سطح دائرة ا ب جـ مساوياً لسطح نصف الكرة.	(٤) فإن لم يكن ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ مساوياً لمساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د فهو إما أن يكون أقل منها وإما أن يكون أكثر منها.	(4) *Si non fuerit duplum ernbadi circuit ABC equale superficiei medietatis spere ABCD, tunc sit duplum eius aut minus superficie medietatis spere ABCD aut maius ea.*
النصّان متطابقان، مع فارق هو أنّ الطوسي أحلّ الضمائر محلّ الأسماء واستبعد عبارة "إن أمكن ذاك" المضمَرة في العرض. وهذه الاختلافات في الأسلوب هي التي تشكّل الفارق بين "صياغتَي" هذه الفقرة.	فليكن أولاً أصغر منه، وليكن مساوياً لسطح نصف كرة أصغر من نصف كرة ا ب جـ د، وهو نصف كرة هـ ح ط كـ.	(٥) فليكن أولاً ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ أقل من مساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د، إن أمكن ذلك؛ وليكن ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ مساوياً لمساحة سطح نصف كرة أقل من نصف كرة ا ب جـ د، وليكن نصف كرة هـ ح ط كـ.	(5) *Sit ergo in primis duplum embadi circuli ABC minus embado superficiei medietatis spere ABCD, si fuerit illud possibile. Et sit duplum embadi circuli ABC equale superficiei medietatis spere minoris medietate spere ABCD, que sit medietas spere EHIK.*

www.j4know.com

(6) *Cum ergo fiet in medietate spere ABCD corpus compositum ex portionibus piramidum columnarum, cuius basis sit superficies circuli ABC et cuius caput sit punctum D, et ponetur ut corpus non tangat medietatem spere EHIK,*	(٦) فإذا عمل في نصف كرة ا ب جـ د مجسم من قطع من مخروطات الأساطين مركب بعضها على بعض، قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة هـ ح ط ك،	فإذا عمل في نصف كرة ا ب جـ د مجسم – كما وصفنا- قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة هـ ح ط ك	النصّان متطابقان، مع فارق بسيط استبدل الطوسي عبارة "مؤلَّف ... الأخرى" بعبارة "كما وصفنا" منعاً للتكرار. وهذا، كما يبدو، أحد دوافع "تحرير" الطوسي.
(7) *tunc oportebit ex eis que premisimus ut embadum superficiei corporis ABCD sit minuss duplo embadi superficiei circuli ABC. Sed embadum superficiei corporis ABCD est maius embado superficie medietatis spere EHIK, quoniam continet ipsam. Ergo embadum superficiei medietatis spere EHIK est multo minus duplo embadi superficiei circuli ABC. Et iam fuit ei equalis. Hoc vero contrarium est et impossibile.*	(٧) فمما بينا آنفاً تكون مساحة سطح مجسم ا ب جـ أقل من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ. ولكن مساحة سطح مجسم ا ب جـ د أكثر من مساحة سطح نصف كرة هـ ح ط ك لأن الأول يحيط بالآخر. فمساحة سطح نصف كرة هـ ح ط ك أقل كثيراً من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ. وقد كان مثله، هذا خلف لا يمكن.	كان سطحه أصغر من ضعف سطح دائرة ا ب جـ وأعظم من سطح نصف كرة هـ ح ط ك. فضعف سطح دائرة ا ب جـ المساوي لسطح نصف كرة هـ ح ط ك أعظم كثيراً منه؛ هذا خلف.	
(8) *Et iterum sit duplum embadi superficiei circuli ABC maius embado superficiei medietatis spere ABCD, si fuerit possibile illud. Et sit equale superficiei medietatis spere maioris medietate spere ABCD, que sit medietas spere FGLM.*	(٨) ثم ليكن ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ أكثر من مساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د ، إن أمكن ذلك؛ وليكن مساوياً لمساحة سطح نصف كرة أعظم من نصف كرة ا ب جـ د، وليكن نصف كرة و ز ل م.	ثم ليكن ضعف سطح دائرة ا ب جـ أعظم من سطح نصف كرة ا ب جـ د، وليكن مساوياً لسطح نصف كرة و ز ل م.	هكذا اختصر الطوسي مرحلتَي العبارة بمرحلة واحدة.
(9) *Cum ergo fiet in rnedietate spere FGLM corpus compositum ex portionibus piramidum columpnarum, cuius basis sit superficies circuli FGLM et cuius caput sit punctum D, et non sit corpus tangens medietatem spere ABCD,*	(٩) فإذا عمل في نصف كرة ا ب جـ د مجسم من قطع من مخروطات الأساطين مركب بعضها على بعض، قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة هـ ح ط ك.	ونعمل فيه مجسماً – كما وصفنا- غير مماس لنصف كرة ا ب جـ د.	لقد تعمّد الطوسي هنا، كما في السابق، إهمال وصف المجسّم، مذكّراً بأنّ وصفه قد حصل سابقاً، وهكذا اقتصر هذا المقطع على ما هو أساسي.
(10) *tunc oportebit ex eo quod premisimus ut sit embadum superficiei corporis FGLM maius duplo embadi circuli ABC.*	(١٠) فيكون مساحة سطح مجسم و ز ل م أكثر من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ د، لما مرّ.	فيكون سطح المجسم أعظم من ضعف سطح دائرة ا ب جـ ، لما مرّ	الفارق الوحيد عن النص (III) هو وجود كلمة "مساحة" وتسمية المجسّم.

www.j4know.com

(11) *Verum embadum superficiei medietatis spere FGLM est maius embado superficiei corporis FGLM.*	(١١) ومساحة سطح نصف كـرة و ز ل م أعظـم مـن مساحة سطح مجسم و ز ل م لكونه محيطاً به.	وسطح نصف كـرة و ز ل م أعظم من سطح المجسم لكونـه محيطاً به.	العبـارة الأخيـرة "لكونـه محيطـاً بـه" غائبة عن النص اللاتيني؛ أمّا الطوسي، فلم يسمِّ المجسّم.
(12) *Ergo embadum medietatis spere FGLM est maius duplo embadi superficiei circuli ABC. Sed iam fuit ei equale. Hoc vero est contrarium et impossibile.*	(١٢) فمساحة سطح نصف كرة و ز ل م أكثر كثيراً من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ ، وقد كان مثله؛ هذا خلف لا يمكن.	فسطح نصف كـرة و ز ل م أعظم كثيراً من <ضعف> سطح دائرة ا ب جـ ، وكان مثله؛ هذا خلف.	
	(١٣) فليس مساحة سطح نصف كـرة ا ب جـ د بأقل مـن ضـعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ ، وقد كنا بينا أنهـا ليست بـأكثر منهـا، فهـي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.	فـإذن الحكـم ثابت؛ وذلك ما أردناه.	جملـة الطوسـي: "فـإذن الحكـم ثابـت؛ وذلك ما أردناه"، ليس لها ما يقابلها في الترجمـة اللاتينيّـة. لكـنَّ مـا قـد يثيـر العجب هو أن يكون بنو موسى، خلافاً لأسلوبهم في الكتابـة الـذي نعرفـه، قـد نسـوا وضـع هـذا الاسـتنتاج. فمـن المحتمل – كما تشـهد علـى ذلك بـاقي رسـالتهم- أن يكـون الاسـتنتاج غائبـاً، بسبب إغفال جيرارد، أو بسبب غيابـه عن المخطوطـة التـي كـان هـذا الأخيـر يترجمها.
(14) *Iam ergo ostensum est quod embadum superficiei omnis spere est quadruplum embadi superficiei maioris circuli cadentis in ea. Et illud est quod declarare voluimus. Et hec est forma eius.*	(١٤) وهنالك تبين أن كل كرة فـإن مساحة سـطحها أربعـة أمثـال مسـاحة سطح أعظـم دائرة تقع فيها، وهذا مـا أردنـا بيانه. وهذه صورته.	وقد بـان منـه أن سـطح الكـرة أربعـة أمثـال سـطح أعظـم دائرة تقع فيها.	

www.j4know.com

الجدول الثاني

I ترجمة جيرار دي كريمون	II النص الأصلي العربي للقضيّة ١٢	III صياغة الطوسي	ملاحظات
Cum fuerit circulus cuius diameter sit protracta, et protrahitur ex centro ipsius linea stans super diametrum orthogonaliter et perveniens ad lineam continentem et secatur una duarum medietatum circuli in duo media, tunc cum dividitur una harum duarum quartarum in divisiones equales quotcunque sint, deinde protrahitur corda sectionis cuius una extremitas est punctum super quod secant se linea erecta super diametrum et linea continens et producitur linea diametri in partem in quam concurrunt donec concurrunt et protrahuntur in circulo corde equidistantes linee diametri ex omnibus punctis divisionum per quas divisa est quarta circuli, tunc linea recta que est inter punctum super quod est concursus duarum linearum proctractarum et inter centrum circuli est equalis medietati diametri et cordis que protracte sunt in circulo equidistantibus diametro coniunctis.	إذا كانت دائرة وأخرج من مركزها خطٌّ يقوم على القطر على زاوية قائمة وينتهي إلى خط المحيط ويفصل نصف الدائرة بنصفين، فإنه إذا قسم أحد هذين الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ثم أخرج وتر القسم الذي أحد طرفيه نقطة تفاصل نصف قطر الدائرة القائم مع الخط المحيط، وأخرج القطر في الجهة التي يلتقيان فيها، وأخرج في الدائرة أوتار موازية لخط القطر من جميع نقط الأقسام التي قسم بها ربع الدائرة، فإن الخط المستقيم الذي بين النقطة التي التقى عليها الخطان المخرجان وبين مركز الدائرة مثلُ نصف قطر الدائرة والأوتار التي أخرجت في الدائرة الموازية للقطر مجموعة.		نلاحظ أنّ الطوسي، كعادته، أهمل وضع صيغة القضيّة في نصّه ليبدأ مباشرة بمثال القضيّة. نقل جيرار دو كريمون النص العربي حرفيّاً، وربّما كان الفارقُ الوحيد حادثَ نسخٍ طرأ على التقليد المخطوطيّ. يتعلّقُ الأمر بالجملة التالية: “Cuius diameter sit protracta” التي كان يجب أن تترجَم بالعبارة: <وأخرج قطرها>. ويُحتمَل جدّاً أن يكون الأمر متعلّقاً بقفزة من كلمة إلى أخرى بسبب التشابه، أي أن تكون العبارة في الأصل كما يلي: <إذا كانت دائرة وأخرج قطرها وأخرج من مركزها ...>. حواشي النص II: ٣ أحد: احدى – ٤ طرفيه: طرفين / تفاصل: تفاضل – ٥ وأخرج (الثانية): وأخرجت.
Verbi gratia, sit circulus ABG, cuius diameter sit linea AG et cuius centrum sit punctum D. Et protrahatur ex eo linea DB erecta super lineam AG orthogonaliter et dividat arcum ABG in duo media. Et dividam quartam circuli super quam sunt A, B in divisiones equales quot voluero et ponam eas	مثاله: دائرة $\overline{\text{ا ب جـ}}$، قطرها $\overline{\text{ا جـ}}$ ومركزها نقطة $\overline{\text{د}}$، وقد أخرج منه خط $\overline{\text{د ب}}$ يقوم على خط $\overline{\text{ا جـ}}$ على زاويتين قائمتين، ويقسم قوس $\overline{\text{ا ب جـ}}$ بنصفين، ثم	ليكن $\overline{\text{ا ب جـ}}$ دائرة قطرها $\overline{\text{ا جـ}}$ ومركزها $\overline{\text{د}}$، وقد قام عمود $\overline{\text{د ب}}$ منه على القطر، ولنقسم ربع $\overline{\text{ا ب}}$ بأقسام متساوية $\overline{\text{كم}}$ كانت، وهي ا ز	بعد إهماله كلمة "مثاله"، يستعيد الطوسي هنا نص بني موسى بأسلوب مختصر وأكثر أناقةً في أغلب الأحيان. لا تختلف الترجمة اللاتينيّة عن النص الأصلي. ويعود الاختلاف البسيط في جملة: "Et protraham… punctum E"، إلى الترجمة بدون شك.

www.j4know.com

	ز ل ل ب، ولنخرج وتر ب ل وننفذه، وننفذ قطر جـ ا إلى أن يلتقيا على هـ، ونخرج من نقطتي ز ل وتري ز ط ل ح موازيين لقطر جـ ا . فأقول: إن خط د ه يساوي نصف قطر جـ ا ووتري ز ط ل ح جميعاً.	نقسم ربع الدائرة الذي عليه ا ب بأقسام متساوية كم شئنا، وهي ا ز ل ب ز ل. ونصل ل ب ، ونخرج خطي ا جـ ل ب حتى يلتقيا على نقطة هـ، ونخرج من نقطتي ز ل وتري ز ط ل ح يوازيان قطر ا جـ. فأقول: إن خط د ه مثل نصف القطر ووتري ل ح ز ط مجموعة.	*divisiones AZ, ZL, LB. Et protraham cordam BL et faciam ipsam penetrare. Et elongabo iterum lineam AG, que est diameter, secundum rectitudinem donec concurrant super punctum E. Et protraham ex duobus punctis Z, L duas cordas ZT, LH equidistantes diametro AG. Dico ergo quod linea DE est equalis medietati diametri et duabus cordis ZT, LH coniunctis, cuius hec est demonstratio.*
يهمل الطوسي كلمة "برهانه" ويستعيد نص بني موسى بشكل مكثّف، مغيّراً التعابير في بعض الأحيان، مثلَ تغييره: "سطح"، "الأن"، و"مثل ذلك" بـ: "مربع"، "من أجل أن"، و"كذلك". وهي في الواقع مرادفات. والأهمّ من ذلك هو أنّه عندما يعتمد استدلال بني موسى نفسه (فيما يخصّ هـ د)، فإنّه يوجز هذا الاستدلال. الترجمة اللاتينيّة تنقل النصّ بدقّة، مع فارق بسيط، يخصُّ العبارة "si quarta circuli" التي قد تكون شرحاً أدخله جيرارد أو ناسخ المخطوطة التي ترجمها جيرارد، لأنّها مُضمرة في النص. حواشي النص II: ٢ ندبر: نريد – ٣ كذلك: لذلك – ٤ قسمي: قد تُقرأ قسي، وفي هذه الحالة يكون الصواب "قوسي" – ٥ ب ح: با/ لقسمي:قد تُقرأ لقسي، وفي هذه الحالة يكون الصواب "لقوسي"/ ط ا و ز: طا دال الف واو زاي - ٦ ح و هـ ل: ها واو ها لام.	فنخرج خط ط ا ح ز وننفذ ح ز إلى أن يلقى جـ هـ على و. وبمثل ذلك ندبر إن كانت الأقسام أكثر. فخطوط جـ هـ ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط ا ح و ب ه متوازية، لأن قوسي ط ح ح ب مساويتان لقوسي ا ز ز ل، فسطح ط ا و ز متوازي الأضلاع و ط ز مثل ا و . وبمثل ذلك ح ل مثل و هـ ، فـ د هـ مثل د ا ط ز ح ل جميعاً؛ وذلك ما أردناه.	برهانه: أنا نخرج خط ط ا ، ونخرج خط ح ز وننفذه على استقامة حتى يلقى / خط جـ هـ على نقطة و. وكذلك ندبر إن كانت الأقسام أكثر. فخطوط <جـ هـ> ط ز ح ل متوازية لأنها كذلك أخرجت في الوضع، وخطوط ا ط و ح هـ ب متوازية من أجل أن قسمي ط ح ب ح مساويتان لقسمي ا ز ز ل، فمربع ط ا و ز متوازي الأضلاع، فخط ح ل مثل خط و هـ ، فجميع خط هـ د مساوٍ لخطي ط ز ح ل ولنصف القطر مجموعة.	*Protraham lineam TA et protraham lineam HZ et faciam ipsam penetrare secundum rectitudinem donec occurrat linee EG super U. Et similiter faciam, si quarta circuli super quam sunt A, B fuerit divisa in divisiones plures istis divisionibus. Linee ergo TZ, HL sunt equidistantes, quoniam taliter sunt protracte. Et linee TA, HU, BE sunt equidistantes propterea quod due divisiones TH, HB sunt equales duabus divisionibus AZ, ZL. Ergo quadratum TAUZ est equidistantium laterum. Ergo linea TZ est equalis AU. Et iterum quadratum HUEL est equidistantium laterum. Ergo linea HL est equalis UE. Ergo tota linea ED est equalis duabus lineis TZ, HL et linee erecte que est medietas diametri coniunctis.*
هذه المرّة، يقوم الطوسي بتلخيص نصّ بني موسى دون تغيير في الاستدلال. فهو يكتب "وإن ... الشكل"، بدلاً من	وإن أخرجنا د م عموداً على وتر	وإن نحن أخرجنا في هذا الشكل خطاً من ال	*Si ergo nos protraxerimus in hac figura lineam ex centro et secureit unam cordarum*

www.j4know.com

divisionum quarte circuli in duo media, sicut lineam DM, tunc secatur linea LB super duo media super punctum M in duo media. Tunc iam scietur ex eo quod narravimus in hac figura quod multiplicatio medietatis corde BL in duas cordas equidistantes diametro et in medietatem diametri coniunctas est minor multiplicatione medietatis diametri in se et maior multiplicatione linee DM in se, propterea quod triangulus DMB est similis triangulo EDB et est similis triangulo EMD. Ergo proportio linee MB ad BD est sicut proportio DB ad BE.

Et propter illud erit multiplicatio linee DB, que est medietas diametri, in se equalis rnultiplicationi linee MB in lineam BE. Verum linea BE est longior duabus cordis ZT, LH et medietate diametri coniunctis, propterea quod iste coniuncte sunt DE, et linea BE est longior DE. Ergo mulliplicatio linee MB in duas cordas ZT, LH et in medietatem diametri coniunctas est minor multiplicatione medietatis diametri in se. Et quoniam triangulus DMB est similis triangulo EMD, erit proportio BM ad MD sicut proportio MD ad ME. Et similiter erit multiplicatio linee BM in lineam ME equalis multiplicationi linee MD in se. Sed linea ME est minor duabus cordis ZT, LH et medietate diametri coniunctis, propterea quod iste omnes sunt equales linee

من أوتار ربع الدائرة بنصفين، مثل خط د م يقطع ب ل على نقطة م بنصفين، فقد نعلم مما وصفنا أن تضعيف نصف وتر ب ل بالأوتار الموازية للقطر <ونصف قطر الدائرة> مجموعةً أقلّ من تضعيف نصف القطر بمثله وأعظم من تضعيف د م بمثله، من أجل أن مثلث د م ب يشبه مثلث هـ م د ونسبة خط م ب إلى ب د كنسبة د ب إلى ب هـ.

فلذلك يكون تضعيف خط د ب الذي هو نصف القطر بمثله مثل تضعيف خط م ب بخط ب هـ. ولكن خط هـ ب أطول من وتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعة. فتضعيف خط م ب بخطوط ل ح و ز ط و ب د <مجموعة> أقلّ من تضعيف نصف القطر بمثله. ولأن مثلث د م ب يشبه مثلث د م هـ، يكون نسبة ب م إلى م د كنسبة م د إلى م هـ. ولذلك يكون تضعيف خط ب م بخط م هـ مثل تضعيف خط م د بمثله. ولأن خط م هـ

ب ل، كان سطح نصف ب ل في د هـ أصغر من مربع نصف القطر وأكثر من مربع د م، وذلك لأن مثلّثي د ب م ب هـ د متشابهان لكون زاويتي د م ب ه د ب قائمتين وزاوية ب مشتركة، فنسبة ب م إلى م د كنسبة ب د إلى د هـ. فـ ب م – أعني نصف ب ل- في د هـ مساوٍ لـ ب د في م د. و ب د في م د أصغر من مربع ب د وأعظم من مربع م د. فإذن نصف ب ل في نصف القطر وفي وتري ط ز ح ل جميعاً أصغر من مربع نصف القطر وأعظم من مربع د م.

"وإن أخرجنا ...". و يكتب "خطّا ... هـ ب د" بدلاً من "عموداً ... ب هـ د".
في الجملة الأخيرة، يتّخذ نسبة مختلفة عن النسبة التي اتخذها بنو موسى.
الصيغة اللاتينيّة تنقل النص العربي حرفيّاً مع اختلافات بسيطة. مثال على ذلك: لا وجود في النص العربي لـ "في هذا الشكل" ("in hac figura") وكذلك يظهر المثنّى "in duas cordas" جمعاً في النص العربي.
يضيف الطوسي هنا تعليلاً لتشابه المثلّثين، وهذا التعليل لا وجود له، لا في النصّ العربي ولا في النصّ اللاتيني. ولخّص بعد ذلك نصّ بني موسى، الذي بدا له أطول ممّا يلزم. أمّا جيرارد فتبع النصّ العربي خطوة خطوة. فالعبارة:
"propterea ... longior DE" التي كان عليها أن تكون ترجمة للعبارة "من أجل أن هذه جميعاً مثل د هـ وخط ب هـ أطول من د هـ"، غائبة عن النصّ العربي. ومن الصعب معرفة ما إذا كان ذلك نقصاً أم أنّه إضافة لا لزوم لها قام بها المترجم أو أحد النساخين.
والاختلاف الثاني هو التالي: وردت في النص العربي عبارة "الخطوط ل ح و ز ط و د ب"، بينما يوضِّح النصُّ اللاتيني مردّداً
"duas cordas ... diametri".
أخيراً يكتب جيرارد العبارة:
"Et similiter ..."
التي هي ترجمة لِـ "كذلك"، وهذا خطأ من النسّاخ، إذ تجب قراءتها في الواقع: "ولذلك".

www.j4know.com

DE, et linea DE est longior EM. Ergo multiplicatio MB in duas cordas ZT, LH et in medietatem diametri coniunctas est maior multiplicatione DM in se.	أصغر من وتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعة، من أجل أن هذه جميعاً مثل خط د د هـ وخط د هـ أطول / من خط م هـ، فتضعيف م ب بوتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعةً أعظم من تضعيف د م بمثله.		
Iam ergo ostensum est quod in omni circulo in quo protrahitur ipsius diametrus deinde dividitur una duarum medietatum ipsius in duo media, postea dividitur una duarum quartarum in divisiones equales quotcunque fuerit et protrahuntur ex punctis divisionum omnium corde in circulo equidistantes diametro, tunc multiplicatio medietatis corde unius sectionum quarte circuli in medietatem diametri et in omnes cordas que protracte sunt in circulo equidistantes diametro coniunctim est minor multiplicatione medietatis diametri in se et maior multiplicatione linee que egreditur ex centro et pervenit ad unam cordarum divisionum quarte circuli et dividit eam in duo media in se. Et illud est quod declarare voluimus.	فقد استبان أن ... تضعيف نصف وتر قسم من أقسام ربع الدائرة بنصف القطر وبجميع الأوتار الموازية للقطر أقلُّ من تضعيف نصف القطر بمثله وأعظمُ من تضعيف الخط الذي خرج من المركز وينتهي إلى وتر من أوتار أقسام ربع الدائرة ويقسمه بنصفين بمثله؛ وذلك ما أردنا بيانه.	فكل دائرة يخرج قطر فيها وبنصف نصفها ويقسم أحد الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ويخرج من نقط الأقسام أوتار في الدائرة موازية للقطر، كان سطح نصف وتر أحد تلك الأقسام في نصف القطر وفي جميع الأوتار أصغر من مربع نصف القطر وأعظم من مربع العمود الخارج من المركز الواقع على أحد أوتار تلك الأقسام، وذلك هو المطلوب.	يستعيد الطوسي هنا بلغته، خلاصة بني موسى، دون أن يغفل أيّاً من عناصرها. تجدر الإشارة إلى أنّه أبدل كلمة "تضعيف" بكلمة "سطح" ذات المعنى الهندسيّ. وفي هذا الاستشهاد تنقص جملة ذكر الطوسي بها ونقلها جيرارد، وهي: "كل دائرة إذا أخرج قطرها وقسم أحد نصفيها بنصفين، وقسم أحد الربعين بأقسام كم كانت، وأخرج من نقط الأقسام أوتار موازية للقطر ...". ويُحتَمل أن تكون هذه الجملة قد أُهمِلت، من قِبل الكاتب المجهول الذي أعطى الاستشهاد.
Sit itaque angulus ABG in primis minor recto. Et accipiam ex duabus lineis BA, BG duas quantitates equales, que sint quantitates BD, BE. Et revolvam super centrum B et cum rnensura longitudinis BD circulum DEL. Et extendam lineam DB usque	فلتكن الزاوية المفروضة زاوية ا ب جـ؛ ونأخذ من خطيها مقدارين متساويين وهما ب هـ ب د، وذلك بأن نتخذ نقطة ب مركزاً و	فلتكن الزاوية ا ب جـ، ولتكن أوّلاً أقلّ من قائمة. ونأخذ من خطي ب ا ب جـ مقداري ب د ب هـ متساويين. ونرسم على مركز ب	إنَّ نصّيّ الطوسي وجيرارد قريبان جدّاً من بعضهما حتى أنَّه يُخيّل إلينا أنّ الكاتب المجهول قد نقل بداية الاستشهاد بطريقة تفتقر إلى الدِّقّة. وهكذا نتحقّق، بعد قراءة الكلمات الأولى في النسخة اللاتينيّة وفي تحرير الطوسي، أنَّ الدراسة تبدأ بتناول الزاوية الحادّة. وهذه العبارة تظهر لاحقاً في الاستشهاد. من جهة أخرى. يستخدم

www.j4know.com

تحرير الطوسي عبارة كما تستخدم النسخة اللاتينية خطَّيْ الزاوية "Et accipiam … equales"، بينما نقرأ فقط في النص المذكور عبارة: "خطّيها". لكن هذه الاختلافات لا تضعف اليقين بأنّ الأمر يتعلّق بنفس النصّ.	د هـ ل، ونخرج د ب إلى ل، ونقيم ب ز عموداً على ل د، ونصل هـ ز ونخرجه إلى ح لا إلى غاية.	د ل هـ. ونخرج خط د ب إلى ل. ولتكن أوّلاً أقلّ من قائمة. ونخرج ب ز يقوم على خط د ل على زاويتين قائمتين، ونخط خط ه ز وننفذه إلى ح، ولا نجعل له غاية محدودة.	*ad L. Et protraham lineam BZ erectam super lineam LD orthogonaliter. Et lineabo lineam EZ et extendam ipsam usque ad H. Et non ponam linee ZH finem determinatum.*
يسترجع الطوسي هنا، بلغته، نص بني موسى الذي ينقله جيرارد حرفيّاً، باستثناء بعض الاختلافات التي لا تذكر. وهو يغفل عبارة واحدة فقط، في أعقاب "ad partem puncti L" ليقول "على محيط الدائرة". لنذكر بأنّ الطوسي يكتب "والزاوية ... ثلث زاوية د ب هـ" وهذا القول غائب عن الاستشهاد وعن النسخة اللاتينية. حواشي النص II: ٢ يتحرك: يحرك – ٣ لمحيط الدائرة: لخط باي / ز هـ ح: زاي – ٤ تزال تتحرك: نزال يتحرك – ٥ خط ب ز: محيط الدائرة / الذي: الذين ٦ – ز: عين.	ونفصل من ز ح ز ع مثل نصف قطر الدائرة. فإذا توهمنا أن ز ح يتحرك إلى ناحية نقطة ل ونقطةُ ز لازمة للمحيط في حركتها وخط ز هـ ح في حركته لا يزال يمر على نقطة هـ من دائرة د هـ ل، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز، وجب حينئذٍ أن تكون القوس التي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هي ثلث قوس د هـ. والزاوية التي توترها هذه القوس ثلث زاوية د ب هـ.	ونأخذ من خط ز ح مثل نصف قطر الدائرة، وهو ز ع. فإذا توهمنا أن خط ز ع يتحرك على محيط الدائرة إلى ناحية ل <و> نقطة ز لازمة لمحيط الدائرة في حركتها وخط ز هـ ح لا يزال يتحرك على نقطة هـ <من دائرة د هـ ل>، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز، حينئذ وجب أن يكون القوس الذي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هو ثلث قوس د هـ.	*Et accipiam de !inca ZH equale medietati diametri circuli, quod sit linea ZQ. Quando ergo ymaginamus quod linea ZEH movetur ad partem puncti L et punctum Z adherens est margini circuli in motu suo et linea ZH non cessat transire super punctum E circuli DEL et ymaginamus quod punctum Z non cessat moveri donec fiat punctum Q super lineam BZ, oportet tunc ut sit arcus qui est inter locum ad quem pervenit punctum Z et inter punctum L tertia arcus DE; cuius demonstratio est:*
في الجزء الأوّل من هذا المقطع، نرى أنّ الطوسي يتبع عن قرب نص بني موسى. فنرى تشابه الجملة الأولى مع جملة بني موسى، مع تغييرين لا يذكران، هما: "ليكن" بدل "أن نجعل" و"لكونه" بدل "من أجل". بعد ذلك، يصوغ الطوسي بقيّة المقطع، مع بقائه قريباً من نصّ بني موسى. وتبقى ترجمة جيرار حرفيّة. مع ذلك، نجد الجملة: "عندما تصير نقطة ع على خط ب ز: apud cursum puncti Q super lineam BZ”	برهانه: ليكن الموضع الذي انتهت إليه ز نقطة ط ، ونخرج ط هـ يقطع ب ز على س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة لكونه مساوياً لـ ز ع. ونخرج من المركز قطراً يوازي ط هـ وهو م ب ك. ونخرج د ط، فـ ط س مساو	برهان أنّا نجعل الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز عند نقطة ط، ونخرج ط هـ يقطع خط ب ز / على نقطة س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة من أجل أنه مساوٍ لخط ز ع. ونخرج من ب خطاً موازياً لخط ط س	*Quod ego ponam locum ad quem pervenit punctum Z apud cursum puncti Q super lineam BZ apud punctum T. Et protraham lineam TE secantem lineam BZ super punctum S. Ergo linea TS est equalis medietati diametri circuli, propterea quod est equalis linee ZQ. Et protraham ex B lineam equidistantem linee TS, que sit linea MBK. Et protraham*

www.j4know.com

lineam ex T ad M. Ergo linea MT et linea TS sunt equidistantes duabus lineis MB, BS et equales eis. Ergo linea MT est equidistans linee BS et equalis ei. Sed linea BS est perpendicularis super diametrum LD. Ergo corda arcus TM erigitur ex diametro LD super duos angulos rectos. Ergo dividit diametrus LD cordam MT in duo media et dividit propter illud arcum MT in duo media super punctum L. Verum arcus ML est equalis arcui DK. Ergo arcus DK est equalis medietati arcus MT. Sed arcus MT est equalis arcui EK, propterea quod linea TE equidistat linee MK. Ergo arcus DK est tertia arcus DE. Et similiter angulus DBK est tertia anguli ABG.	وهو م ك، ونخرج خطاً من ط إلى م؛ فخطا م ط ط س موازيان لخطي م ب ب س ومساويان لهما. وخط ب س عمود على قطر ل د، فوتر قوس م ط يقوم على قطر ل د على زاويتين قائمتين. فقد قسم قطرُ ل د وترَ م ط بنصفين، وقسم لذلك قوسَ م ط بنصفين على نقطة ل. ولكن قوس م ط مساوية لقوس ك هـ من أجل أن ط هـ موازٍ لخط م ك، إذاً <قوس د ك> ثلث قوس د هـ. وكذلك زاوية ك ب د ثلث زاوية هـ ب د.	وموازٍ لـ م ب، و م ط موازٍ ومساوٍ لـ ب س، و ب س عمود على ل د، فـ م ط عمود على ل د، ولذلك يكون منصفاً بالقطر، ويكون م ل مثل ل ط و د ك مثل م ل و م ط مساوٍ لـ ك هـ فـ د ك مثل نصف ك هـ و <مثل> ثلث د هـ، وزاوية ك ب د ثلث زاوية ا ب جـ؛ وذلك ما أردناه.	غائبة عن النص العربي. والجملة الثانية الغائبة عن النصّ العربي هي: "فخط م ط موازٍ ومساوٍ لخط ب س : Ergo linea MT est equidistans line BS et equalis ei” يبدو انّ هذه الإضافة تعود إلى المخطوطة المستخدمة من قِبل جيرارد أو إلى جيرارد نفسه. وأخيراً، نجد في النص اللاتيني الجملة الزائدة التالية: "ولكن قوس م ل مساوية لقوس د ك، فقوس د ك مساوية لقوس م ط " Verum ... MT"، وهي بشكل بديهيّ ناتجة عن قفزة من سطر إلى سطر بسبب تشابه الكلمات في المخطوطة التي يذكرها الكاتب المجهول؛ وتعود هذه الزيادة إلى هذا الكاتب المجهول أو إلى ناسخ مخطوطته. حواشي النص II: ١ ز: عين.

www.j4know.com

١-١-٤ عنوان كتاب بني موسى وتاريخه

لنتناول، الآن، عنوان الكتاب. لا تقدّم لنا النسخة اللاتينيّة أيّ فائدة تُذكر بهذا الخصوص، إذ إنّها تحمل، بكل بساطة، العنوان التالي:

Verba filiorum Moysi filii Sekir ...

أي "كلمات أبناء موسى بن شاكر...". والعنوان، وفقاً لتحرير الطوسي، هو: "كتاب في معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرِّيّة". ولكنَّ العنوانَ الذي يورده كُتّابُ السِّيَر القُدامى يختلف قليلاً عن هذا العنوان الأخير. ففي القرن العاشر، يعطي النديم لكتاب بني موسى العنوان التالي: "كتاب مساحة الأكر، وقسمة الزوايا بثلاثة أقسام متساوية ووضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى على قسمة واحدة". أمّا القفطي الذي كتب بعد النديم، فهو يورد قائمة كتابات بني موسى التي وضعها النديم، ثمَّ يُعطي بلا مبالاة العنوان التالي لكتاب بني موسى: "كتاب مساحة الكرة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية". وفي الواقع يعكس العنوان الذي ذكره النديم، وبالترتيب، محتوى كتاب بني موسى كما وصفوه بأنفسهم في الخلاصة التي حذفها الطوسي واحتفظت بها النسخة اللاتينيّة؛ بينما يبدو أنّ مصدر العنوان الذي وضعه الطوسي هما السطران الأوّليان من الكتاب، اللذان احتفظت بهما النسخة اللاتينيّة. فقد تحدّث بنو موسى في بداية مؤلّفهم عن "... معرفة مساحة الأشكال المُسطَّحة وحجم الأجسام"،

"*...scientie mensure figurarum superficialium et magnitudinis corporum*" .

ولكنَّ هذه الأجسام هنا، هي في أهمِّ قسم منها كرويّة. يلزمنا إذن المزيد من المعلومات لإيضاح هذه الفروق بين العنوانين، فكلٌّ منهما يوضِّح قسماً من محتويات الكتاب.

ولسنا أوفر حظّاً عندما يتعلّق الأمر بتحديد تاريخ تأليف هذا الكتاب. فالابن البكر، محمد بن موسى، تُوُفِّيَ سنة ٨٧٣ للميلاد. وكان الحسن، وهو الأخ الأصغر، قد تُوفِّيَ أوّلا. نحن نعلم فقط أنّ الكتاب كُتِب بعد ترجمة "كرويات" منالاوس وكتابَي "مساحة الدائرة" و"الكرة والأسطوانة" لأرشميدس. ولكنّنا نعلم أنّ ترجمة

www.j4know.com

"الكرويّات" قد تـمّت قبل عـام ٨٦٢ للميلاد، إذ إنّ مترجِمَها قسطا بن لوقا قدّمها للأمير أحمد الذي صار الخليفة أحمد في السنة نفسها. ولقد سبق أن بيّنا وجودَ ترجمة أولى لكتاب "مساحة الدائرة" قبل عام ٨٥٦ للميلاد[٤٤]. وليس هناك معلومة حاسمة تُتيح لنا بتقصير الفترة التي قد كُتِبَ فيها كتاب بني موسى.

أمّا بخصوص النصّ الذي نـحقّقه هنا، أيْ تحرير الطوسي لكتاب بني موسى، فنحن نعلم بواسطة الجُمَل الختامية لمجموعة كاملة من المخطوطات، أنـّه وُضع إمّا في عام ٦٥٣م/١٢٥٥هـ أو في عام ٦٥٨م/١٢٦٠هـ، تبعاً لقراءة عبارة "خنجـ" أو "خنح"، وهي عبارة كـُتبت وفق نظام الترقيم المعروف بالـ"جُمَّل" للدلالة على الأعوام[٤٥]. كَتب الطوسي هذا النصّ إذا، إمّا أربع عشرة سنة وإمّا تسع عشرة سنة قبل وفاته. وهذا التحرير وصل إلينا عِبر عدد من المخطوطات. وليس ما يدعو إلى الاستغراب في ذلك، إذ إنّ هذا التحرير كان في عداد ما سُمِّيَ بكتب "المتوسّطات"، وهي كتب موجّهة، كما سبق أن قلنا، إلى جمهور أوسع بكثير من جمهور الرياضيين من المرتبة الأولى. ولقد نالت كتبُ "المتوسّطات" هذه، حظوة كبيرة أمَّنت لها البقاء، وهذا ما لم تحظَ به دائماً أعمال البحث الأكثر تقدّماً. لذا بقي عددٌ كبير من مخطوطاتها إلى يومنا هذا؛ فاحتوت المكتبات الكبيرة - وكذلك المكتبات الأقل أهميّة- على نسخة واحدة أو عدّة نسخ من "كـُتُب المتوسّطات" هذه. ولم تَخْلُ المجموعات الخاصة من المخطوطات من بعض مخطوطات هذه "المتوسِّطات".

إنَّ تحديد أمكنة كلِّ هذه المخطوطات، في الظروف الحالية، مستحيلٌ؛ أمّا المقابلة فيما بينها كلّها فهو مطلبٌ غير معقول. لِذا، لم أستطع الحصول، من بين بضعة العشرات من مخطوطات هذا النصّ التي وقعت بين يديّ، سوى على ستّ وعشرين من نُسَخِها لأسباب مختلفة، لا مجال هنا لذكرها. ولكنّ هذا العدد الذي لا يستهان به، لا يشكّل سوى جزءٍ بسيط من عدد النسخ الموجودة في أنحاء المعمورة؛ غير أنـّنا

---

[٤٤] انظر:
R. Rashed, "Al-Kindī's Commentary on Archimedes' 'The measurement of the circle'", *Arabic Sciences and Philosophy*, 3.1 (1993), pp. 7-53.

[٤٥] نحن أمام مجموعة من خمسة أحرف تتيح قراءة تاريخين ممكنين: الاثنين ٢٧ تموز ١٢٦٠ أو الاثنين ٢٠ أيلول ١٢٥٥. وهذا التاريخ الأخير يبدو أكثر واقعيّة، إذا أخذ

www.j4know.com

نأمل أن نحقّق النصّ بكثير من الدِّقّة ، استناداً إلى هذه المخطوطات الستّ والعشرين، المبعثرة على قارّات ثلاث. ولن أخاطر إذا قلت إنّ استخدام مخطوطات إضافيّة لن يُقدِّم عناصر جديدة من شأنها تحسين التحقيق بشكل ملموس، إلا إذا تمّ العثور بالطبع على تحرير الطوسي المكتوب بيده أو على ما هو أفضل من ذلك، أي على نصّ بني موسى نفسه. ولم يكن إصراري على نقل كلّ الروايات المختلفة لهذه المخطوطات، في الحواشي، إلا من أجل مساعدة الباحثين الآخرين على الذهاب إلى أبعد ممّا وصلت إليه، عن طريق استخدام المزيد من النسخ. وحتّى لو بدا هذا الجهد غير مُجدٍ، فإنّه قد يتيح –إذا توفّرت الوسائل اللازمة والمثابرة- تحديد أمكنة كلّ المخطوطات المتواجدة وإعادة نقلها لمراجعتها ومقابلتها فيما بينها وصولاً إلى إتمام تاريخ التقليد المخطوطيّ. ولكنّ تنفيذ هذا المشروع غير ممكن الآن أو في المستقبل القريب.

وإن بدا لنا النصُّ المحقّق هنا مؤكّداً، فإنّ تاريخه لم يزل تخمينيّاً. ولقد اقتصرت محاولتنا على تصنيف المخطوطات الستّ والعشرين، ولن نعطي، نظراً إلى طبيعة هذا الكتاب، الجداولَ المُرقّمة العديدة التي أتاحت تحقيقها.

ونُقدِّم فيما يلي قائمة بهذه المخطوطات:

١- [A] إسطنبول، عاطف ١٤/١٧١٢، الأوراق ٩٧ظ-١٠٤ظ.

٢- [B] برلين: *Berlin, Staatsbibliothek, or. quart.* 1867/13، ١٥٦ظ-١٦٤ظ.

٣- [C] إسطنبول، جار الله (*Carullah*) ١٥٠٢، الورقات ٤٢ظ-٤٧ظ.[٤٦]

٤- [D] إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٣/٣٤٥٣، الأوراق ١٤٨و-١٥٢ظ.[٤٧]

٥- [E] إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٥/٣٤٥٦، الأوراق ٦١ظ-٦٤ظ.[٤٨]

[٤٦] المقصود مجموعة منقولة عن النسخة العائدة إلى عالم الفلك الشهير قطب الدين الشيرازي، كما يؤكّد الناسخ ابن محمود بن محمد محمد الكُنياني. والمخطوطة مكتوبة بالخط النسخي (كلُّ صفحة تحتوي ٢٥ سطراً وهي بقياس 25,5×17,9 سم: 17,2×11,2 سم للنص).

[٤٧] مخطوطة منسوخة بيد عبد الكافي عبد المجيد عبد الله التبريزي عام ٦٧٧ في بغداد. وهذه المخطوطة كانت عام ٨٤٨ بحوزة فتح الله التبريزي. والمخطوطة مكتوبة بالخط النسخي (الصفحة 17,1×13,2 سم؛ النص 13,9×9,6 سم). يعود ترقيم الأوراق إلى عهد قريب.

www.j4know.com

٦- [F] فيينـا:(*Vienne, Nationalbibliothek, Mixt* 1209/13)، الأوراق ١٦٣ظ-١٧٣ظ

٧- [G] لنـدن: (*Londres, India Office* 824/3, (N° 1043) 50r-52v)[٤٩]، الأوراق ٣٦و-٣٩و، ٥٠و-٥٢ظ.

٨- [H] طهران، سِپَهسالار ٢٩١٣، الأوراق٨٦ظ-٨٩ظ.

٩- [I] طهران، ملّي ملك ٣١٧٩، الأوراق ٢٥٦ظ-٢٦١ظ، ٢٦٤و-٢٦٧ظ.

١٠-[J] باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٦٧[٥٠]، الأوراق ٥٨ظ-٦٨و.

١١- [K] إسـطنبول، كوبرولـو (Koprülü) ١٤/٩٣٠، الأوراق ٢١٤ظ-٢٢٧و (أو ٢١٥ظ-٢٢٨و حسب ترقيم آخر).[٥١]

١٢- [L] إسطنبول، جـار اللــه (Carullah) ٣/١٤٧٥، الأوراق ١ظ-١٤ظ (الأوراق غير مرقّمة).

١٣- [M] مشهد، آستان قدس ٥٥٩٨، الأوراق ١٨-٣٣.[٥٢]

١٤- [N] نيويورك:

(*New York, Columbia University, Plimpton*, Or 306/13)،

الأوراق١١٦و-١٢٢ظ[٥٣]

---

[٤٨] نُسِخَ أحد نصوص هذه المجموعة في ١٢ ربيع الأوّل عام ٦٥١ (انظر الورقة ٨١ظ). والخط هوالنستعليق (الصفحة 25,5×11,3 سم؛ النص 19,4×8,9 سم). يعود ترقيم الصفحات إلى عهد قديم.

[٤٩] تحتوي هذه المخطوطة فقط على برهان الخازن للقضيّة ٧ (الورقات ٣٦و–٣٧و)، تتبعه القضيّة ٧ لبني موسى (الورقات ٣٧و–٣٩و)، والقضيّة ١٦ (الورقات ٥٠و–٥٢ظ). لنذكر وجود تفسيرات عديدة كُتبت بين السطور لأحمد بن سليمان، وهو حفيد الناسخ محمد رضا بن غُلان محمد بن أحمد بن سليمان. يعود تاريخ هذه المجموعة إلى ذي الحجة ١١٣٤ هـ. انظر:

Otto Loth,, *A catalogue of the Arabic Manuscripts in the Library of the India Office* (London, 1877), pp. 297-299.

[٥٠] راجِع:

M. Le Baron de Slane, *Catalogue des manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale* (Paris, 1883-1895).

[٥١] راجِع *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*، أعدّه د. Ramazan Şeşen و Cevat Izgi و Cemil Akpinar، وقدّمه د. إكمال الدين إحسان أوغلو، مركز البحث في التاريخ الإسلامي، فن وثقافة، ٣ مجلّدات. (اسطنبول، ١٩٨٦)، المجلّد الأوّل، ص ٤٦٣–٤٦٧. لنذكر أنّ هذا المخطوط يعود إلى الرياضي والفلكي تقي الدين بن معروف.

[٥٢] انظر أحمد ج. معاني، "فهرست كتب خطّي كتابخانة آستان قدس" (مشهد، ١٣٥٠/١٨٧٢)، المجلّد الثامن، الرقم ٤٠٣، ص. ٣٦٦–٣٦٧.

[٥٣] الكتابة بالخطّ النسخي (قياس الصفح

www.j4know.com

١٥- [O] أكسفورد: (Oxford, Bodleian Library, Marsh 709/8)[54]، الأوراق ٧٨و-٨٩ظ.

١٦- [P] إسطنبول، كوبرولو ١٤/٩٣١، الأوراق ١٢٩و-١٣٦ظ.[55]

١٧- [Q] القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ٢٦ظ-٣٣ظ.[56]

١٨- [R] طهران، مجلس شورى ٣/٢٠٩، الأوراق ٣٣-٥٤.[57]

١٩- [S] إسطنبول، سليمانيّة، أسد أفندي ٢٠٣٤، الأوراق ٤ظ-١٥ظ.[58]

٢٠- [T] طهران، مجلس شورى ٣٩١٩، الأوراق ٢٧٢-٢٩٨.

٢١- [U] طهران، دنيشكا ١٣/٢٤٣٢، الأوراق ١٢٣-١٣٧ (١٤٤ظ-١٥١ظ حسب ترقيم آخر).[59]

٢٢- [V] إسطنبول، سليمانيّة، آيا صوفيا ٢٧٦٠، الورقات ١٧٧و-١٨٣ظ.

٢٣- [W] إسطنبول، حاجي سِليم آغا ٧٤٣ (*Haci Selimaga*)، الأوراق ٧١ظ-٨١ظ.

٢٤- [X] إسطنبول، بشير آغا (*Beşiraga*) ١٤/٤٤٠، الورقات ١٦٢ظ-١٧١ظ.[60]

٢٥-[Y] كراكوفيا: (*Cracovie Biblioteka Jagiellonska*)[61]، الأوراق ١٨٣ظ-١٩٤ظ.

---

[54] راجع:
Joanne Uri, *Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium* Oxonii, 1787), p. 208.

[55] راجع *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*، المجلّد الأوّل، ص ٤٦٧-٤٧٢.

[56] لوصف هذه المخطوطة، انظر كتابنا *Géométrie et dioptrique*، ص. CXXXVI. المخطوط غير كامل وينتهي عند القضيّة ١٦. وكتابنا المذكور تُرجِم إلى العربيّة تحت عنوان "علم المناظر وانعكاس الضوء–أبو يوسف يعقوب بن اسحق الكندي". ترجمه د. نزيه المرعبي (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي) وصدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ٢٠٠٣.

[57] انظر *Catalogue des manuscrits persans et arabes de la Bibliothèque du Madjless* (قائمة المخطوطات الفارسيّة والعربيّة لمكتبة المجلِس) لـِ Y.E. Tessami (ي. أ. تسّامي)، منشورات المكتبة (طهران، ١٩٣٣)، المجلّد الثاني، ص. ١١٧-١١٨. لنذكر أنّ هذا المخطوط تنقصه الصفحات من ص. ٧٥.٢ إلى ص. ٩١.٣ أي القضيّتان ٦ و ٧.

[58] خُطَّ هذا النص بيد مختلفة عن تلك التي نسخت باقي المجموعة، كما أنّ الورق المستعمل مختلف، إنّه إذاً نصٌّ مضاف. نجد في الصفحة الأولى اسم الرياضي ابن إبراهيم الحلبي. الكتابة بالخطّ النسخي (الصفحة 22,2×12,7 سم والنص 14,3×6,2 سم).

[59] انظر *Catalogue des manuscrits de la bibliothèque centrale*، (قائمة مخطوطات المكتبة المركزيّة) جامعة طهران، المجلّد التاسع، ص ١١٠٠-١١٠١.

[60] تعود النسخة إلى بداية ذي القَعدة من العام ١١٣٤هـ. و الكتابة بخطّ "نسخي" ومتقنة جدّاً (الصفحة 28,2×15,7 سم).

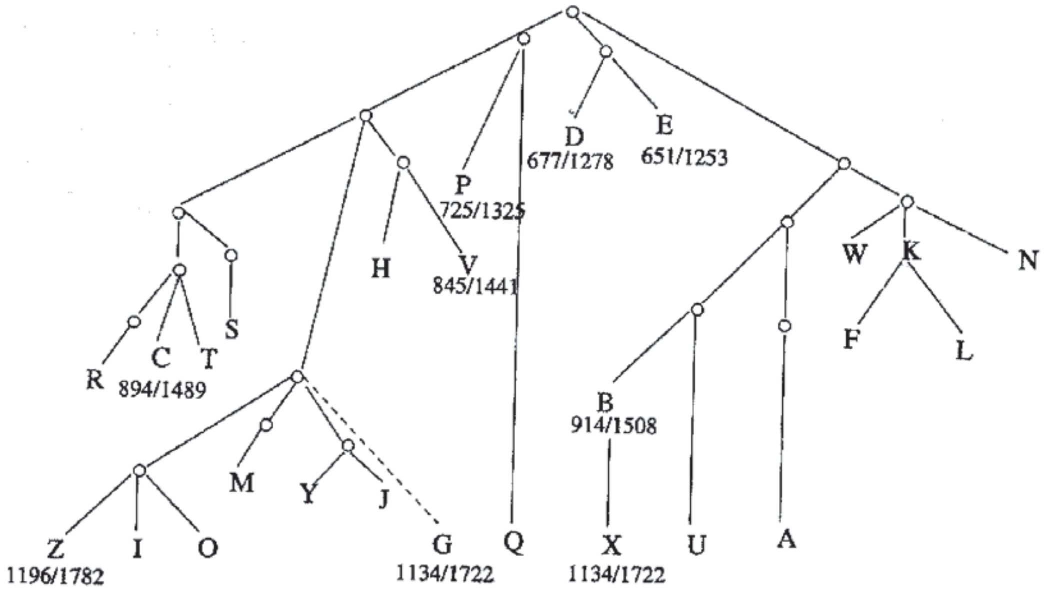
[61] تُوافق هذه المخطوطة المخطوطة التالية: MS Berlin, Staatsbibliothek, n° 5938 (= Or. fol. 258)، التي فُقدت من المكتبة عقب عمليّات الإجلاء، إبّان الحرب العالميّة الثانية. يعود الفضل في هذه المعلومة إلى د. Hars Kurio الذي نقدّم له جزيل الشكر. لوصف هذه المخطوطة، انظر W. Ahlwardt، *Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin XVII*، Handschriften 5 (Berlin, 1893)

www.j4know.com

٢٦- [Z] مانشستِر[٦٢]:

Manchester, John Rylands University Library, 350, fols 372^{v} -377^{v} (1. 4), 388^{r} (1. 4), 388^{v}-391^{r} (1. 3), 379^{r} (1.4)-380^{v} (1.4), 385^{r} (1. 3) ،385^{v}-386^{v} (1. 4), 382^{r}-385^{r} (1. 3), 380^{v}-382^{r}, 386^{v} (1.4), 387^{v}-388^{r}, 391^{r-v}

إنّ دراسة الروايات المختلفة لهذه المخطوطات أو للحوادث - الإغفالات، الإضافات، الأخطاء، الخ.- ثناءً فيما بينها، تتيح لنا رسم شجرة التسلسل المخطوطي المذكورة أعلاه لكتاب بني موسى:



---

[٦٢] ورقات هذه المخطوطة غير مرتّبة. ا ات مقلوبة.

www.j4know.com

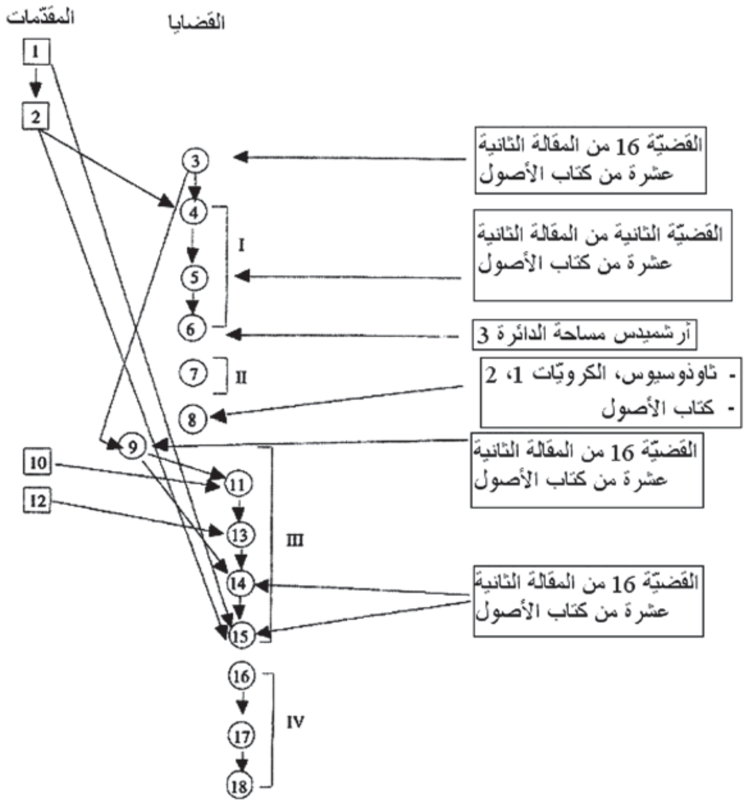
١-٢ الشرح الرياضي

١-٢-١ تنظيم كتاب بني موسى وبنيته

يدخل كتاب بني موسى، " كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرّيّة"، ضمن إطار التقليد الأرشميدي، غير أنّ تحريره يختلف عن تحرير كتاب "الكرة والأسطوانة" أو أيّ مؤلَّف آخر لأرشميدس. وصحيح أنّ الأفكار الأساسيّة فيه تعود إلى أرشميدس إلا أنّ بني موسى لم يسلكوا الطريق التي رسمها هذا الأخير، بل قاموا بالبحث عن طريق أسهل وأقصر. فيكون كتابهم، بهذا المعنى فقط، أرشميديّاً. يبقى أنّ بنية كتاب بني موسى وكذلك الطريقة التي اتّبعوها تختلفان عن البنية والطريقة الموجودتين في مؤلَّفات أرشميدس حول الموضوع نفسه. هذه الوَحْدَة في الأفكار إضافة إلى الاختلاف في البنية وفي طريقة البرهان، تميّز الوضع الخاص لهذا الكتاب الذي يُعتَبَر أحد أوائل الأبحاث الرياضيّة الأرشميديّة بالعربيّة.

لننظر أوّلاً إلى بنية هذا الكتاب. إنّه يتألّف من ١٨ قضيّة تنقسم إلى عدّة مجموعات. القضايا الثلاث الأولى مقدّمات في الهندسة المستوية؛ القضايا الثلاث التالية تتناول قياس الدائرة وحساب π؛ القضيّة السابعة تُعيد برهان صيغة إيرن الإسكندري الخاصّة بمساحة المثلّث؛ القضيّة الثامنة تبحث في وَحْدانيّة الكرة المارّة بأربعة نقاط غير موجودة في نفس السطح المستوي؛ القضايا الثلاث التالية تتناول مساحة السطح الجانبيّ لمخروط دوراني ولجذع مخروط؛ القضيّة الثانية عشرة هي مقدّمة في الهندسة المستوية؛ القضايا الثلاث التي تليها تتناول مساحة سطح الكرة وحجمها؛ وأخيراً كُرّست القضايا الثلاث الأخيرة لإيجاد متوسّطين ولتثليث الزاوية. ويمكننا تمثيل العلاقات التضمينيّة المنطقيّة لهذه القضايا بالبيان الوارد على الصفحة التالية. يظهر، إذاً، وبمجرّد نظرة إلى هذا البيان، أنّ بني موسى تناولوا في هذا الكتاب، أربعة مواضيع هي: مساحة الدائرة، ومساحة المثلّث بواسطة صيغة إيرن الإسكندري، ومساحة سطح الكرة وحجمها، ومسألة المتوسّطَين وتثليث الزاوية. لكنَّ المرءَ قد يفاجأ، للوهلة الأولى على الأقلّ، بعدم التجانس بين القضيّة السابعة من جهة والقضايا الثلاث الأخيرة من جهة أخرى. يظهر، بالإضافة إلى ذلك، عدمُ

www.j4know.com



التجانس هذا، في كلّ مرّة من خلال انقطاع في بنية الكتاب. لكنَّ هذه المفاجأة قد تتبدَّد إذا أخذنا حرفيّاً بعنوان الكتاب نفسه، أي إذا اعتبرنا هذا الكتاب "ملخَّصاً" مكرّساً لمساحة الأشكال المستوية والكرويّة، التي كانت تـُعتبَر، في ذلك العصر، أشكالاً مهمّةً أو صعبة في دراستها. مهما يكن من أمر، لا شيء يسمح بالتشكيك بصحّة نسبة هذه القضايا إلى بني موسى أو بانتمائها إلى هذا الكتاب. يؤكّد التقليد المخطوطي العربي وجود هذه القضايا ضمن هذا الكتاب، كما يؤكّد ذلك أيضاً تقليدُ الترجمة اللاتينيّة التي قام بها جيرارد دي كريمون (*Gérard de Crémone*) في القرن الثاني عشر. زيادة على ذلك، تحوي هذه الترجمة اللاتينيّة مقطعاً أخيراً، مهمّاً من الناحية التاريخيّة، يذكّر بنو موسى فيه بالنتائج الرئيسيّة التي تمّ التوصّل إليها؛ وتتطابق هذه النتائج الأخيرة مع نتائج القضايا السابقة. زد على ذلك أنّ بني موسى يختمون المقطع المذكور من النسخة اللاتينيّة، كما يختمون كتابهم، بقول في غاية الأهمّيّة:

www.j4know.com

"وكلّ ما وَصَفنا في كتابنا فإنّه من عملنا، إلاّ معرفة المحيط من القطر فإنّه من عمل أرشميدس، وإلا معرفة وضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى <الأربعة> على نسبة واحدة، فإنّه من عمل منالاوس، كما مرّ ذِكره".

يجدر بنا الآن، قبل تفحُّص تقييم بني موسى هذا لإسهامهم الخاص، تأكيد وجود القضيّة ٦ والمجموعة الأخيرة من القضايا ضمن كتاب بني موسى. أمّا وجود صيغة إيرن الإسكندري فيه، فهو أمرٌ لا تؤكّده فقط التقاليد المخطوطيّة وما كتبه بنو موسى بأنفسهم وفقاً للترجمة اللاتينيّة، بل يؤكّده أيضاً ملحقٌ غالباً ما كان يُرافق التقليد العربي المخطوطي. وذلك أنَّ هذا الملحقَ يحوي برهاناً آخر، لهذه الصيغة نفسها، منسوباً إلى أبي جعفر الخازن، من أواسط القرن العاشر الميلادي.

هكذا لم يتّخذ كتاب بني موسى أيّاً من رسائل أرشميدس نموذجاً له؛ بل إنـَّه يظهر كعمل هدفه معالجة المواضيع الأربعة المذكورة آنفاً. والآن علينا أن نرجع إلى الطريق التي سلكوها.

فهل سلك بنو موسى الطريق الذي خطّه أرشميدس، أم اختاروا طريقاً آخر حسب قولهم؟ تتيح الإجابة عن هذا السؤال تحديدَ المكان الصحيح لبني موسى في التقليد الأرشميدي. إلا أنّ هذه الإجابة تقتضي أن نستعيد، بشكل مُختصر على الأقلّ، الدراسة التي قام بها بنو موسى. فلنبدأ بالمقدّمات التي تخصُّ الهندسة المستوية وبقضايا المجموعة الأولى.

١ـ٢ـ٢ مساحة الدائرة

المقدّمة ١ ـ إذا أحاط مضلّع محيطه p بدائرة نصف قطرها r، تكون مساحته

$$S = \frac{1}{2} p.r \text{ .}$$

لتكن a_1، a_2، ...، a_n أطوال أضلاع المضلّع التي يبلغ عددها n ؛ فتكون مساحة المضلَّع مساوية لمجموع مساحات الـ n مثلّثاً، حيث يكون r ارتفاع كلّ مثلّث؛ فيكون معنا:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} a_i .r = \frac{1}{2} r.p \text{ .}$$

www.j4know.com

إذا أحاط مجسّم متعدّد السطوح مساحته S بكرة نصف قطرها r، يكون حجمه:

$$V = \frac{1}{3}S.r.$$

إذا كان للمجسّم n سطحاً مساحاتها s_1، s_2، ...، s_n على التوالي، يكون حجمُه مجموعَ أحجام الـ n هرماً، حيث يكون r ارتفاع كلّ هرم؛ فنحصل على:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} s_i .r = \frac{1}{3} r.S.$$

ملاحظة ـ يُفترض أن تكون الصيغة التي تعطي حجم الهرم معروفة، مهما كان شكل القاعدة. توجد هذه الصيغة في المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس.

المقدّمة ٢ ـ إذا أحيط مضلّع محيطه p بدائرة نصف قطرها r، تحقّق مساحته S المتباينة المزدوجة التالية: $S < \frac{1}{2} p.r <$ مساحة الدائرة.

لتكن a_1، a_2، ...، a_n أطوال أضلاع المضلّع. وليكن h_i طول العمود الخارج من مركز الدائرة إلى الضلع ذي الطول a_i، ولتكن s_i مساحة القطاع الموافق لهذا الضلع، يكون لدينا:

$$\frac{1}{2} a_i h_i < \frac{1}{2} a_i r < s_i ،$$

ومنها

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i < \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} s_i ،$$

وهي النتيجة المطلوبة.

وكذلك، إذا أحيط مجسّم متعدّد السطوح له n سطحاً مساحته الإجماليّة S، بكرة نصف قطرها r، يكون: حجم المجسّم $< \frac{1}{3} S.r <$ حجم الكرة.

ويبرهن بنو موسى بعد ذلك القضيّة التالية:

القضيّة ٣ ـ لتكن دائرة محيطها p ولتكن قطعة من خطّ مستقيم طولها l. تكون لدينا حالتان:

أوّلاً: إذا كان $l < p$، يُمكننا رسم مضلّع، محيطه p_n، تحيط به الدائرة بحيث يكون

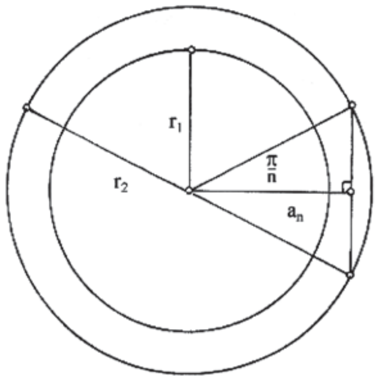
$$l < p_n < p ؛$$

www.j4know.com

ثانياً: إذا كان $p > l$، يُمكننا إحاطة الدائرة بمضلّع، محيطه q_n، بحيث يكون $p < q_n < l$.

يستند برهانا الحالتين على وجود دائرة، محيطها l معلوم، وعلى وجود مضلَّع متساوي الأضلاع. يسلِّم بنو موسى بوجود هذه الدائرة. وفيما يخص المضلَّع ، فإنـّهم يستخدمون القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "أصول" لأقليدس التي تقول: "لتكن لدينا دائرتان متراكزتان؛ ارسُمْ في الدائرة الكبرى مضلّعاً تكون أضلاعه متساوية الطول ويكون عددها مزدوجاً ولا تلامِس الدائرة الصغرى".[٦٣]
يمكننا على كلّ حال أن نلاحظ أنـّه يلزم ويكفي، للحصول على مضلّع متساوي الأضلاع له n ضلعاً ويكون حلّاً للمسألة، أن يحقّق عامده* a_n ما يلي

$$r_1 < a_n < r_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2 \cos\frac{\pi}{n} < r_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} < \cos\frac{\pi}{n} < 1$$ ،



حيث يُشير r_1 و r_2 إلى نصف قطرَي الدائرتين المتراكزتين على التوالي، و p_1 و p_2 إلى محيطهما على التوالي (وجود العدد الصحيح n يتعلّق باتّصال دالّة جيب التمام).

لنأت الآن إلى برهان بني موسى. إنـّهم يتناولون دائرتين متراكزتين ABC و DEG (انظر الشكل، ص. ٩١).

---

[٦٣] انظر "أعمال أقليدس" (*Les Œuvres d'Euclide*)، ترجمة ف. بِيْرار (F. Peyrard) إلى الفرنسيّة (باريس، ١٩٦٦)، ص. ٤٧٠-٤٧١.

* أي العمود الخارج من مركز الدائرة إلى

www.j4know.com

الحالة الأولى: $l < p$، نفترض أنّ p محيط ABC و l محيط DEG

الحالة الثانية: $l > p$، نفترض أنّ l محيط ABC و p محيط DEG.

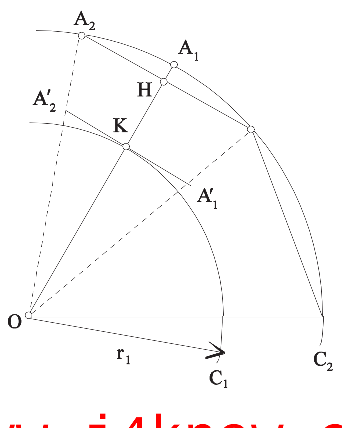
في الحالتين، تكون الدائرة ABC أعظم من الدائرة DEG، وكلّ مضلّعٍ، أكان متساويَ الأضلاع أم لا، محاطٍ بالدائرة ABC بدون أن تلامس أضلاعه الدائرة DEG، يكون محيطه محصوراً بين l و p.

غير أنّه يجب ، للإجابة التامة عن النصف الثاني من المسألة في الحالة $l > p$، أن يؤخذ مضلّعٌ يحيط بالدائرة المعلومة وهي DEG ومحيطها p، بحيث لا تقطع أضلاعه الدائرة ABC؛ وهذا ما يتحقّق باستخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، بالإضافة إلى تحاكٍ معيَّن.

في الواقع، يأخذ بنو موسى في القضيّة ٣، الدائرة C_1 ومحيطها p ويسلّمون بوجود الدائرة C_2 ذات المحيط المعلوم l. وبعد ذلك يتناولون الحالتين التاليتين:

أ) $l < p$. C_2 و C_1 متراكزتان، و C_2 داخل C_1. نريد "رسم" المضلّع P_n ذي المحيط p_n والمحاط بالدائرة C_1 بحيث يكون $l < p_n < p$. يكون المضلّع P_n، المحدّد في القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس والذي يكون P_n محاطاً بـ C_1 دون أن يلامس C_2، حلاً لهذه المسألة.

ب) $l > p$. C_1 داخل C_2. نستطيع أن نرسم، وفقاً للقضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، المضلّع P_n المحاط بِـ C_2 والذي لا يلامس C_1 بحيث يكون : $p < p_n < l$؛ وإذا أردنا إحاطة C_1 بالمضلّع P_n' ذي المحيط p_n'



www.j4know.com

بحيث يكون $p < p'_n < l$، نستخرج P'_n من P_n بواسطة تحاكٍ، كما يلي:

ليكن $OH = a_1$ عامد المضلّع P_n، فيكون لدينا: $r_1 < OH < r_2$. لنأخذ التحاكي $\left(O, \frac{r_1}{a_1}\right)$،

(أي الذي مركزه نقطة O، ونسبته $\frac{r_1}{a_1}$)، فنحصل على P'_n، صورة P_n، بحيث يكون

$p < p'_n < p_n < l$. فيكون المضلّع P'_n حلاً لهذه المسألة: فهو "يحيط بـ" C_1 ولا يلامس

C_2 (أنظر الشكل)؛ أي أنّ بني موسى، بعد استخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية

عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، أكملوا عملهم بتطبيق التحاكي.

يُبرهن بنو موسى، في القضيّة التالية، مستخدمين طريقة البرهان بالخُلف، العبارة التي تعطي مساحة الدائرة: "كلّ دائرة فسطح نصف قطرها في نصف محيطها هو مساحتها".

القضيّة ٤ـ كلُّ دائرة نصف قطرها r ومحيطها p، تكون مساحتها

$S = \frac{1}{2} p.r$. [الشكل، ص. ٩٢]

إذا كان $S < \frac{1}{2} p.r$، يكون $S = \frac{1}{2} l.r$ مع $l < p$، ويمكن أن نرسم مضلّعاً تحيط به الدائرة ويكون محيطه p' بحيث يكون $l < p' < p$ (حسب القضيّة السابقة). وحسب القضيّة ٢، تكون S_1، مساحة هذا المضلّع، بحيث يكون $S_1 < \frac{1}{2} p'.r < S$.

غير أنّ $l < p'$، فيكون $\frac{1}{2} l.r < \frac{1}{2} p'.r$، أي $S < \frac{1}{2} p'.r$، وهذا مخالف لما فرضنا.

إذا كان $S > \frac{1}{2} p.r$، يكون $S = \frac{1}{2} l.r$ مع $l > p$. يمكننا إحاطة الدائرة بمضلّع محيطه p'' بحيث يكون $p < p'' < l$. يكون لدينا إذاً $\frac{1}{2} r.l > \frac{1}{2} r.p''$؛ وهذا خلاف لما فرضنا، لأنّ $\frac{1}{2} r.p''$ هي مساحة المضلّع وهذه المساحة أكبر من $S = \frac{1}{2} l.r$ التي هي مساحة الدائرة.

www.j4know.com

يمكننا أن نلاحظ أنّ بني موسى لم يعطوا مساحة الدائرة، مقارنة بمساحة شكل آخر، كالمثلّث القائم الزاوية الذي يكون طول أحد ضلعَي الزاوية القائمة فيه مساوياً لنصف القطر ويكون طول الضلع الآخر مساوياً لمحيط الدائرة، وفقاً لتعبير أرشميدس؛ ولكنّهم أعطوا هذه المساحة كحاصل ضرب مقدارين. ومن جهة أخرى، فإنـّهم، في برهان القضيّة السابقة، يقارنون p بـِ p'، $p' < p$ و p بـِ p''، $p'' > p$، أي أنـّهم يقارنون بين أطوال وليس بين مساحات، كما هو الحال عند أرشميدس، للوصول في كلِّ مرّة إلى تناقض. أخيراً، يختلف مسعاهم عن مسعى أرشميدس الذي طبّق طريقة الاستنفاد. يتفادى بنو موسى المرحلة الأكثر دقّة في هذه الطريقة[٦٤]، وهي "المرور إلى الحدّ" عندما يسعى n إلى ما لا نهاية – بِلُغتنا نحن– بفضل القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، والتي قام برهانها على هذا المرور إلى الحدّ: ($\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1$).

يعطي بنو موسى، في نهاية القضيّة السابقة، مساحة القطاع الدائري، دون الإشارة إلى البرهان. وقد تكون طريقتهم مشابهة لتلك التي وردت في القضيّة ٤ نفسها، عبر رسم قطاع مضلّع محاط بالقطاع الدائري؛ وقد تستند طريقتهم على أنَّ p'، وهو طول قوس الدائرة، متناسب مع الزاوية المركزيّة α وأنّ مساحة القطاع S' تتناسب مع الزاوية المركزيّة. فإذا كان كلٌّ من S و p مساحة الدائرة ومحيطها على التوالي، و S' و p' مساحة القطاع وطول قوسه، يكون $\frac{S}{S'} = \frac{p}{p'} = \frac{360}{\alpha}$ (حيث تقاس α بالدرجات)؛

وبما أنّ $S = \frac{1}{2}p.r$، يكون $S' = \frac{1}{2}p'.r$.

يريد بنو موسى، في القضيّة التالية، التأكّد من خاصيّة مهمّة:

القضيّة ٥ـ نسبة القطر إلى المحيط هي ذاتها في كلِّ دائرة.[الشكل، ص.٩٤]

يستند بنو موسى على القضيّة ٢، من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"، التي تقول: "إنّ نسبة مساحتي دائرتين تساوي نسبة مربّعَي نصفَي قطرَيْهما".

[٦٤] انظر مقال ج. الدبّاغ، "بنو موسى".

www.j4know.com

الاستدلال بالخُلف لا يفرض نفسه إذاً، لأنّ القضيّة السابقة بيّنت أنّ $S = \frac{1}{2} p.r$. مع ذلك، يستخدم بنو موسى البرهان بالخُلف.

وينتقلون بعدها، في القضيّة ٦، إلى حساب هذه النسبة بواسطة طريقة أرشميدس كما أكّدوا سابقاً. في الواقع، تتيح هذه الطريقة الحصولَ على حدٍّ أدنى وحدٍّ أعلى لهذه النسبة، وفقاً للتقريب المطلوب، مهما بلغت قيمة هذا التقريب.

يُتْبِع بنو موسى هذه المجموعة المؤلّفة من ست قضايا بقضيّتين معزولتين، قبل العودة إلى مجموعة أخرى مهمّة حول الكرة. أولى هاتين القضيّتين هي صيغة إيرن الإسكندري.

١-٢-٣ مساحة المثلّث: صيغة إيرن

القضيّة ٧- إذا كان p محيط مثلّث طول أضلاعه a و b و c، تتحقّق مساحة هذا المثلّث الصيغة التالية:

$$S^2 = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right).$$ [الشكل، ص. ١٠٠]

ومع ذلك، لا يذكر بنو موسى لا اسم إيرن ولا أيّ اسم آخر. وينسب رياضيّون متأخّرون كالبيروني هذه الصيغة إلى أرشميدس[٦٥]. يُثبت بنو موسى هذه الصيغة ببرهان مختلف عن برهان إيرن؛ ولقد اقتبس هذا البرهان العديد به من خلفائهم مثل فيبوناتشي (*Fibonacci*) ولوقا باتشولي (*Luca Pacioli*) وغيرهم[٦٦]. لكنَّ هذا البرهان لم يلقَ قبولاً لدى البعض الآخر من خلفائهم كالخازن الذي أعطى برهاناً آخر، كما سبق وقلنا، وهو البرهان الذي ورد في أغلب الأحيان في نهاية كتاب بني موسى؛ وهذا ما فعله الشّنّي فيما بعد[٦٧].

---

[٦٥] البيروني، "استخراج الأوتار في الدائرة"، طبعة أحمد سعيد الدمرداش (القاهرة، بدون تاريخ)، صفحة ١٠٤.

[٦٦] انظر: م. كلاجيت، "أرشميدس في القرون الوسطى" : M. Clagett, Archimedes in the Middle Ages، الملحق الرابع، ص. ٦٣٥-٦٤٠.

[٦٧] أورد البيروني هذا البرهان في رسالته

www.j4know.com

القضيّة ٨ـ إذا كانت النقطة G متساوية البعد عن أربع نقاط من كرة معلومة، على أن لا تقع النقاط الأربع في نفس المستوي، تكون G مركز هذه الكرة.

تعود هذه القضيّة إلى برهان وحدانيّة الكرة التي تمر بأربع نقاط لا تقع في نفس المستوي. يستند بنو موسى، في برهان هذه القضيّة، إلى "الأصول" وإلى القضيّتين الأولى والثانية من "كرويّات" ثاوذوسيوس ("كتاب الأكر")، في ترجمة قسطا بن لوقا[٦٨]. لنلاحظ أنَّ فرضيّة وجود النقطة G داخل الكرة، لا تدخل في برهانهم. يمكننا تلخيص هذا البرهان على الشكل التالي.

لتكن B، C، D و E النقاط الأربع غير الموجودة على نفس المستوي. المستوي $(B,\ C,\ E)$ يقطع الكرة وفق دائرة يمرُّ محورها بمركز الكرة وبالنقطة G إذ أنّ $GB = GC = GE$. [انظر الشكل، ص.١٠٣]

كذلك، يمرّ محور الدائرة (ECD) بمركز الكرة وبالنقطة G. هذان المحوران مختلفان، ليس لهما سوى نقطة واحدة مشتركة هي مركز الكرة؛ إذاً G هي مركز الكرة.

١ـ٢ـ٤ مساحة سطح الكرة وحجمها

المجموعة التالية المؤلّفة من سبع قضايا، هي المجموعة المركزيّة في كتاب بني موسى. الهدف من هذه القضايا هو التوصّل إلى تحديد مساحة سطح الكرة وحجمها. نُذَكّر بأنّنا لاحظنا، فيما يخص مساحة الدائرة، بعض الفروق بين طريقة أرشميدس وطريقة بني موسى. فهل سلك بني موسى طريقهم هذا بشكل متعمّد، أم لأسباب ظرفيّة؟ بتعبيرٍ آخر، هل سنجد الفروق عينها مع طريقة أرشميدس في حالة الكرة؟ للإجابة عن هذا السؤال، نتناول ثانية هذه المجموعة من القضايا.

القضيّة ٩ـ مساحة السطح الجانبيّ S لمخروط دوراني هي $S = \frac{1}{2} p.l$، حيث يرمز p إلى محيط دائرة القاعدة و l إلى طول الخطّ المولّد. [الشكل، ص. ١٠٤]

---

[٦٨] انظر تحرير الطوسي لترجمة قسطا بن لوقا لِـ"كتاب الأكر" لِثاوذوسيوس، طبعة مكتب المنشورات العثمانيّة الشرقيّة (حيدر أباد ١٣٥٨/١٩٣٩).

www.j4know.com

ليكن المخروط $(A,\ BCD)$، ذو الرأس A، والقاعدة BCD، والمحور AE والخطّ المولّد $AB=l$. تكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان $S>\frac{1}{2}p.l$، يكون $S=\frac{1}{2}p'.l$ مع $p'>p$.

نحيط الدائرة BCD بمضلّع متساوي الأضلاع يكون محيطه p_1 محقّقاً لـِ $p'>p_1>p$، وهذا ممكن بموجب القضيّة ٣. ينتج من ذلك هرمٌ رأسه A يحيط بالمخروط وقاعدته ذلك المضلّع. ولكن، لدينا

$AE\perp(HIK)$ و $EB\perp HI$،

فيكون $AB\perp HI$. وكذلك $AC\perp IK$ و $AD\perp HK$.

فتكون مساحة السطح الجانبيّ للهرم $\frac{1}{2}p_1.l$ مع $\frac{1}{2}p_1.l<\frac{1}{2}p'.l$. غير أنّ $S=\frac{1}{2}p'.l$؛ وهذا مخالف لما فرضنا.

الحالة الثانية: $S<\frac{1}{2}p.l$. يسلّم بنو موسى عندها بوجود مخروط دوراني رأسه A، محوره AE ومساحة سطحه الجانبيّ S'، بحيث يكون $S'=\frac{1}{2}p.l>S$. لتكن الدائرة ML قاعدة هذا المخروط، فيكون $AM>AB$ و $EM>EB$.

نرسم مضلّعاً متساوي الأضلاع محاطاً بالدائرة ML بدون أن يلامس الدائرة ABC؛ وليكن p_1 محيطه، $p_1>p$. فنستخرج من ذلك هرماً منتظماً، قاعدته متساوية الأضلاع ومساحة سطحه الجانبيّ $S_1=\frac{1}{2}p_1.AN$، إذا كانت النقطة N منتصف أحد أضلاع المضلّع. لكن $AN>AB$، فيكون $S_1>\frac{1}{2}p.l$، وبالتالي $S_1>S'$؛ وهذا مخالف للفرض، لأنّ المخروط، الذي تساوي مساحة سطحه الجانبيّ S'، يحيط بالهرم الذي تساوي مساحة سطحه الجانبيّ S_1.

ومن استحالة الحالتين الأولى والثانية نحصل على النتيجة.

www.j4know.com

يستخدم بنو موسى، مرّتين على التوالي، فيما يخص السطوح المحدّبة، مصادرة مثيلة لمصادرة أرشميدس الخاصّة بالمنحنيات المحدّبة (أنظر كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، المصادرة الثانية).

ويُدخِل بنو موسى، بعد ذلك، مقدّمة تقنيّة:

المقدّمة ١٠ـ تقاطع السطح الجانبيّ لمخروط دوراني ولمستوٍ موازٍ للقاعدة يكون دائرةً مركزُها على محور المخروط. [الشكل، ص.١٠٦]

لنذكر أنّ المستويين المتوازيين متحاكيان بالتحاكي $\left(A,\frac{AH}{AE}\right)$؛ فالشكل IGH يحاكي إذاً الدائرة ذات المركز E، فهو بالتالي دائرة مركزها H. لكن استدلال بني موسى لا يُدخِل التحويل لذاته.

القضيّة ١١ـ مساحة السطح الجانبيّ لجذع مخروط دوراني قائم، ذي قاعدتين متوازيتين، هي $S=\frac{1}{2}(p_1+p_2)l$، حيث يكون p_1 و p_2 محيطَي القاعدتين على التوالي و يكون l طول الخطّ المولّد. [الشكل، ص.١٠٧]

يكون لدينا: مساحة $\frac{1}{2}AF.p_1=S_1=(A,GIF)$ و مساحة $\frac{1}{2}AB.p_2=S_2=(A,BCD)$،

فتكون مساحة جذع المخروط: $S=\frac{1}{2}(AF.p_1-AB.p_2)=\frac{1}{2}(p_1-p_2)AB+\frac{1}{2}BF.p_1$.

لكنّ لدينا: $\frac{BF}{p_1-p_2}=\frac{AF}{p_1}=\frac{AB}{p_2}$، فيكون $AB\,(p_1-p_2)=BF.p_2$،

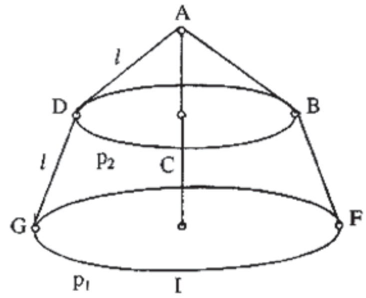
ونستنتج $S=\frac{1}{2}BF\,(p_1+p_2)$؛ لكنَّ الخطّ BF هو مولّد جذع المخروط، أي $BF=l$؛ فنكون قد حصلنا على النتيجة المطلوبة.

بعد ذلك يستنتج بنو موسى مساحة المجسّم الدوراني المؤلَّف من جذع مخروط ومن مخروط لهما قاعدة مشتركة ونفس الطول l لمولّديهما:

$$S=\frac{1}{2}l\,(p_1+p_2)+\frac{1}{2}lp_2=\frac{1}{2}lp_1+lp_2$$

www.j4know.com

حيث يكون p_1 و p_2 محيطي القاعدتين.



بعد ذلك، يعمّم بنو موسى النتيجة السابقة على المجسّم الدوراني المؤلّف من أيّ عدد من جذوع المخروطات ومن مخروط عندما يكون لمولّديها كلّها نفس الطول:

$$S=\frac{1}{2}l\sum_{k=2}^{n}(p_{k-1}+p_k)+\frac{1}{2}lp_n=\frac{1}{2}l\left(p_1+2\sum_{k=2}^{n}p_k\right)=\pi l\left(r_1+2\sum_{k=2}^{n}r_k\right).$$

ويُدخِل بنو موسى مقدّمة أخرى في الهندسة المستوية:

المقدّمة ١٢ ـ ليكن معنا دائرة مركزها D، وقطرها AC، وليكن DB نصفَ قطر بحيث يكون $DB\perp AC$، [الشكل، ص. ١٠٩]؛ إذا افترضنا $\widehat{BL}=\widehat{LG}=\widehat{GA}$ و $HL\,//\,AC$، $GI\,//\,AC$، $DM\perp BL$، $BL\cap AC=\{E\}$، يكون معنا عندئذ:

ا) $DE=DA+IG+HL$ وَ ٢) $DA^2>\frac{1}{2}BL(DA+IG+HL)>DM^2$.

إنّ القوسين $\widehat{LG}$ و $\widehat{HI}$ متساويتان وكذلك تكون القوسان $\widehat{BL}$ و $\widehat{BH}$ متساويتين، بسبب التناظر بالنسبة إلى DB؛ لذا يتساوى القوسان $\widehat{LG}$ و $\widehat{BH}$، ونستنتج أنّ $BL\,//\,GH$.

وكذلك، فإنّ $\widehat{AG}=\widehat{IH}$ فيكون $GH\,//\,AI$. فإذا قطعت HG الخطّ DE على النقطة F، يكون لدينا $HL=FE$ و $IG=AF$، فنحصل إذاً على العلاقة ١).

المثلّثان BMD و BDE متشابهان، فيكون $\frac{BD}{DE}=\frac{BM}{MD}$، وبالتالي $BM.DE=MD.BD$. لكنَّ $MD<BD$، فيكون $MD^2<MD.BD<BD^2$، ويكون بالتالي $MD^2<\frac{1}{2}BL.DE<DA^2$، فنحصل إذاً على ٢).

www.j4know.com

إلاّ أنّ النتيجة التي حصلنا عليها في حالة ثلاثة أقواس متساوية $\widehat{GA}$، $\widehat{LG}$ و $\widehat{BL}$ تشمل الحالة العامّة التي نتناول فيها أيَّ عدد من الأقواس المتساوية. لنتناول ثانية هذه المقدّمة في الحالة العامّة ولنكتشف ما يكمن فيها من أفكار في حساب المثلّثات.

إذا قسّمنا ربع الدائرة A_1B إلى n قوساً متساوية بواسطة النقاط A_2، A_3، ...، A_n، يكون معنا عندئذ

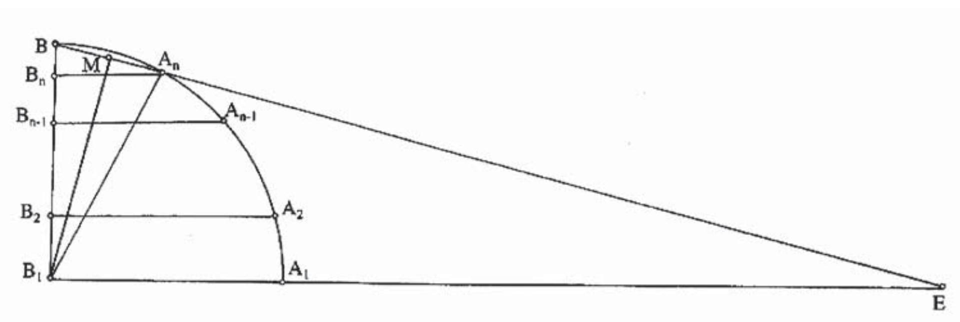
١) $A_1B_1 + 2\sum_{k=2}^{n} A_kB_k = B_1E$؛

٢) $B_1M^2 < \frac{1}{2}BA_n\left[B_1A_1 + 2\sum_{k=2}^{n} B_kA_k\right] < B_1B^2$. (أنظر الشكل، ص. ١٠٩)

يكون لدينا: $\widehat{BA_n} = \frac{\pi}{2n}$، $\widehat{BA_{n-1}} = 2.\frac{\pi}{2n}$، ...، $\widehat{BA_2} = (n-1)\frac{\pi}{2n}$،

فيكون إذاً

$A_nB_n = R\sin\frac{\pi}{2n}$، $A_{n-1}B_{n-1} = R\sin 2.\frac{\pi}{2n}$، ...، $A_2B_2 = R\sin(n-1)\frac{\pi}{2n}$.



ليكن $B_1M \perp BA_n$؛ يكون معنا $\widehat{BB_1M} = \frac{\pi}{4n} = \widehat{B_1EB}$، فيكون إذاً $B_1E = R\cot g\frac{\pi}{4n}$.

لنضع $R = 1$، عندئذ تُكتب العلاقةَ ١) على الشكل التالي:

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\sin k.\frac{\pi}{2n} = \cot g\frac{\pi}{4n} - 1 \qquad (١)$$

فيُمكننا كتابتها (بإضافة 2 إلى كلِّ طَرَفٍ من طرفيها) كما يلي:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k.\frac{\pi}{2n} = \cot g\frac{\pi}{4n} + 1\text{،} \qquad (٢)$$

ويمكننا التحقّق من هذه العلاقة بضرب كلٍّ من الطرفين بـِ $\sin\frac{\pi}{4n}$.

www.j4know.com

في العلاقة َ٢)، لدينا: $B_1M = R\cos\frac{\pi}{4n}$ و $\frac{1}{2}BA_n = BM = R\sin\frac{\pi}{4n}$.

لنضع $R = 1$؛ عندئذ تُكتب العلاقة َ٢) على الشكل التالي:

$$\cos^2\frac{\pi}{4n} < \sin\frac{\pi}{4n}.\cot g\frac{\pi}{4n} < 1 \qquad (٣)$$

أي $\cos^2\frac{\pi}{4n} < \cos\frac{\pi}{4n} < 1$،

وهذه العلاقة تتحقّق مهما كان n، لأنّ لدينا $\cos^2\alpha < \cos\alpha < 1$، لكلّ α مع $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. يمكننا إذاً أن نعطي لـِ n، قيمة كبيرة بشكل اختياريّ، ممّا يتيح البدء بتطبيق طريقة الاستدلال بالخُلْف. بتعبيرٍ عصري، يعود هذا العمل إلى حساب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$. ولكن تجدر الإشارة إلى أنّ بني موسى عملوا بطريقة مختلفة.

ستدخل هذه المجاميع، بالتحديد، وكذلك هذه المتباينات في حساب مساحة الكرة وحجمها.

القضيّة ١٣ ـ يأخذ بنو موسى، في القضيّة ١٣، نصف دائرة ABD مركزها M، ونصف قطرها R_2 [الشكل، ص.١١١]؛ هذا ويُرْسَم خطٌّ مضلّعٌ متساوي الأضلاع محاطٌ بنصف الدائرة وله عددٌ مزدوجٌ من الأضلاع. ثمّ يُرسَم في هذا الخط نصف الدائرة المحاطة به. وبواسطة الدوران، نولّد نصف كرة ومجسّماً دورانياً مؤلّفاً من مخروط ومن عدّة جذوع مخروطيّة، وأخيراً نصف كرة أخرى محاطة بالمجسّم الدورانيّ، ولها نفس المركز الذي لنصف الكرة الأولى. يبرهن بنو موسى أنّ

$$2\pi R_1^2 < S < 2\pi R_2^2؛$$

حيث R_1 و R_2 هما على التوالي، نصفا قطرَي الدائرة المحاطة والدائرة المحيطة، و S هي مساحة السطح الجانبيّ للمجسّم.

لنذكر أنّ هذا المجسّم يحقّق شروط القضيّة ١١، وأنّ الفرضيّات المتعلّقة بالشكل المستوي ضمن المستوي ABD هي ذاتها فرضيّات القضيّة ١٢، يكون لدينا إذاً:

www.j4know.com

(١) $\frac{1}{2}BE\left(MB+HE+GF\right)<MB^{2}$

وبناءً على القضيّة ١١ يكون

(٢) $S=\pi EB\left(MB+HE+GF\right)$؛

نحصل من (١) و (٢) على $S<2\pi MB^{2}=2\pi R_{2}^{2}$.

وإذا كانت النقاط S و O و P منصِّفات الأوتار BE و EF و FD، يكون

$MS=MO=MP=MU=R_{1}$ (نصف قطر الكرة المحاطة)،

وبحسب المقدّمة ١٢، لدينا

(٣) $MS^{2}<\frac{1}{2}BE\left(MB+HE+GF\right)$.

ومن (٢) و (٣) نحصل على $S>2\pi MS^{2}=2\pi R_{1}^{2}$، وبهذا نحصل على النتيجة المطلوبة.

بعبارات أخرى: ليكن لدينا نصف الدائرة $C\left(M,R_{2}\right)$، وخطٌّ مضلّعٌ متساوي الأضلاع له $2n$ ضلعاً محاطٌ بـِ C، ونصف الدائرة $C'\left(M,R_{1}\right)$ المحاطة بالخط المضلّع. من هذه المعطيات، يستخرج بنو موسى:

- نصف الكرة $\Sigma\left(M,R_{2}\right)$،
- المجسّم Γ المؤلّف من مخروط ومن جذوع مخروطات "محاطة" بـِ Σ والذي يحقّق شروط القضيّة ١١،
- نصف الكرة $\Sigma'\left(M,R_{1}\right)$ المحاطة بهذا المجسّم،

ويبرهنون المتباينة المزدوجة $2\pi R_{1}^{2}<S<2\pi R_{2}^{2}$، حيث يكون S مساحة السطح الجانبيّ للمجسّم Γ. وهم ويستخدمون لأجل ذلك القضيّتين ١١ و ١٢ بدون استخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول".

وهكذا يمكن لبني موسى الآن تطبيق طريقة الاستدلال بالخلف مرّتين: الأولى في القضيّة ١٤ للحصول على مساحة سطح نصف الكرة، المساوية لـِ "ضعف <مساحة> سطح الدائرة العظيمة" كما يقولون، والثانية لاستخراج حجم الكرة

www.j4know.com

"الحاصل من ضرب نصف قطرها في ثلث <مساحة> السطح المحيط بها". لنتناول ثانية برهان بني موسى.

القضيّة ١٤ـ مساحة سطح نصف الكرة هي ضعف مساحة دائرتها العظمى.

لتكن s مساحة الدائرة ABC و S مساحة نصف الكرة $\Sigma = ABCD$ [الشكل ص.١١٤]. لدينا حالتان:

أ) $S > 2s$. يكون معنا في هذه الحالة $S_1 = 2s$، و $S_1 < S$. يسلّم بنو موسى في الواقع بوجود نصف كرة $\Sigma_1 = EHIK$، تقع داخل Σ ويكون لها نفس المركز وتكون مساحتها S_1.

يأخذ بنو موسى، عندئذ ، كما حصل في القضيّة ١٣، مجسّماً Γ "محاطاً" بـِ Σ، مؤلّفاً من مخروط ومن جذوع من مخروطات، لا يلامس سطح هذا المجسّم Σ_1. يتمُ الحصول على مثل هذا المجسّم انطلاقاً من خطّ مضلّع متساوي الأضلاع "محاط" بنصف الدائرة العظمى من الكرة Σ ولا يلامس نصف الدائرة الكبرى C_1 من الكرة Σ_1؛ أي أنـّهم ينطلقون من القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس وليس من القضيّة ١٧ من نفس المقالة من "الأصول"، كما أكّد البعض.

ب) $S < 2s$. يكون معنا في هذه الحالة $S_2 = 2s$، فيكون $S_2 > S$. يأخذ بنو موسى الكرة Σ_2 ومساحتها S_2 ، بحيث تقع خارج Σ، ويأخذون أيضاً مجسّماً Γ' محاطاً بـِ Σ_2 ولا يلامس الكرة Σ، يحصلون عليه انطلاقاً من القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول".

في الحالتين أ) و ب)، وباستخدام المتباينتين المبرهنتين في القضيّة ١٣، نصل إلى الاستحالة. فنحصل على مساحة سطح نصف الكرة $S = 2s = 2\pi R^2$.

القضيّة ١٥ـ حجم الكرة Σ، التي يكون R نصف قطرها و S مساحة سطحها هو

$$V = \frac{1}{3} R.S = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

www.j4know.com

لتكن $ABCD$ الكرة المعلومة [الشكل، ص.١١٥]. تكون لدينا حالتان:

• الحالـة الأولـى: $\frac{1}{3}R.S < V$؛ فـي هـذه الحالـة يسلّم بنـو موسـى بوجـود كـرة $\Sigma_1 = FGLM$، لها نفس المركز ومساحتها S_1 بحيث يكون $\frac{1}{3}R.S_1 = V$، مع $S_1 > S$، أيْ بحيث تكون Σ داخل هذه الكرة Σ_1. ثمّ يأخذون متعدّد سطوح يحيط بِـ Σ ولا يلامس Σ_1 ثـمَّ يستخدمون المقدّمـة ١. إذا كـان S_2 و V_2 مساحة سطح هذا المجسّم وحجمه على التوالي، يكون لدينا وفق المقدّمة ١: $V_2 = \frac{1}{3}R.S_2$. يكون لدينا $S_2 < S_1$، فيكون $V_2 < V$؛ وهذا مستحيل لأنّ المجسّم ذا الحجم V_2 يحيط بالكرة ذات الحجم V.

• الحالـة الثانيـة: $\frac{1}{3}R.S > V$؛ يأخذ بنو موسى في هذه الحالـة كرة لها نفس المركـز، وهـي $\Sigma_1' = EHIK$، أصـغر مـن $ABCD$، مسـاحتها S_1' وبحيـث يكـون $V = \frac{1}{3}R.S_1'$. بعد ذلك، يأخذ بنو موسى متعدّدَ سطوح محاطاً بِـ Σ دون أن يلامس Σ_1' ثمَّ يطبّقون المقدّمة ٢. إذا كانت S_2' مساحة متعدّد السطوح وكان V_2' حجمه، يكون $V_2' < V$؛ فيكـون لـدينا إذاً، وفقـاً للمقدّمـة ٢، $V_2' < \frac{1}{3}R.S_2' < V$، ولكـن لـدينا $S_2' > S_1'$، فيكون إذاً $\frac{1}{3}R.S_2' > \frac{1}{3}R.S_1'$، أي $\frac{1}{3}R.S_2' > V$؛ وهذا مستحيل.

نحصل من الحالتين أعلاه، على النتيجة المطلوبة، أي $V = \frac{1}{3}R.S$.

لا يتسـاءل بنـو موسـى، لا فـي الحالـة الأولـى ولا فـي الثانيـة، عـن وجـود متعدّد السطوح الذي أدخلوه.

ملاحظـةـ الحجمـان الوحيـدان اللـذان دُرِسـا فـي هـذا الـنصّ همـا حجمـا المجسّـمين الواردين في القضيّتين ١ و ٢؛ أي حجم متعدّد سطوح مساحته S يحيط بكرة نصف قطرها R_1: $V = \frac{1}{3}S.R_1$، ومن جهة أخرى حجم متعدّد سطوح مساحته S محاط بكـرة نصف قطرها R_2، مع: حجم الكرة $< V < \frac{1}{3}S.R_2$.

www.j4know.com

ويستعين بنو موسى في القضيّة ١٥، بهذه النتائج، بالتحديد، ممّا يدفع إلى افتراض أنّ المجسّمات التي يأخذونها هي "متعدّدات سطوح". تبقى لدينا مسألة تحديد نوع متعدّدات السطوح التي يمكن أن نأخذها لنكون ضمن شروط حالتَيْ القضيّة ١٥.

يُمكن أن نبيِّن أنَّ هذه المسألة قابلة للحلّ باستخدام المجسّم P_n الذي تمَّ تحديده في القضيّة ١٧ من المقالة السابعة عشرة من "الأصول"، وهو مجسّمٌ "محاط" بالكرة؛ وهذا ما فعله الشارحون. لكنَّ مثل هذا المجسَّم لا يكون له كرة يحيط بها، وبالتالي لا يمكننا استخدام المقدّمة ١ لبني موسى.

في الحالة الثانية من القضيّة ١٥، يجب أن يكون متعدّد السطوح P_n، المحاط بالكرة Σ ذات نصف القطر R، خارج الكرة Σ_1' ذات نصف القطر R_1'. يجب إذاً اختيار n بحيث تكون أصغر مسافة، h، من مركز الكرتين إلى سطوح P_n أكبر من R_1، أي $h > R_1$، وعند ذلك يُحقّق V_n (وهو حجم P_n) العلاقة $V_n > \frac{1}{3} S_n . R_1$، وفقاً للمقدّمة ٢.

ونلاحظ، بالإضافة إلى ما سبق، أنّ الخازن يدرس هذه المسافات في القضيّة ١٩ من عمله الوارد لاحقاً (في كتابنا هذا).

لنعد إلى الحالة الأولى. الكرتان المستخدمتان فيها هما Σ ذات نصف القطر R، و Σ_1 ذات نصف القطر R_1، مع $R_1 > R$. فيجب أن نأخذ، بدلاً من متعدّد سطوح محيط بِـ Σ وموجود داخل Σ_1، متعدّدَ سطوح Γ_n محاط بِـ Σ_1 وبحيث تكون أصغر مسافة، h، من المركز إلى سطوحه أكبر من R، أي $h > R$، فيحقّق حجمه V_n عندئذ العلاقة $V_n > \frac{1}{3} S_n . R$ (وفق المقدّمة ٢)؛ فيمكننا عندئذ استنتاج المطلوب.

لنلاحظ، في الختام، أنّ الجملتين التاليتين في النصّ: "نَعمل على كرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$ مجسّماً كما وصفنا ..."، و"نَعمل في كرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$ مجسّماً كما وصفنا ..."، لا توضحان طبيعة المجسّم. يمكننا أن نأخذ، كما في القضيّة ١٤ المتعلّقة بمساحة الكرة، المجسّمات المؤلّفة من مخروط ومن جذوع من مخروطات. إلا أنّ بني موسى

www.j4know.com

لم يدرسوا في هذا الكتاب أحجام هذه المجسّمات. وكانوا على علم، بدون شك، بأنّ أرشميدس قد برهن في "الكرة والأسطوانة" – في القضيّتين ٢٦ و ٣١- أنّ الحجم V لمجسّم من هذا النوع، حيث تكون مساحته S وحيث "يحيط" بكرة نصف قطرها R_1، يكون $V = \frac{1}{3}S.R_1$. كما كانوا على علم، في القضيّة ٢٧ بأنّ الحجم V يُحقّق $V < \frac{1}{3}S.R_2$، إذا كان المجسّم "محاطاً" بكرة نصف قطرها R_2.

يُمكن إذاً تطبيق استدلال بني موسى على مجسّمات كهذه. وربّما لهذا السبب، لم يشعر بنو موسى بضرورة مناقشة طبيعة هذا المجسّم.

نجد، فيما يتعلّق بهذه المجموعة من القضايا التي أتاحت تحديد مساحة سطح الكرة وحجمها، الفوارق ذاتها بين أرشميدس وبني موسى، التي سبق أن رأيناها في حالة مساحة الدائرة . الفارق الأوّل يتعلّق بطريقة الاستنفاد. يبدأ بنو موسى ببرهان المتباينة $\cos^2 \frac{\pi}{4n} < \sin \frac{\pi}{4n}\left(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{4n}\right) < 1$.

ثمّ يطبّقون بعض القضايا، من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" – كما شرحنا سابقاً –، التي تعفيهم من "المرور إلى الحدّ" عندما يسعى n إلى ما لا نهاية، لمتسلسلات الجيوب التي أتينا على ذِكرها. وهم يستخدمون لتحديد حجم الكرة، هنا أيضاً، طريقة الاستدلال بالخُلف على مساحات السطوح الجانبيّة وليس على الأحجام. وأخيراً، لا يُعطي بنو موسى حجمَ الكرة عبر مقارنة هذا الحجم بحجم آخر، كما يفعل أرشميدس: "حجم الكرة يعادل حجم مخروط قاعدته مكافئة للدائرة العظمى للكرة وارتفاعه يساوي ضعفَي قطر الكرة". فهم يقدّمون هذا الحجم كحاصل ضرب مقدارين. هذه الفوارق تشير إلى أنّ بني موسى أرادوا شقّ طريق مختلف عن طريق أرشميدس في البحث عن مساحة الدائرة، وعن مساحة سطح الكرة وحجمها؛ إلاّ أنّهم اختاروا طريقة أرشميدس في تقريب π.

وقد لاحظنا أنّ بني موسى يهتمّون أيضاً في هذا الكتاب، بمسائل كلاسيكيّة من الرياضيّات الهلّينيستية وخاصّة بمسألتين شهيرتين وردتا في شرح أوطوقيوس

www.j4know.com

لكتاب "الكرة والأسطوانة"، هما مسألة المتوسّطين ومسألة تثليث الزاوية.

١-٢-٥ مسألة المتوسّطين وبناؤها الآلي

القضيّة ١٦- لإيجاد مقدارين X و Y بين مقدارين معلومين M و N، يبدأ بنو موسى بعرض الحل الذي أعطاه، حسب تعبيرهم، "رجلٌ من القدماء اسمه مانالاوس أورده في كتابٍ له في الهندسة"، منوّهين بنفعه في استخراج الجذر التكعيبي. هذا العنوان لكتاب منالاوس هو أقرب ما يكون من عنوان كتاب ترجمه ثابت بن قرّة تحت عنوان "في أصول الهندسة" وذكره النديم[٦٩]، لكنّه لم يصل إلينا. لكنَّ الحلّ الذي نسبه بنو موسى إلى منالاوس هو الحل الذي نسبه أوديموس (*Eudème*) إلى أرخيطاس(*Archytas*)، على حدِّ قول أوطوقيوس[٧٠]. يتعلّق الأمر إذاً، إذا كان الطولان M و N معلومين، بإيجاد الطولين X و Y، بحيث يكون $\frac{M}{X}=\frac{X}{Y}=\frac{Y}{N}$.

عندما يكون $M=1$، ويكون N حجم مكعّب، يكون X ضِلع هذا المكعّب.

لنفترض أنّ $M>N$ ولنرسم دائرة قطرها $M=AB$، وَوتراً AC مساوياً لـ N وخطّ التماسّ المارّ بِـ B والذي يقطع المستقيم AC على النقطة G [الشكل، ص. ١١٦].

لنأخذ نصف أسطوانة دورانيّة محدّدة بنصف الدائرة ACB، بحيث تكون خطوطها المولّدة عموديّة على المستوي ABC. ونرسم نصف دائرة قطرها AB في المستوي المتعامد مع ABC وِفق AB، ونجعل نصف الدائرة هذه يدور حول المستقيم Az ($Az \perp ABC$)؛ ولتكن AHE نصف الدائرة هذه، في أحد أوضاعها. يقطع المستقيمُ AE القوسَ $\widehat{ACB}$ على النقطة I ويقطع نصفُ الدائرةِ AHE الأسطوانةَ على النقطة H، فيكون IH مولّداً للأسطوانة. خلال الدوران، ترسم I القوسَ $\widehat{ACB}$ وترسم H المنحني $\boldsymbol{C}$ على السطح الأسطواني.

---

[٦٩] النديم، "الفهرست"، صفحة ٣٢٧. نجد تحت اسم منالاوس "كتاب أصول الهندسة، عمله ثابت بن قرّة ثلاث مقالات".

[٧٠] *Archmidis Opera Omnia*, iterum edidit J. L. Heiberg, vol. III corrigenda adiecit E. S. Stamatis (Teubner, 1972), pp. 84-88؛ انظر أيضاً "أرشميدس"، طبعة وترجمة فرنسيّة: *Archimède*, éd. et trad. Françа[illegible]4.

www.j4know.com

نجعل المثلّث ABG يدور حول AB، فترسم C نصفَ الدائرة COD، ويقطع الخطّ المستقيمُ AG، في كلِّ وضع من أوضاعه، COD على النقطة L والأسطوانة على النقطة H'؛ وخلال حركتها ترسم H' المنحني $\mathbf{C'}$ على السطح الأسطواني.

نثبّت نصف الدائرة AHE والمثلّث ABC في وضع تكون فيه $H = H'$؛ في هذه الحالة تكون $H \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C'}$.

الخطُّ LK هو خطّ التقاطع بين المستويين COD و AHI، ويكون لدينا $LK \perp CD$ فيكون $LK^2 = KC.KD$ (لأنّ المثلّث CLD قائم الزاوية). لكن $KC.KD = KA.KI$ (قوّة النقطة K)، فيكون $LK^2 = KA.KI$، ويكون المثلّث ALI قائم الزاوية في L. المثلّثات AHE و AIH و ALI قائمة الزاوية ومتشابهة، فيكون $\frac{AE}{AH} = \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AL}$، لكن $AE = AB = M$ و $AL = AC = N$، فيكون لدينا $X = AH$ و $Y = AI$.

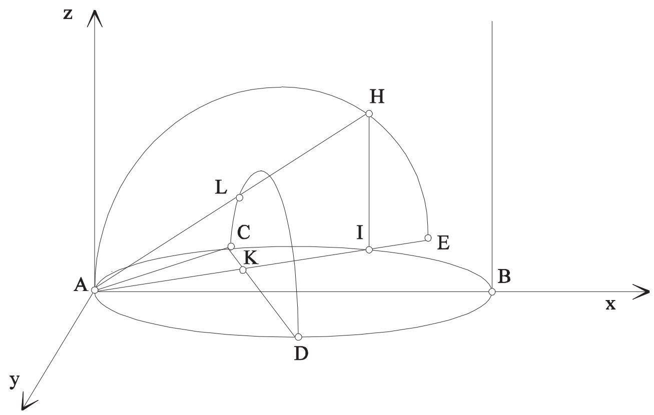
بتعبير آخر، يتمّ الحصول على الحلّ المنسوب إلى منالاوس بواسطة تقاطع أسطوانة قائمة معادلتها $x^2 + y^2 = a.x$، ومخروط قائم معادلته $b^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = a^2x^2$، وطوق دائري معادلته $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$، (مع $a = M$ و $b = N$).

فإذا كانت النقطة $H\left(x_0, y_0, z_0\right)$، نقطة التقاطع، يكون لدينا:

$X = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ و $Y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

يلفت بنو موسى النظر، بحقّ، إلى صعوبة بناء هذا الحلّ ويقترحون طريقة آليّة للقيام بذلك. وكنّا نعتقد أنّ بإمكاننا التأكيد أنّ جهازهم شديد الشبه بذلك الذي أعطاه أوطوقيوس تحت اسم أفلاطون. ولكن الأمر ليس كذلك. وسبق أن لاحظنا أنّ هذا الجهاز الدقيق، وذا الوصف الصعب، قد وُضِع جانباً من قِبَل جيرارد دو كريمون، فغاب عن الترجمة اللاتينيّة لكتاب بني موسى.

www.j4know.com



لندرس الآن هذه الطريقة العمليّة:

القضيّة ١٧- ليكن A و B الطولين المعلومين، وليكن X و Y الطولين المطلوبين أي اللذين يحقّقان العلاقة $\frac{A}{X}=\frac{X}{Y}=\frac{Y}{B}$.

ليكن المستقيمان DC و DE متعامدين [أنظر الشكل، ص.١١٩]، بحيث يكون $DC=A$ و $DE=B$. العمود الخارج من E على CE يقطع DC على النقطة F، والمستقيم الموازي لِـ EF الخارج من C يقطع ED على النقطة M، ولتكن النقطة U على امتداد MC المستقيم بحيث يكون $MU=FE$.

نحدّد حركة للقطعة FE وحركة للقطعة MU، على الشكل التالي:

تحتفظ هاتان القطعتان بطولهما الأوّليّ خلال الحركة؛ تنزلق F على المستقيم DC باتّجاه D؛ تدور FE حول النقطة E، وفي الوقت نفسه تبقى MU موازية لـِ FE؛ وتنزلق M على المستقيم ED مبتعدة عن D، وتدور MU حول النقطة C.

نوقف هذه الحركة عندما يقطع العمود الخارج من E على FE المستقيم MU على النقطة U. عند بلوغنا هذا الهدف، نعطي لوضع FE الاسم F_1E_1 ولوضعيّة MU الاسم M_1U_1. الشكل $F_1E_1U_1M_1$ مستطيل. والمثلّث CM_1F_1 قائم الزاوية وكذلك المثلّث M_1F_1E، فيكون إذاً $M_1D^2=DC.DF_1$ و $DF_1^2=DM_1.DE$، فنحصل على:

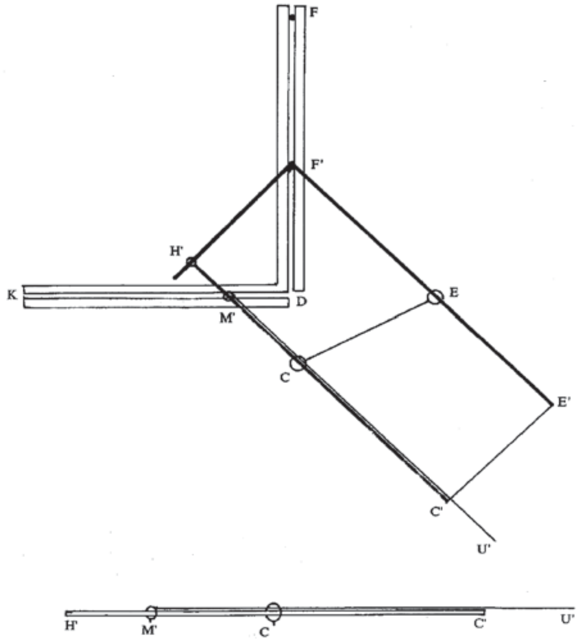
$$\frac{DC}{DM_1}=\frac{DM_1}{DF_1}=\frac{DF_1}{DE}؛$$

لكن $DC=A$ و $DE=B$، فتكون إذاً DM_1 و DF_1 القطعتين X و Y المطلوبتين.

www.j4know.com

كيف يمكن الحصول بسهولة على القطعتين DM_1 و DF_1؟ يقوم هنا بنو موسى بإدخال النقطة H المحدّدة كما يلي: $CH = EF$ (H على امتداد CM المستقيم)، فيكون $FECH$ مستطيلاً، وعندما تصل F إلى F_1، تأتي H إلى M_1 على المستقيم DE.

نتخيّل إذاً جهازاً يتيح الحصول على حركة الشكل $EFHC$ المؤلَّف من سيقان (عيدان أو شظايا كما يقول بنو موسى) معدنيّة.



للسيقان الثلاث EF و CH و MU نفس الطول l المحدّد انطلاقاً من المعطيات بـِ $l = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 + B^2}$. للساق EC الطول $\sqrt{A^2 + B^2}$، وللساق FH طولٌ اختياريّ يساوي حدُّه الأدنى طولَ الساق EC. والساق EC هي، وحدها، التي تكون ثابتة.

يشكّل الساقان EF و FH كوساً (مثلّثاً بزاوية قائمة) لا يتغيّر شكله، وتجهَّز النقطة F بِرَزَّة (قُطب) يرسم رأسُها المستقيمَ FD. نضع عند كلٍّ من النقطتين الثابتتين E و C، رزّةً يكون رأسها حلقة تستطيع الدوران، وتمرُّ فيها الساق EF المتحرّكة عند E والساق HC المتحرّكة عند C. تنزلق الساق MU، الأكثر دقّة من السيقان الأخرى، في حزٍّ محفور على ظهر الساق HC وتمر في الحلقة الموجودة في الرزّة الموجودة في النقطة C. وتثبّت على الساق MU عند النقطة M_1 رزّة لها حلقة تمر بها الساق

www.j4know.com

HC ويرسم رأسُ الرزّة هذه المستقيمَ DK. وعلى الساق FH أن تنزلق داخل حلقة مربوطة بالساق HC في طرفها H.

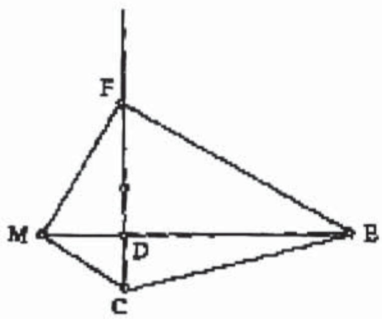
باستطاعتنا إذاً أن نتخيّل، تحت مستوي المستطيل المتحرّك $HFEC$، صفيحةً نُثَبِّت عليها الرزّتان E و C ونصنع عليها مزلاقين لتأمين حركة الرزّتين المتحرّكتين F و M. للحصول على المزلاق FD، على سبيل المثال، نثبّت على الصفيحة مسطرتين متوازيتين، من كلتا جهتي المستقيم FD، ونفعل الشيء نفسه بالنسبة إلى MK.

بعد ذلك، يوضع هذا النظام من السيقان ذات المفاصل على هذه الصفيحة، وتمر الساقان FE وHC على التوالي بحلقتي الرزّتين E و C، في الوقت الذي توضَع كلٌّ من الرزّتين F وM، على مزلاقها.

الملاحظة الأولى: يتوافق الشكل أعلاه مع وضع وسيط للمستطيل المتحرّك، وهو $E'F'H'C'$. ويبدو أنّ الاستغناء عن الساق الرقيقة الموجودة على ظهر HC ممكن.

الملاحظة الثانية: نوقف الحركة عندما يحصل تطابق النقطة H' مع النقطة M'، أي عندما يصبح لدينا $H'=M'=M_1$ [أنظر الشكل، ص.١١٩]؛ وعندها يكون لدينا أيضاً $C'=U_1$.

الملاحظة الثالثة. بما أنّ ضلعَي الزاوية القائمة CDE معلومان، أي $CD=A$ و $DE=B$، فإنّ المسألة ١٧ ترجع إلى تحديد F على امتداد CD المستقيم وإلى تحديد



www.j4know.com

M على امتداد ED المستقيم، بحيث يكون المثلّث FCM قائم الزاوية في M والمثلّث MFE قائم الزاوية في F.

لقد عالج أفلاطون[٧١] هذه المسألة. والجهاز الذي وصفه هنا بنو موسى مختلف عن الذي وُضِع تحت اسم أفلاطون.

١-٢-٦- أ تثليث الزاوية و"حلزونيّة باسكال (Pascal)"

القضيّة ١٨- في هذه القضيّة، يعود بنو موسى إلى مسألة تثليث الزاوية، لعرض حلّهم الخاص فقط، ولعرض تركيب آلي يرسم المنحني المثلّث (أي الذي يقسم الزاوية إلى ثلاثة أقسامٍ متساوية). هذا المنحني هو محاريّةُ دائرةٍ، ليست سوى "حلزونيّة باسكال"، كما أسماها روبرفال[٧٢] (Roberval). للحصول على الحلّ نستخدم تقاطع هذه الحلزونيّة مع نصف خطّ مستقيم.

لنتناول أوّلاً نصّ بني موسى.

لتكن لدينا الزاوية الحادّة ABC، ولنرسم دائرة مركزها B تقطع BA على النقطة D وتقطع BC على النقطة E، وليكن BG عموداً على BD، $BG \perp BD$. ليكن GH نصف الخطّ المستقيم الذي يصل بين G و E ولتكن النقطة O على GH بحيث يكون $GO = BD$. نتصوّر أنّ المستقيم GH يتحرّك بحيث يمر دائماً بالنقطة E وبحيث ترسم النقطة G الدائرة باتّجاه L.

---

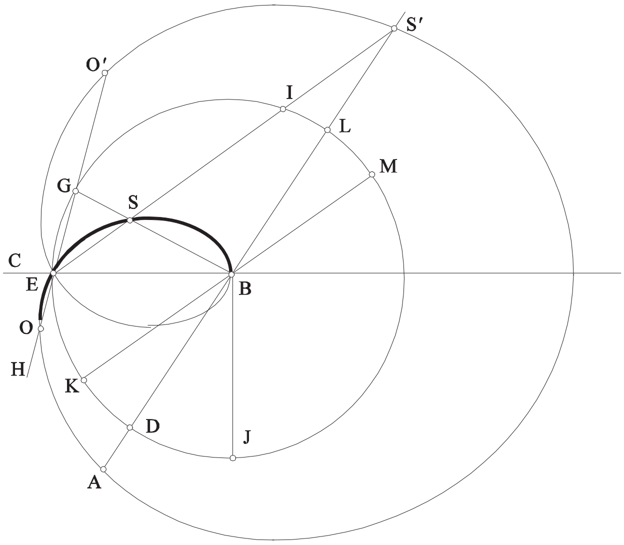
[٧١] انظر: *Archmidis Opera Omnia*, pp. 56-59.

[٧٢] انظر روبرفال، "ملاحظات حول تشكيل الحركة ووسائل إيجاد خطوط التماس للخطوط المنحنية":
Roberval, "Observations sur la composition du mouvement et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes", in *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, cours de Roberval, rédigé par son élève François de Verdus.

انظر أيضاً ب. دودرون و ج. إيتار، "الرياضيّات والرياضيّون":
P. Dedron *et* J. Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris 1959), pp. 400-401

حيث ذُكِر نص روبرفال. لقد تخيّل أ. باسكال (E. Pascal)، حسب ب. تانّيري (P. Tannery)، هذا المنحني على أنّه محاريّةُ الدائرة، وذلك في حدود العامَين ١٦٣٦-١٦٣٧؛ انظر "مذكّرات علميّة" (*Mémoires scientifiques*)، المجلّد الثالث عشر، ص. ٣٣٧-٣٣٨. انظر أيضاً م. كلاجيت (M. Clagett)، "أرشميدس في القرون الوسطى":
M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Appendice VI, intitulé "Jordanus and Campanus on the Trisection of an Angle", pp. 6

www.j4know.com



لتكن النقطة I الموضع الذي تبلغه النقطة G عندما تصل O إلى المستقيم BG، فيكون عندئذ $IS = IB = BE$. وإذا رسمنا الآن القطر KM الموازي لـِ EI، ($KM \parallel EI$)، يكون لدينا $SI \parallel MB$ و $SI = MB$، فيكون $IM \parallel SB$ و $IM \perp BL$، ويكون BL منصّف الزاوية $\widehat{IBM}$، فيكون $\widehat{IL} = \widehat{LM} = \widehat{DK}$؛ من جهة أخرى $\widehat{IM} = \widehat{KE}$، فنحصل على $\widehat{KE} = 2\widehat{KD}$. فيكون المستقيمُ BK المستقيمَ المطلوب: $\widehat{DBK} = \frac{1}{3}\widehat{DBE}$.

إذا كانت الزاوية $\widehat{ABC}$ منفرجة، نرسم أوّلاً مُنصِّفها ثم نرسم ثلث النصف. فثلثا هذا النصف هو ثلث الزاوية المنفرجة.

الملاحظة الأولى:

عندما ترسم النقطة G القوسَ GL، ترسم النقطة O المرتبطة بها ($GO = R$) قوساً من مَحاريّة وتكون S نقطة تقاطع هذه القوس مع المستقيم GB.

تنتمي النقطة S، بتعبير آخر، إلى الحلزونيّة وإلى المستقيم BG. تُكتَب معادلة المستقيم BG بالإحداثيّات القطبيّة - حيث تكون النقطة E القطبَ- كالتالي:

$\rho = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)}$، حيث $a = BE$ و $\alpha = \widehat{DBC}$؛

وتُكتَب معادلة الحلزونيّة $\rho = a(2\cos\theta - 1)$؛ وإحداثيّات النقطة S هي (ρ,θ)،

فنحصل على: $\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)} = 2\cos\theta - 1$.

www.j4know.com

ولكنّ $\theta = \frac{2\alpha}{3}$ هي حلٌّ لهذه المعادلة. فتكون الزاوية $\widehat{BES}$ مساوية لِـ $\frac{2\alpha}{3}$،

والزاوية $\widehat{BS'E}$ مساوية لِـ $\frac{1}{3}\alpha$ والزاوية $\widehat{DBK}$ مساوية لِـ $\frac{1}{3}\alpha$.

وهكذا يتعلّق الأمر بتثليث الزاوية $\widehat{ABC}$ بواسطة استخدام تقاطع قوس من محاريّة دائرة ($GO = GO' = R$) مع نصف مستقيم BG.

يصف بنو موسى بعد ذلك التركيب الآلي لرسم حلزونيّة باسكال. يستخدمون أنبوباً دائريّاً يضعون فيه، عند النقطة E، رَزّةً مع حلقة. ويُمَرِّرون في هذه الحلقة ساقاً طرفُها G مجهّزٌ برَزّةٍ تنزلق في الأنبوب. وعند النقطة O من هذه الساق حيث $GO = R$، يوضع رأس قلم، فيرسم رأس القلم هذا قوس المَحاريّة. يعطي تقاطعُ هذه القوس مع العمود BG النقطة S المطلوبة.

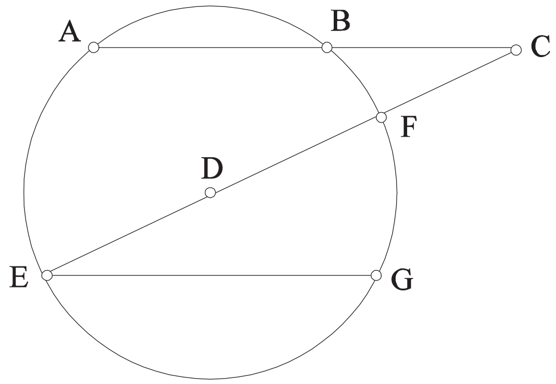
إذا أردنا المَحاريّة كاملةً، يجب أن تكون الساق ساقاً تُمَدُّ إلى أبعد من G بطولٍ GO' يساوي R، $GO' = R$.

كما يمكننا استخدام هذا الجزء من المَحاريّة لتثليث الزاوية $\widehat{DBE}$. فعندما نَمدِّد IS على استقامة حتى S' على المَحاريّة، يُصبح لدينا: $IS = IS' = IB = R$، فيكون المثلّث SBS' قائم الزاوية في B، وتكونا S' نقطة تقاطع المَحاريّة مع المستقيم BD.

الملاحظة الثانية:

في القضيّة ٨ من كتاب "المقدّمات"[٧٣] المنسوب إلى أرشميدس، يقوم المؤلّف انطلاقاً من النقطة A من الدائرة ذات المركز D، برسم الوتر الاختياريّ AB، ويُمَدِّد هذا الوترَ على استقامة حتّى النقطة C بحيث يكون $BC = AD = R$. يقطع المستقيمُ CD الدائرة على النقطتين E و F، فيكون لدينا $\widehat{AE} = 3\widehat{BF}$، وهكذا تكتمل مناقشة مسألة تثليث الزاوية.

[٧٣] انظر المرجعين التاليين:
Archmidis Opera Omnia, Libwww.j4know.comd. Mugler, t. 3, pp. 148-149.



هذه القضيّة، التي ربّما تعود إلى أرشميدس، تعطي فكرة المَحاريّة: إذا رسمت B قوس الدائرة المعلومة، ترسم النقطة C قوساً من المَحاريّة خارجَ الدائرة.

فهل استوحى بنو موسى هذا النصَّ الذي كان مترجماً إلى العربيّة؟ ليس لدينا إجابة أكيدة عن هذا السؤال في الوضع الراهن لمعرفتنا بالموضوع. وهناك فرقٌ بين المناقشتين إذ إنَّ بني موسى لا يستخدمون قوس المَحاريّة الواقعة (أي القوس) خارج الدائرة، كما في النصّ المنسوب إلى أرشميدس، إنّما يستخدمون القوسَ الواقعة في داخل الدائرة، كما رأينا.

الملاحظة الثالثة:

في الوقت الذي تبقى فيه مصادر الحلّ المقدّم من قِبَل بني موسى لهذه المسألة غامضة نوعاً ما، فإنّ دوام انتقال هذا الحلّ يبقى، في المقابل، أقلّ غموضاً. فقد اقتُبِس هذا الحلّ في الـ *Liber de triangulis*[٧٤]. وتجدر الإشارة إلى أنّ إيتيان باسكال (Etienne Pascal) – ودائماً وفق أقوال روبرفال- قد تصوّر هذا المنحني بنفس الطريقة، أي كمَحاريّة دائرة، وطبّقها، هو أيضاً، على تثليث الزاوية.

[٧٤] راجع: M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. V (Philadelphia, 1984)، ص.١٤٦-١٤٧، ص. ٢٩٧ وما يليها،

www.j4know.com

١-٢-٦- ب تقريب الجذر التكعيبي

ينهي بنو موسى أخيراً كتابهم بتقريب الجذر التكعيبي لعدد طبيعي N ويعطون عبارة مكافئة للعلاقة: $\sqrt[3]{N} = \frac{1}{60^k}\sqrt[3]{N.60^{3k}}$ ،

ومنها يخرج الجذر التكعيبي لـِ N بدقّة من المرتبة k.

www.j4know.com

www.j4know.com

١-٣ النص

"كتاب معرفة مساحات الأشكال البسيطة والكريّة"

لبني موسى: محمد والحسن وأحمد

ثمانية عشر شكلاً

www.j4know.com

www.j4know.com

صدر الكتاب

الطول أول الأقدار التي تحدّ الأشكال وهو ما امتدّ على استقامة في الجهتين جميعًا ؛ فإنه لا يكون منه إلا طول فقط. فإذا امتدّ السطح اعتراضًا في غير جهة الطول، فذلك الامتداد هو العرض. وليس العرض كما يظن كثير من الناس أنه الخط الذي يحيط بالسطح في غير جهة الطول. ولو كان كذلك لما كان السطح ذا طول وعرض فقط ولكان العرض طولاً أيضًا، لأن العرض عندهم خط والخط طول.

وقد أحكم ذلك أقليدس حيث قال: الخط طول فقط، والسطح طول وعرض فقط. وأما السمك فهو امتداد في غير جهتي الطول والعرض. والذين يظنون أن العرض خط، يظنون أيضًا

1 ناقصة [ا، ت، ث، جـ، ح، ض، ف، ك، ن، م، ي]، نجد قبلها «كتاب معرفة الأشكال البسيطة» [ر]، نجد بعدها «وبه نستعين» [ع، ط] «ربّ تمم بالخير» [ب] – 2 كتاب: رسالة [ق] هذا كتاب [ر] / معرفة ... والكرية: ناقصة [ق] / مساحة: ناقصة [ر] مساحسة [ش] / البسيطة والكرية: الكرية والبسيطة [ف] – 3 لبني: بني [ق] ناقصة [ي] / والحسن: ولحسن [ي] – 4 ثمانية: وثمانية [ب، ش] / ثمانية عشر شكلاً: وهي مقالة واحدة وثمانية عشر شكلاً [ق] يح شكلاً [ي] ب ح شكلاً [خ] – 5 صدر: ناقصة [خ، س] / الكتاب: ناقصة [خ، س، ق] – 6 الطول: اطول [ط] / أول: اقل [ت] او [ب، ح، خ، ش] / تحد: يحد [ب، ش، ط، م] تجد [ل] بعد [ي] / وهو: فهو [و] / ما: اما [خ] / على: علا [و] – 7 منه: فيه [ق] / اعتراضًا: اعراضًا [ح، د، ذ، س، ع، ط، ف، ق، ي] / غير: ناقصة [هـ] / الامتداد: لامتداد [ص] / هو: ناقصة [خ] وهو [ش] – 8 وليس: ليس [ح] / كثير: كثيرا [و] / أنه: أن [و، ق] / يحيط: تحيط [خ] – 7-9 فذلك ... الطول: ناقصة [جـ، ت، ر] – 9 ذا: اذا [ر، م] / ذا طول: واطول [و] / فقط: نجد التعليق التالي في هامش [ب، د، ش] «أي (يعني [د]) بل كان ذا اطول (اطوال [د]) وعروض» – 11 أحكم: حكم [و] / ذلك: ناقصة [ح] / أقليدس: اوقليدس [ث، ص] / حيث: من حيث [ا] – 12 امتداد: امتدادا [خ] / أن العرض خط يظنون: أن الخط عرض يظنون، وأثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ث] ناقصة [خ].

www.j4know.com

أن السمك خط، وبيان خطأهم في ذلك سواء. وهذه الأقدار الثلاثة تحدّ عظم كل جسم وانبساط كل سطح. والعمل في تقدير كمياتها إنما يتبيّن بالقياس إلى الواحد المسطح والواحد المجسم.

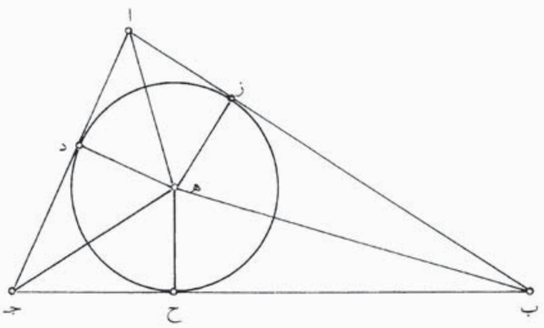
والواحد المسطح الذي به يقاس السطح هو سطح طوله واحد وعرضه / واحد / وزواياه قائمة، ذ – ٣٧٣ – و
والواحد المجسم الذي به يقاس المجسم هو جسم طوله واحد وعرضه واحد وسمكه واحد، وقيام بعض س – ٥ – و
سطوحه على بعض على زوايا قائمة. فإن المقدار الذي به تقدر السطوح / والأجسام يحتاج/ إلى أن ر – ٣٤
يلتئم بعضه إلى بعض عند التضعيف / التئامًا لا يترك في خلله شيئًا إلا أتى عليه، ويحتاج مع ذلك ت – ٢٧٣ ص – ١٢٤
إلى أن يكون تمييز ما أتى عليه التقدير مما لم يأت/ عليه سهلاً. ولا شيء أبلغ في سهولة ذلك التمييز ل – ٢ – و
من أن يكون حكم الواحد الذي به يُقدر، في أفراده وفي تضاعيفه، حكمًا / واحدًا، ليكون المؤنة ک – ٢١٥ – و
في تمييز ما قدر مما لم يقدر في جميع الأحوال واحدة. وليس هذا بموجود/ في شيء من / الأشكال ي – ٥٩ – و
إلا في المربع، فإنه إذا ضوعف إنما / يتغير كميته ويكون تربيعه باقيًا. وأعظم الأشكال المربعة / ع – ٧٨ – ظ و – ١٦٤ – و
إحاطة هو القائم / الزوايا. فهذا هو العلة في جعل ذلك معيارًا دون غيره. خ – ١٨٤ – و ط – ٢٥٧ – و

1 خطاهم: خطابهم [و] ناقصة [هـ] / في: ناقصة [هـ] / وهذه: هذه [ا] / الاقدار: الافراد [ا] / تحد: تجد [ب، ح، د، ش، ط، ل] يحد [ق] – 2 كمياتها: كمياتها [ث، د، ض، ک، ل، ن، و] / إنما: بما [ذ، ط، ع] انها [س] / يتبين: تبين [خ، ذ، ر، ط] نتبين [ل] / والواحد: او الواحد [ق] – 3 المجسم: المتجسم [خ] – 2-4 المسطح ... واحد (الثانية): ناقصة [و] – 4 والواحد ... قائمة: ناقصة [ح] / به: ناقصة [ع] / به يقاس: يقاس به [هـ] ناقصة [ي] / السطح: ناقصة [ي] / وزواياه: وزواياة [خ] وزاويتاه [ث] – 5-4 وزواياه ... وعرضه واحد: ناقصة [ق] – 5 المجسم: المتجسم [خ] / به: ناقصة [ت] / المجسم: ناقصة [ت] الجسم [ا، ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] / هو: وهو [ح، س] / وسمكه واحد: ناقصة [م] – 6 به: أثبتها فوق السطر [س] / تقدر: بقدر [و] / إلى: ناقصة [ب، ث، جـ، ح، خ، د، هـ، ر، س، ش، ص، ض، ف، ق، ک، ل، ن، و، ي] – 7 يلتئم: المسم [خ] / يترك: تترك [ل] / شيئًا: شعيا [خ]؛ نجد التعليق التالي في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص، هـ] «أما أن المربع أعظم الأشكال إحاطة، أعني القائم الزوايا، فلما دلّنا برهان هـ من ب من الاسطقسات (الاسطقيليات [ب، ش]) وأما كون قائم الزوايا غير المربع أعظم من الشكل الذي زواياه غير قائمة فلكون عمود الأول (لاول [ص]) أطول من عمود الثاني، ومحيطاهما (ومحيطاها [ص]) متساويان»؛ ونجد في [ا] تعليق آخر / أتى: لقي [ق] / عليه: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ث] – 8 إلى: ناقصة [ع] / تمييز: تمين [ذ، ط] تميز [ا، ب، خ، ش، م] تمس [ي] / أتى: أثبتها فوق السطر [ت] / يأت: باب [خ] / عليه: على [خ] / في: من [ا] / ذلك: وذلك [ق] / التمييز: التميز [ب، خ، ذ، م، ش] اليمين [ط] القمر [ي] – 9 من: أثبتها في الهامش [ف] / الواحد: ناقصة [ت، جـ، ر، س] / به: ناقصة [ع] / تضاعيفه: بضاعيفه [خ] / المؤنة: للمونه [ع] الموبة [خ] – 10 تمييز: تمين [ذ، ط] تميز [ب، خ، ش، م] غير [ي] / واحدة: ناقصة [ا] / بموجود: الموجود [هـ] / من: الا من [ب، ش] ناقصة [و] – 11 إنما: فانما [خ، ف، ق، م، ي] / يتغير: تغير [ث] / كميته: كيفيته [م] نكسه [ذ، ط، ع] / ويكون: يكون [ر] / تربيعه: بربيعة [خ] / باقيًا: ناقصة [هـ] / المربعة: المربع [ق] – 12 معيارًا: معارا [ل] معياف ا [خ].

www.j4know.com

– آ – كل مضلّع يحيط بدائرة فسطح نصف قطر تلك الدائرة في نصف جميع أضلاع ذلك المضلع هو مساحته.

فليحط شكل ا ب ج بدائرة د ح ز التي مركزها هـ ونصف/ قطرها هـ ح، ونصل هـ ا هـ ب ض – ٧٢ – و هـ ج. فظاهر أن هـ ح عمود لمثلث هـ ب ج، وأن سطح هـ ح في نصف ب ج هو مساحة مثلث هـ ب ج. وكذلك الحكم في مثلثي ا هـ ب ا هـ ج. فإذن نصف قطر/ الدائرة // في نصف ث – ١٧٧ – ظ ق – ٢٧ – و ذ – ٣٧٣ – ظ جميع الأضلاع هو مساحة مثلث ا ب ج.



ونعلم من مثل ذلك أن كل مجسم يحيط بكرة، فإن تضعيف/ نصف قطر الكرة بثلث مساحة ش – ١٦٣ – و سطح المجسم المحيط بها هو تكسير المجسم وهو أعظم من تكسير الكرة.

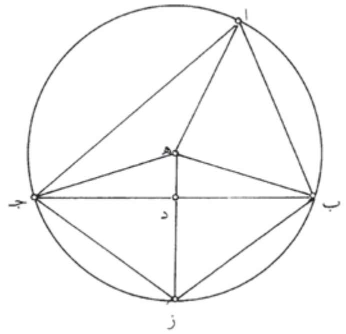
2 آ: ناقصة [خ، س، ش، ض، ق، ي] / كل: ناقصة [م] / فسطح: لمسطح [ي] / تلك: أثبتها في الهامش [ت] / أضلاع: أثبتها في الهامش [م] – 4 فليحط: فليخط [ث، ح] فوق السطر [ض] / شكل: ناقصة [خ، ي] / ا ب ج: كتب الجيم حاءً ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ب، ش] / ونصف: نصف [و] / قطرها هـ ح: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ب] – 5 هـ ج: ج [ع] هـ ح، كثيرًا ما كتب الجيم حاءً ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [خ، ي] / فظاهر: وظاهر [ب، ش، ح] فظ [ت] / هـ ح: هـ ح [ض] / لمثلث: بمثلث [ع] / مساحة: مساحسة [ش] – 4-5 ونصل... سطح هـ ح: أثبتها في الهامش [م] – 6 هـ ب ج: ب ح [خ] / وكذلك: وكذا [ع] / ا هـ ب: ا د ب [ا، ت] – 7 الأضلاع: اضلاع [ط] / هو: وهو [و] – 8 ونعلم: ويعلم [ذ، خ، ر، س، ض] / مثل: مثلث [ا، خ] / مجسم: جسم [خ] / يحيط: ناقصة [ع] محيط [س] / فإن: فاذن [ع] / قطر: ناقصة [ج، ت، س] / بثلث: مثلث [ذ، ط] في ثلث [ر] – 9 بها: ناقصة [ق] أثبتها فوق السطر [ض] / تكسير: بكسر [ط، و] / المجسم: ناقصة [و] / وهو: هو [ي] / تكسير: بكسر [و].

www.j4know.com

أقول هذا إنما يتبين بتوهم قسمة المجسم بمخروطات / رؤوسها مركز الكرة وقواعدها قواعد ف – ١٢٩ – ظ
المجسم، ويكون نصف قطر الكرة أعمدة على قواعدها، فتكون / مساحته / مساحة تلك س – ٥ – ظ ت – ٢٧٤
المخروطات.

– ب – كل مضلّع في دائرة تحيط به، فسطح // نصف قطر الدائرة في نصف جميع ر – ٣٥
الأضلاع أقل من مساحة/ الدائرة. ب – ١٥٧ – و ا – ٩٨ – و

فلتحط دائرة ا ب ج بمثلثه، وليكن المركز ه، ونصل ه ب ه ج وليكن ه د عمودًا على
ب ج، ونخرجه إلى ز ونصل/ ب ز ج ز.// فسطح ه ز في نصف ب ج يكون مساحة مثلثي/ ل – ٢ – ظ
ه ب ج ز ب ج، وهو أقل من مساحة قطاع ه ب ز ج، وأعظم من مساحة مثلث ه ب ج. ن – ١١٦ – ظ م – ١٩
وبمثله نبيّن في باقي الشكل ونبيّن أن مساحة الدائرة أعظم كثيرًا من مساحة / مثلث ا ب ج. ك – ٢١٥ – ظ ع – ٧٩ – و



1 إنما: لنا [ي] / يتبين: س [ي] تبين [ر، ط] / بتوهم: يتوهم [ط] ناقصة [س] / قسمة: قسم [ق] / بمخروطات: المخروطات [ش]، نجد التعليق التالي في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص] «هي إنما تكون زاويات ويكون ضرب قطر الكرة في ثلث (ثلثه [ا]) قاعدة كل منها (منها [ا]) تكسيره»، ونجد في [ا] تعليق آخر/ رؤوسها: رأسها [ق] / وقواعدها: وقواعد [خ] – 2 قطر: قطره [ع] قطرة [خ] / نصف قطر الكرة: كتب «انصاف اقطار الكرة»، ثم رجع وكتب تحتها العبارة نفسها [ت] / مساحته: ناقصة [ج، ر، ي] / مساحة: ساحه [ض] – 4 ب: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / في دائرة: أثبتها في الهامش [ر] / تحيط: يحيط [ا] / به: نجد فوق السطر «الدائرة» [ت] ناقصة [ج] / قطر: قطرة [خ] – 5 الأضلاع: الاوصاع [ذ، ط] – 6-7 ه ب ... ونصل: ناقصة [ح] – 6 دائرة: أثبتها في الهامش [ث] / بمثلثه: بمثله [ث] / ه: د [م] / ه ج: وج [م] – 7 ب ج: ا ب ج [ع] / ونخرجه: ونخرج [و] / ج ز: ناقصة [ج، ت، ر] / ه ز: زه [ط] / ب ج: زج [س] ب ح وبمثله [خ] / مساحة: أثبتها في الهامش [ا] مساحة ه [ع] – 8 ز ب ج: د ب ج [م] ود ب ح [ذ، ع، ط] / وهو: هو[خ] / ه ب ز ج: ب زح [خ] / مساحة: مكررة [ع] – 9 وبمثله: وبمثله [ض، ي] بمثله [ذ] / نبين: يبين [س]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / باقي: ما في [ح] / الشكل: الأشكال [ا، ث، ض، ك، ل، ن، و] / ونبين: وبيّن [س] / كثيرًا: اكثيرا [خ] / ا ب ج: ب ج [ذ، خ] – 8-9 قطاع ... من مساحة: أثبتها في الهامش [ث].

www.j4know.com

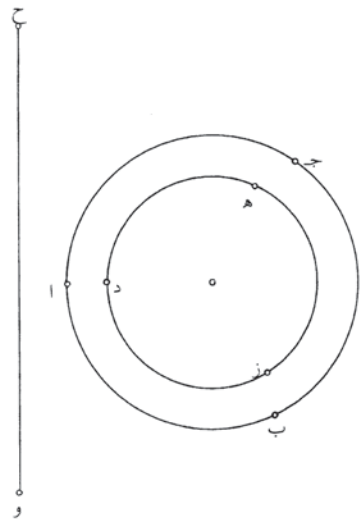
ونعلم من مثل ذلك أن المجسم الذي يحيط به كرة يكون تضعيف نصف قطر الكرة بثلث سطح المجسم أقل من مساحة الكرة.

– جـ – / إذا كان خط محدود ودائرة، فإن كان الخط أقصر من محيطها، أمكن أن يعمل في الدائرة شكل مضلع تحيط به الدائرة، ويكون جميع أضلاعه أطول من ذلك الخط. وإن كان الخط أطول من محيطها، أمكن أن يعمل على الدائرة مضلع يحيط بالدائرة ويكون جميع أضلاعه أقصر // من ذلك الخط. ذ – ٣٧٤ – و

خ – ١٨٤ – ظ

فليكن الدائرة ا ب جـ / والخط / ح و وهو أقصر أولاً / من محيط ا ب جـ. وليكن محيط دائرة د ز هـ مثل خط ح و. فإذا عمل في دائرة ا ب جـ مضلع لا يماس محيط / هـ د ز، كان جميع أضلاعه أطول من محيط هـ د ز، أعني من خط ح و.

ي – ٥٩ – ظ
ط – ٢٥٧ – ظ
و – ١٦٤ – ظ
ض – ٧٢ – ظ

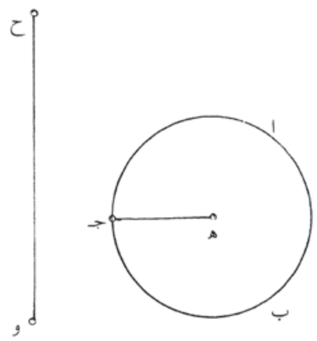


1 ونعلم: ويعلم [خ، ر، س، ل] / مثل: ناقصة [س، ض، ك، ل، ن، و] ح [ط] / تضعيف: نصف [ط] / نصف قطر الكرة: فراغ [ذ] / بثلث: بمثلث [م] لثلث [ش] – 3 جـ: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / خط: ا خط [خ] / ودائرة: نجد فوقها «ثاني» [م] ناقصة [خ، ي] / الخط: ناقصة [س، ع] / أقصر: افق [ي] ناقصة [خ] / محيطها: محيط [ع] / يعمل: نعمل [ر، ق، هـ] – 4 ويكون: مكررة [ي] – 5 الخط: أثبتها في الهامش [ع] / يعمل: نعمل [ث، ر، ق] / على: في [خ، ي] / مضلع: شكل مضلع [خ، ي] / يحيط: محيط [ث، خ، ط، ع، ف، ق، م]، كرر بعدها «الدائرة ويكون جميع أضلاعه أطول من ذلك الخط وإن كان الخط أطول» [ي] – 6 ذلك: ناقصة [ذ، ع، ط، م، هـ] – 7 ح و: ح د [ث] ح [ذ، ح، ع، ط، ل، هـ] ناقصة [ي] ح ر ر / من: ناقصة [و] / وليكن: فليكن [ح] – 8 د ز هـ: د هـ ز [ق] د ب هـ [ع، ط] د ز ح [ف] / خط: ناقصة [هـ] / يماس: تماس [ب، ش، ل] / هـ د ز: د هـ ز [جـ، ت، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، ف، ق، م، ي] / كان: وكان [هـ] – 9 هـ د ز: د هـ ز [جـ، ق] د ر [خ].

www.j4know.com

ثم ليكن الدائرة هـ د ز وخط ح و أطول من محيطها، وليكن محيط ا ب جـ مثل خط ح و.
وإذا عمل في دائرة ا ب جـ مضلع لا يماس محيط هـ د ز، كان جميع أضلاعه أقصر/ من محيط ج – ٤٣ – و
ا ب جـ، أعني/ من خط ح و. ثم إذا عمل على دائرة هـ د ز / مضلع/ يماسها ويشبه/ المضلع ص – ١٢٥ د – ١٤٨ – ظ
المذكور، كان جميع أضلاعه أقصر كثيرًا من خط ح و؛ وذلك ما أردناه. ت – ٢٧٥ ر – ٣٦
أقول: هذا مبنيّ على وجود دائرة يساوي محيطها أي خط محدود يفرض، وهذا مما لم يبيّن / في س – ٦ – و
موضع./ ک – ٢١٦ – و

– دَ – كل دائرة فسطح/ نصف قطرها في نصف محيطها / هو مساحتها. ل – ٣ – و
فليكن الدائرة ا ب جـ والمركز هـ ونصف القطر هـ جـ. فإن لم يكن سطح هـ جـ في نصف ق – ٢٧ – ظ
محيط ا ب جـ مساويًا / لمساحة الدائرة، كان سطح هـ جـ في خط إما أطول من نصف محيط ذ – ٣٧٤ – ظ
ا ب جـ /أو أقصر منه مساويًا لمساحتها. ش – ١٦٣ – ظ



1 هـ د ز: د هـ ز [ق] هـ د [ي] هـ هـ د ر [خ] / محيطها: محيط [خ، ي] / محيط: ناقصة [جـ، س] / ا ب جـ: ا ب ح و [خ] / مثل خط ح و: ناقصة [خ] / ح و: ح ر [ض] ح [ي] – 1-3 ثم ... ح و: مكررة [ص] – 2 وإذا: فإذا [ي] إذا [ث] / يماس: يماس على [ا] تماس [ب، ش، و] / هـ د ز: د هـ ز [ق] هـ د هـ [جـ] – 3 ا ب جـ: ا ب ح [س] / خط: ناقصة [ح] / ثم: وثم [و] / على: أثبتها في الهامش [ف] / هـ د ز: د هـ ز [ق] د ر [خ] / يماسها: تماسها [ب، ش] – 4 كان: وكان [خ] / كثيرًا: ناقصة [ک، ل] / ح و: ح [خ، ط، ي] – 5 وجود: وحد [خ] / يساوي: تساوي [خ] / محدود: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / وهذا: هذا [ب، ش، ص] / مما: بما [ذ، ط] / يبين: يتبين [ح، خ، ق] – نجد تعليقًا في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص، هـ]؛ انظر Notes complémentaires – 7 دَ: ناقصة [س، ش، ص، ض، ع؛ ط، ق، ي] / قطرها: قصرها [و] / محيطها: محيط [ع] / هو: وهو [ي] – 8-9 فإن ... هـ جـ: ناقصة [س] – 8 هـ: ناقصة [و] / القطر هـ جـ: القطرة ح [خ] – 9 محيط: نحط [ط] / مساويًا لمساحة: وبالمساحة [ي] / هـ جـ: هـ [ت] هـ ح ا [خ] / إما: ا هـ [ي] / من: مكررة [ت] – 10 أو: اذا [و] و [خ] / أقصر: اقطر [خ] / منه: منه او [جـ، س].

www.j4know.com

وليكن أولاً المساوي لها سطح هـ جـ في خط أقصر من نصف محيط ا ب جـ، وليكن ذلك
الخط ح و. فضعف / ح و أقصر من محيط ا ب جـ. وقد يمكن أن يعمل في دائرة ا ب جـ مضلع ع – ٧٩ – ظ
يكون جميع أضلاعه أطول من ضعف ح و ونصفه أطول من ح و. ويكون نصف قطر هـ جـ في
نصف جميع أضلاع ذلك المضلع أصغر من مساحة / الدائرة، فسطح هـ جـ في ح و أقل من ب – ١٥٧ – ظ
مساحة / الدائرة كثيرًا. وكان مثلها، هذا خلف. ف – ١٣٠ – و

ثم ليكن المساوي لمساحتها سطح هـ جـ في خط أطول من نصف محيط ا ب جـ، وليكن
ذلك الخط ح و. فضعف ح و أطول من محيط الدائرة. وقد يمكن أن يعمل على دائرة ا ب جـ
مضلع يكون جميع أضلاعه أقصر من ضعف ح و، ونصفه أقصر من ح و. ويكون سطح نصف
قطر هـ جـ في نصف جميع أضلاعه أعظم من مساحة الدائرة، فسطح هـ جـ في ح و أعظم كثيرًا
منها. وكان مثلها، / هذا خلف. فإذن سطح هـ جـ في نصف محيط ا ب جـ مساوٍ لمساحة / دائرة ط – ٢٥٨ – و ر – ٣٧
ا ب جـ؛ وذلك / ما أردناه. ت – ٢٧٦ ا – ٩٨ – ظ

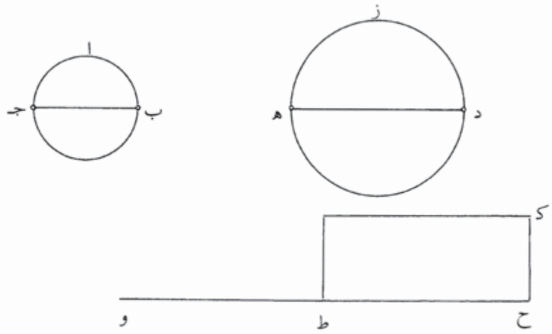
وقد بان/ منه أن سطح نصف القطر في نصف أي/ قوس تفرض يكون مساويًا / لمساحة خ – ١٨٥ – و ذ – ٣٧٥ – و
القطاع الذي تحيط به تلك / القوس ونصفا قطرين / يمرّان / بطرفيها./ ث – ١٧٨ – و و – ١٦٥ – و م – ٢٠

– هـ – نسبة قطر كل دائرة إلى / محيطها واحدة. ح – ٨٧ – و ل – ٣ – ظ
فلتختلف/ دائرتا/ ا ب جـ د هـ ز وليكن ب جـ قطر ا ب جـ ود هـ قطر د هـ ز. ك – ٢١٦ – ظ ي – ٦٠ – و

1 أولاً: ناقصة [ف] / لها: أثبتها في الهامش [ط] – 2 ح و: ح ز[م] ناقصة [ي] / فضعف: وضعف [ا، ك، ض، ق، ل، ن، و] ومضعف [ث] ناقصة [ي] تضعيف [خ] / ح و: ح هـ [م] ا ب جـ [و] / يعمل: نعمل [ر، ق] – 3 يكون: مكررة [ي] / ح و: ح ر[خ] / ونصفه: والصفة [خ] ر نصفه [ض] / ح و: ح [ذ، ط] حـ ر[ض] / ويكون: يكون [و] / قطر: قطره [و] – 3-4 أضلاعه... جميع: ناقصة [م] – 4 جميع: ناقصة [ض] / هـ جـ: ح حـ [هـ] / ح و: ح ر[جـ، ت] / أقل: واقل [ا] / من: ناقصة [خ] – 4-5 فسطح... الدائرة: ناقصة [م] – 5 كثيرًا: كثير[ع] ناقصة [ي] / وكان: اذا كان [ي] / مثلها: قبلها [ي] / هذا خلف: «هف» في كل النص [ب، جـ، ت، ش، ع، ق] – 6 ثم: لنتم [ي] تم [خ] / أطول: ناقصة [ع] / نصف: بعد [ض] – 6-7 ا ب جـ ... محيط: ناقصة [ع] – 7 فضعف: وضعف [ا، ب، ت، ث، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ط، ف، ق، ك، ل، ن، م، و، هـ، ي] ناقصة [جـ] / ح و: ناقصة [جـ] و[ض، ل] / من: ناقصة [ذ، ط] / يعمل: نعمل [ت، ث، ق، هـ] – 8 ونصفه: والصفة [خ] / من: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / ونصفه ... ح و: ناقصة [س] / ويكون: يكون [خ، ض، ع، ي] / سطح: أثبتها في الهامش [هـ] – 9 أضلاعه: مكررة [ع] / مساحة: محيط [ع] / هـ جـ: ح حـ [هـ] / ح و: ح وح [ع] هـ و[ض] – 10-11 فإذن ... أردناه: ناقصة [خ، ي] – 10-12 دائرة ... لمساحة: ناقصة [م] – 10 هـ جـ: هـ ح [ع] – 11 ا ب جـ: ناقصة [ش] – 12 القطر: أثبتها في الهامش [جـ] القطره [خ] / نصف أي: اي نصف [د، هـ] / تفرض: ناقصة [س] بعرض [خ] / يكون: أثبتها في الهامش [ن] ناقصة [ض] / مساويًا: مساو[ص] فوق السطر[ض] – 13 به: ناقصة [جـ] / القوس: المقوس [ع] / يمران: تمران [و] / بطرفيها: بطرفها [ا، د، ذ، ع، ط] بطرقيها [خ] – 14 هـ: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، و، ي] / قطر: أثبتها في الهامش [ف] / واحدة: واحد [هـ] – 15 فلتختلف: فتختلفا [ذ، ط] / دائرتا: دائرة [ت] ناقصة [س] دائراتا [خ] / د هـ ز: د هـ [م] / د هـ ز: د هـ [خ، ذ، ع].

www.j4know.com

فإن لم يكن//كما ادّعينا، فلتكن نسبة ب ج إلى محيط ا ب ج كنسبة د هـ إلى ح و وح و وإما ن – ١١٧ – و
أطول من محيط د هـ ز أو أقصر منه. ض – ٧٣ – و



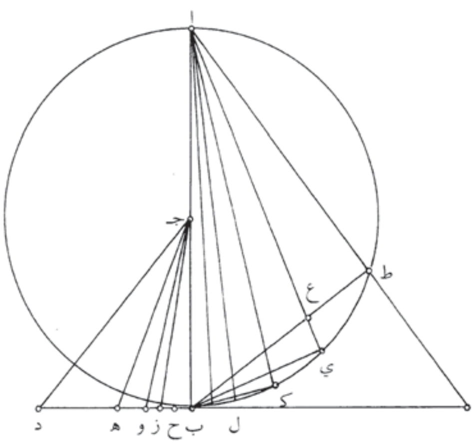
ونجعله أولاً أقصر منه. وننصّف ح و على ط، وليكن عمود/ ح ك على ح و ومساويًا لنصف س – ٦ – ظ
د هـ. ونتمم سطح ك ط، فسطح ك ط أصغر من مساحة دائرة هـ د ز. ولكن نسبة ك ح إلى ح ط كنسبة نصف ب ج إلى نصف محيط ا ب ج، وسطح ك ح في ح ط هو سطح ك ط، وسطح نصف ب ج في نصف محيط ا ب ج هو سطح دائرة ا ب ج. فنسبة سطح ك ط إلى دائرة ا ب ج كنسبة ك ح،/ أعني نصف د هـ، إلى نصف ب ج مثناة، وهي نسبة د هـ إلى ع – ٨٠ – و
ب ج مثناة. وقد بيّن / أقليدس/ أن نسبة د هـ إلى ب ج مثناة كنسبة دائرة د هـ ز إلى دائرة هـ – ٦٢ – و
ا ب ج، فنسبة سطح ك ط إلى دائرة ا ب ج كنسبة دائرة د هـ ز إليها، فسطح ك ط مساوٍ ق – ٢٨ – و
لدائرة د هـ ز. وكان / أصغر منها، هذا خلف./ فليس خط ح و أقصر/ من محيط د هـ ز. ش – ١٦٤ – و
ص – ١٢٦
ذ – ٣٧٥ – ظ

1 د هـ: هـ د [ا] / ح و: حـ و[خ] / وح و: ناقصة [ف] وح هـ [ح] رح و[ي] – 3 ونجعله ... منه: ناقصة [ذ، ع، ط] / وننصف: ونصف [ذ، ع، ط] / عمود: عمودا [ذ، ط] / ح ك: ك ح [ق] ح ط [ذ، ع، ط] / ح و: ح هـ [ا] / مساويًا: مساو[ت] – 4 ونتمم: وتمم [ذ، ع، ط] / ك ط: ط ك [س] ا ط د [خ] / فسطح ك ط: ناقصة [خ، س] / أصغر: وسطح نصف أصغر[ي] / هـ د ز: د هـ ز [ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] د ز[ا] هـ ز د [س] / ولكن: وليكن [ت، جـ، ر، ح، س، ق] / ك ح: ط ح [ذ، ع، ط] ا ب ح [خ] – 5 ب ج: ب ح [و] / نصف: أثبتها في الهامش [ف] / محيط: بحيط [و، ي] / وسطح: وسط [ش] / ك ح: ب حـ [خ] / ك ط: ا ط [خ] – 6 وسطح: وسطح و[ح] / ك ط: ا ط [خ] – 7 كنسبة ك ح: ناقصة [ل] / ك ح: ط ح [س] ا ب حـ [خ] / د هـ: رهـ [م] / ب ج: د ج [ج] / وهي: هي [ي] – 8 وقد ... مثناة: مكررة [ذ، ط] / أقليدس: أوقليدس [ص، ض، ک، ل، ن، هـ، و] / نسبة: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] / ب ج: ناقصة [ي] – 8-10 إلى دائرة ... د هـ ز (الأولى): ناقصة [م] – 9 ا ب ج: الى ب ج [ع] / فنسبة: ونسبة [ا] / سطح: مكررة [ج] / ك ط: ط ك [ب، ش، ض، ن، ک، ل، و] / د هـ ز: د هـ [د، هـ] / فسطح: سطح [ي] / ك ط: ط ك [ک، ل] – 10 لدائرة: للدائرة [خ] / منها: منها [هـ] / هذا خلف: هف، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [س] / فليس: فليكن [ت]؛ كتبها أولاً «فليكن» ثم ضرب عليها بالقلم [ع] / ح و: و[ع] / محيط: المحيط [ت] / د هـ ز: د هـ [هـ] هـ ز [ي] د هـ هـ ر [خ].

www.j4know.com

وبمثل هذا التدبير نبيّن أنه ليس أطول منه. فإذن نسبة د ه إلى محيط د ه ز كنسبة ب ج إلى محيط ا ب ج، وكذلك في كل دائرتين غيرهما؛ وذلك ما أردناه./

– وَ – ثم لنبيّن نسبة القطر إلى المحيط بالوجه الذي عمل به أرشميدس، فإنه لم يصل / إلينا ر – ٣٨ ت – ٢٧٧
وجه استخرجه أحد إلى زماننا غير ذلك./ وهذا الوجه وإن لم يوصل إلى معرفة قدر أحدهما من ط – ٢٥٨ – ظ
الآخر حتى ينطبق به على الحقيقة، فإنه موصل إلى استخراج قدر أحدهما من الآخر إلى أي غاية أراد الطالب من التقريب./



وليكن/ لبيانه دائرة ا ط ب وقطرها ا ب، ومركزها ج. ونخرج من ج خط ج د يحيط مع ل – ٤ – و
ج ب بثلث قائمة، ونخرج من ب / عمود ب د على ج ب. فالقوس التي توتر زاوية ب ج د ك – ٢١٧ – و
نصف سدس دائرة ا ط ب، / وخط ب د نصف ضلع المسدس المحيط بدائرة ا ط ب. وننصف ب – ١٥٨ – و خ – ١٨٥ – ظ

1 التدبير: الدبىن [و] / نبين: بين [ذ، ط] يتبين [ح] / نسبة: ناقصة [م] / محيط: محيطا [م] / د ه ز: د ه [ا، ت، ي] / كنسبة: وكنسبة [خ] – 2 في: آ في [خ] / غيرهما: عندهما [ض] غير فيما [خ] / أردناه: من هنا إلى صفحة 91 ناقص في [ر] – 3 وَ: نجدها في بداية الفقرة التالية [ا، ب، ث، ح، ص، ف، ك، ل، ن، م] ناقصة [ت، خ، س، ش، ض، ع، ق، و] / به: ناقصة [ع، ط] / يصل: نصل [و] – 4 استخرجه: استخراج [ق] استخراجه [ا، ث، ج، ح، ص، ض، ك، ل، ن، و] استخراجه من [ت] استخراجه عن [س] / زماننا: هذا الزمان [ت] زمان [ج] / وهذا: ناقصة [ت] / يوصل: يصل [ب، ش، ص] / إلى: من [ع] / قدر: قد [ض] – 4-5 من الآخر: ناقصة [ق] – 5 حتى ... الآخر: ناقصة [ض] / ينطبق: ينطق [ا، ب، ث، ه، ح، خ، د، س، ش، ع، ط، ف، ق، ك، ن، م، و] نه لحق [ي] / الحقيقة: الحقيقي [ق] الحقيقة ولكن [خ] / قدر: ناقصة [ت] قد [و] قدر احد ر [خ] – 6 الطالب: الطلب [و] / من التقريب: تقريبا [ف] – 7 وقطرها: قطرها [ه] / ا ب: ناقصة [ذ، ع، ط] – 8 ج ب: ج د [م] / بثلث: ثلث [ق] / ب د: ر د [ت] / فالقوس: والقوس [ق] / التي: الذي [س] – 9 نصف: ناقصة [ض] / المسدس: السدس [س] / ا ط ب: أثبتها فوق السطر [ث] / وننصف: وبنصف [خ، س] ناقصة [ذ، ع، ط].

زاوية ب ج د بخط ج هـ، وننصف زاوية ب ج هـ بخط ج و،/ وننصف زاوية ب ج و بخط ف – ١٣٠ – ظ
ج ز، وننصف زاوية ب ج ز بخط ج ح. فبيّن أن القوس/ التي توتر زاوية ب ج ح جزء من س – ٧ – و
١٩٢ من محيط ا ط ب،/ وأن خط ب ح نصف ضلع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط بدائرة ج – ٤٣ – ظ
ا ط ب. ولنجعل ج د / ٣٠٦ لسهولة العمل كما تبيّن، فيكون مربعه ٩٣٦٣٦، وكان ب د ١٥٣ ض – ٧٣ – ظ ذ – ٣٧٦ – و
لأن زاوية ب ج د ثلث زاوية / ج ب د القائمة، وكان مربع/ ب د ٢٣٤٠٩ ومربع ج ب ي – ٦٠ – ظ
٧٠٢٢٧، فخط ج ب أكثر من ٢٦٥. ولكن نسبة ب ج ج د مجموعين إلى ب د كنسبة
ج ب إلى ب هـ، لأن ج هـ ينصف زاوية/ ب ج د؛ وب ج ج د مجموعين / أكثر / من م – ٢١
٥٧١، وب د ١٥٣، فنسبة ج ب إلى ب هـ أعظم من نسبة ٥٧١ إلى ١٥٣. وبالمقدار الذي ع – ٨٠ – ظ و – ١٦٥ – ظ
يكون ب هـ / ١٥٣، يكون ج ب أكثر من ٥٧١ ومربعه أكثر من ٣٢٦٠٤١ ومربع ب هـ ت – ٢٧٨
٢٣٤٠٩ ومربع ج هـ أكثر من ٣٤٩٤٥٠، فخط ج هـ أكثر من ٥٩١ وثمن.

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ج ب إلى ب و أعظم من نسبة/ ١١٦٢ وثمن/ إلى ١٥٣. ا – ٩٩ – و
وإذا كان ب و / ١٥٣، كان ج ب أكثر من ١١٦٢ وثمن، ومربعه أكثر من ١٣٥٠٥٣٤، ومربع د – ١٤٩ – و ق – ٢٨ – ظ
ب و ٢٣٤٠٩ ومربع ج و أكثر من ١٣٧٣٩٤٣، فخط ج و أكثر من ١١٧٢/ وثمن. ل – ٤ – ظ

1 زاوية ... ج هـ: ناقصة [ذ، ع، ط] / ب ج د: رجد [س] / ج هـ: ج د [م] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / ب ج هـ: ب هـ ج [ل] ب ج هـ د [ذ] / بخط: ناقصة [خ] / ج و: ج [ذ، ع] و[خ] حـ ر[ض] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / زاوية: ناقصة [ت] / ب ج و: ب ج ر [م] ب ج د [ج، ت] ب ج [و] / بخط: وبخط [س] – 1-2 ب ج و ... زاوية (الأولى): ناقصة [ي] – 2 وننصف: وبنصف [خ، س] / زاوية: أثبتها فوق السطر [ث] / ب ج ز: ب ج د [ي] / ج ح: كرر ناسخ [ط] بعدها «ننصف زاوية ب ج و»، ثم استدرك فأشار فوقها / فبين: فتبين [ا، ت، ث، خ، ض] / جزء: مرا [ي] ح ر [خ] – 3 من: ناقصة [ص، و] / ا ط ب: ل ط ب [ي] / وأن: فان [ث] / ذي: اي [ي] – 4 ج د: ح د [ت] / ٣٠٦: ٣٠٩ [ض] ٣٠٤ [ي] / لسهولة: بسهولة [ب، ش] / تبين: يتبين [ا، ب، ت، ث، خ، د، ش، ص، ض، ک، ن، و] / ٩٣٦٣٦: ٩٣٦٣ [ط] ٩٣٦٢٦ [هـ] ٩٣٩٣٩ [ض] / ب د: نجد في هامش [د، ص، هـ] التعليق التالي «فيكون ب د وتر السدس في الدائرة التي قطرها ج د ف ج د ضعفه» / ١٥٣: ٥٣ [هـ] – 5 ج ب د: ج ر د [ج، ت] / القائمة: القائمة مربع [ث] / مربع: سطح [ط] / ٢٣٤٠٩: حـ ٢٣٤٠ [ت] ٣٣٤٠١ [هـ] ٢٢٤٠٩ [ض] ٢٣٤٥٩ [ذ] / ج ب: ب ج [س] ناقصة [و] في ب [خ] – 5-6 زاوية ج ب د ... ج ب: ناقصة [ا] – 6 ٧٠٢٢٧: ٧٠٣٢٧ [ت] ٧٠٢٢٠ [خ] / ٢٦٥: ٢٦٩ [ض] / ولكن: وليكن [ح، ي] – 7 ج ب: ب ج [و] / ينصف: بنصف [ط] تنصف [س]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «إذ من التنصيف يلزم أن تكون نسبة د ج إلى ج ب كنسبة د هـ إلى هـ ب وإذا ركبنا وبدلنا يلزم ما ذكر» / وب ج: ناقصة [م] / ج د: ج هـ [ص] / مجموعين: مجموعان [د] / أكثر، كتبها أكبر، ولن نشير إليها فيما بعد [س] – 6-7 إلى ب د ... مجموعين: مكررة [ط] أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ث] – 8 ٥٧١: ٥٧٠ [ف] / ١٥٣: ١٤١٣ [ي] ١٤٠٣ [خ] / ب هـ: نه [خ] / أعظم: مكررة [ص] / ٥٧١ إلى ١٥٣: ١٥٧١ [د] – 8-9 فنسبة ... ٥٧١: مكررة، ونجد بعدها «وب د ١٥٣»، ثم كرر مرة أخرى «فنسبة ... ٥٧١» [ت] – 9 ب هـ: نه [خ] / يكون ب هـ ١٥٣: مكررة [س] / ١٥٣: ١٤١٣ [ي] / ٥٧١: ٤١٧١ [ي] / ومربعه: ومربعة [ث] / ٣٢٦٠٤١: ٣٢٦٥٤١ [ک، ل] ٣٢٦٠١٦١ [خ] / ب هـ: ناقصة [و] – 9-10 ٣٢٦٠٤١ ... من (الأولى): ناقصة [ع] – 10 ٢٣٤٠٩: ٢٣٤٩ [خ] / ٣٤٩٤٥٠: ٣٤٩٤٥ [هـ] ٣٩٤٥٠ [خ، ي] / ٥٩١: ٩٩١ [م] – 11 ذلك: دكل، ثم أثبت الصواب تحتها [ا] / ج ب: ب ج [ک، ل] / ب و: ب ر [ض] / ١٥٣: ٦٥٣ [ت] ١٥٢ [ف] – 11-12 إلى ١٥٣ ... وثمن: ناقصة [ل] – 12 وإذا: فاذا [ث] / وإذا ... ١٥٣: ناقصة [ج، ت] / وإذا كان: كان وإذا [ح] / ب و: تو [ي] / ١٥٣: ١٠٣ [ع] ١٦٣ [ح] / كان: وكان [ت] / من: ناقصة [ت] / ومربعه: مربعه [ذ، ط، ع] / من: أثبتها في الهامش [ن] / ١٣٥٠٥٣٤: ١٣٠٥٣٤ [د، هـ] ١٣٥٠٠٣٤ [ع] ١٣٥٠٠٣٩٤ [ط] ١٣٥٣٤ [خ، س] ١٣٥٥٣٤ [ي] – 13 ب و: ب د [ت] ناقصة [و] / ٢٣٤٠٩: حـ ٢٣٤٠ [ت] ٢٤٠٩ [خ] / ج و: حـ هـ [ت، ج، خ، ذ، س، ع، ط، ق، م، ي] / أكثر من: ناقصة [ي] / ١٣٧٣٩٤٣: ١٢٧٣٩٤٣ [ق] ١٧٣٩٤٣ [ح] / ج و: حـ وهـ [ذ، ع، ط] ج د [ت].

www.j4know.com

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة جـ ب إلى ب ز أعظم من نسبة ٢٣٣٤ وربع إلى ١٥٣. فإذا كان ب ز / ١٥٣، كان جـ ب أكثر من ٢٣٣٤ وربع، / ومربعه أكثر من ٥٤٤٨٧٢٣، / ومربع ب ز ٢٣٤٠٩، ومربع جـ ز أكثر من ٥٤٧٢١٣٢، / فخط جـ ز أكثر من ٢٣٣٩ وربع. ث – ١٧٨ – ظ / ن – ١١٧ – ظ / ک – ٢١٧ – ظ

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة جـ ب / إلى ب ح أعظم من نسبة ٤٦٧٣ ونصف إلى ١٥٣. فإذا كان خط ب ح ١٥٣، كان جـ ب أكثر من / ٤٦٧٣ ونصف. وهذا / هو قدر ضلع ذي ستة وتسعين ضلعًا/ عند القطر. فقدر القطر عند جميع أضلاع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط بالدائرة أعظم / من قدر ٤٦٧٣ ونصف عند ١٤٦٨٨ وهو أقل من ثلاثة وسبع من الواحد. ط – ٢٥٩ – و / ذ – ٣٧٦ – ظ / س – ٧ – ظ / ش – ١٦٤ – ظ / ت – ٢٧٩ / خ – ١٨٦ – و

ثم نخرج في دائرة ا ط ب وتر السدس، وهو ط ب، ونخرج ا ط، وننصف زاوية ط ا ب بخط ا ي ونصل ي ب، / وننصف زاوية ي ا ب بخط ا ک ونصل ک ب، وننصف زاوية ک ا ب بخط ا ل ونصل ل ب، وننصف زاوية ل ا ب بخط ا م ونصل م ب، فيكون م ب ضلع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط به الدائرة. ثم نجعل ا ب ١٥٦٠ لسهولة/ هذا العمل، / فيكون وتر ب ط ٧٨٠/، ويكون مربع ا ب ٢٤٣٣٦٠٠ ومربع ب ط ٦٠٨٤٠٠ ومربع ط ا ١٨٢٥٢٠٠، فخط ط ا أقل من ١٣٥١. ولكن نسبة ط ا ا ب معًا إلى ط ب كنسبة ا ط إلى ط ع وهي كنسبة ا ي ب – ١٥٨ – ظ / ض – ٧٤ – و / ع – ٨١ – و / ص – ١٢٧

1 وعلى: على [خ] / ب ز: ب و [س] / ٢٣٣٤: ٢٣٢٤ [م] ٢٣٣٢ [ض] / ١٥٣: ١٣٣ [جـ] ٥٣ [ع] ١٥٢ [م] – 2 كان ب ز: كانت ز [م] / ب ز: ب و [س] / ١٥٣: ٥٣ [جـ] ٤٣ [خ] / ٢٣٣٤: ٣٣٤ [جـ] ٢٣٢٤ [هـ] / ومربعه: مربع [ذ، ع، ط] ومربعة [ث] / ٥٤٤٨٧٢٣: ٤١٤٧٧٢٣ [خ] – 2-3 ٥٤٤٨٧٢٣ ... من (الأولى): ناقصة [ط] / ومربع ب ز ٢٣٤٠٩: ناقصة [ع] – 3 ب ز: ب د [جـ، ت، ذ] / ٢٣٤٠٩: حـ ٢٣٤٠ [ت] / جـ ز: أثبتها فوق السطر [و] / من: ناقصة [ا، ع] / ٥٤٧٢١٣٢: ٥٤٧١٣٢ [ي] / من: ناقصة [ص، ض، ن، ک، ل، و] / وربع: ومربع [خ، و] – 4 نبين: بين [ي] / نسبة: ناقصة [ع] / ب ح: ب حـ [س، ض، ع] / ٤٦٧٣: ٤٦٧٢٣ [ذ، ع، ط] ٤٦٧٢ [م] ٤٩٧٣ [ض] / إلى: ناقصة [ذ، ع، ط] / ١٥٣: ١٢٣ [خ] – 5 فإذا: وإذا [خ] / خط: ناقصة [ت، جـ، س] / ب ح: ب حـ [س، ص] / ١٥٣: ١١٥٣ [ط] كتب بعدها «وكان وح ١٥٣» [جـ، ت] / جـ ب: جـ ا [ا] ب جـ [ل] / ٤٦٧٣: ٤٩٧٣ [س] – 6 فقدر: بقدر [س] / عند القطر ... ضلعًا: ناقصة [ا] / أضلاع: ناقصة [خ] / يحيط: يحيطها [ي] محيطها [خ] / بالدائرة: الدائرة [خ، ي] – 7 من: ناقصة [ي] / ٤٦٧٣: ٤٦٧٢ [ع، م] ٤٢٧٢ [ذ، ط] / عند: ناقصة [خ، ف، م، ي] / ١٤٦٨٨: ٤٦٨٨ [ا، خ] ١٢٦٨٨ [س] / نجد في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، هـ] التعليق التالي «فما بإزاء جميع الأضلاع أطول من ثلاثة أمثال ما (ناقصة في [ا]) بإزاء القطر ستمائة وسبعة وستين ونصف التي (الى في [د]) نسبتها إلى أجزاء القطر أقل من السبع» / وهو أقل من ثلاثة: مكررة [م] – 8 ا ط ب: ط ب [ع] ل ط ب [ي] / ط ب: ط ا [و] / ونخرج: نخرج [و] / ونخرج ا ط: ناقصة [م] / وننصف: وبنصف [س، ط] ونصف [و] – 8-9 وننصف ... ي ب: ناقصة [ا] / ط ا ب ... ک ب: مكررة [د] – 9 ا ي: ا ح [ت] ا ب [ف] / ي ب: ح ب [ت] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط، م] ونصف [ا، و] / ي ا ب: ح ا ب [ت] / ک ب: ک [ذ، ط، ع] ا ب [خ] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / ک ا ب بخط: ا ب ک ط [خ] / وننصف زاوية ي ا ب ... ک ب: مكررة [ي] – 9-10 وننصف ... ل ب: مكررة [ا] – 10 ل ب: ا ب [ب، ش] ک ب [خ] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / ل ا ب بخط: ا ب ک ط [خ] / فيكون م ب: ناقصة [ذ، ع، ط] / م ب: من ب [ب، ش] – 11 يحيط: محيط [ي] / به: أثبتها فوق السطر [ن] / ثم: ناقصة [ي] / ١٥٦٠: ١٥٦ [ذ، ع، ط] ١٠٦٠ [خ] / لسهولة: السهولة [ا] / ب ط: نجد في [ا، ب، د] التعليق التالي «لأن النسبة بينها نسبة الاثنين إلى الواحد» – 12 ٧٨٠: ١٧٨٠ [د] ١١٨٠ [ض] / مربع ا ب ... ٢٤٣٣٦: فراغ [ذ] / ا ب: ناقصة [و] / ٢٤٣٣٦٠٠: ٢٤٣٣٦٠ [خ، م] / ب ط: رط [م] ل ط [خ] / ٦٠٨٤٠٠: ٦٨٤٠٠ [ذ، ع، ط، م] / ١٨٢٥٢٠٠: ١٧٢٥٢٠٠ [س] ١٨٢٩٢٠٠ [هـ] ٨٢٥٢٠ [خ] – 11-12 ١٥٦٠ ... مربع ا ب: ناقصة [م] – 13 ط ا: ا ط [م] / من: ناقصة [ت] / ١٣٥١: ١٣٥ [خ، ي] / ولكن: وليكن [ب، جـ، ح، ذ، ش، ط] / ط ا ا ب: ط ا ب [خ] / ا ط: ط ب [و] / ا ي: ا ح [ت].

إلى ي ب./ وخطا ط ا ا ب معًا أقل من ٢٩١١ وط ب ٧٨٠. فإذا كان ي ب ٧٨٠، كان ا ي ي – ٦١ – و
أقل من ٢٩١١، // ومربع ا ي أقل من ٨٤٧٣٩٢١ ومربع ي ب ٦٠٨٤٠٠، ومربع ا ب أقل ذ – ٣٧٧ – و ف – ١٣١ – و
من ٩٠٨٢٣٢١؛/ فخط ا ب أقل من ٣٠١٣ وثلاثة أرباع واحد. ل – ٥ – و

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ا ک إلى ک ب أقل من نسبة ٥٩٢٤ وثلاثة أرباع واحد إلى
٧٨٠. فإذا كان خط ک ب ٧٨٠، كان ا ک أقل من ٥٩٢٤ وثلاثة أرباع / واحد. وقدر ٥٩٢٤ ت – ٢٨٠
وثلاثة أرباع واحد عند ٧٨٠ كقدر/ ١٨٢٣ عند ٢٤٠. فإذا كان ک ب ٢٤٠، كان ا ک أقل من و – ١٦٦ – و
١٨٢٣، ومربع ا ک أقل من ٣٣٢٣٣٢٩، ومربع ک ب ٥٧٦٠٠، فمربع ا ب أقل من
٣٣٨٠٩٢٩، فخط ا ب أقل من ١٨٣٨ / وتسعة أجزاء من أحد / عشر من واحد./ ک – ٢١٨ – و

وعلى ذلك المثال نبيّن أن / نسبة ا ل إلى ل ب أقل من نسبة ٣٦٦١ وتسعة من أحد عشر إلى ق – ٢٩ – و س – ٨ – و
٢٤٠، وقدر ٣٦٦١ وتسعة من أحد عشر عند ٢٤٠ كقدر ١٠٠٧ عند ٦٦. وإذا كان/ ل ب ط – ٢٥٩ – ظ ا – ٩٩ – ظ
٦٦، كان ا ل أقل من ١٠٠٧، ومربع ا ل أقل من ١٠١٤٠٤٩، ومربع ل ب ٤٣٥٦، ومربع
ا ب أقل من ١٠١٨٤٠٥، فخط ا ب أقل من ١٠٠٩ وسدس واحد.

1 ي ب: ا ي ب [خ] / وخطا: وخط [ب، ث، ذ، ش، ص، ض، ع، ط] ناقصة [جـ] / ط ا: ا ط [ث] / وط ب: ناقصة [ا، ب، ش، ص، ض؛ ک، ل، ن، و] / ٧٨٠.: ٧٨ [خ، م] ناقصة [ا، ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] / فإذا: فاذن ان [جـ، ت] / ي ب: ح ب [ت] / كان: وكان [ع] ناقصة [ي] / ا ي: ا ح [ت] – 2 من: قد تقرأ «لكن» ونجد «دون» فوقها [ا] / ا ي: ا ح [ت] أثبتها في الهامش [ث] / ٢٩١١ ... من: مكررة [ي] / ومربع ا ي أقل: ناقصة [ک، ل] / من: ناقصة [ل] / ٨٤٧٣٩٢١: ٨٢٧٣٩٢ [و] ٨٢٧٣٩٢١ [ض] / ي ب: ح ب [ت] / ٦٠٨٤٠٠: ٢٠٨٤٠٠ [ذ، ط] أقل من ٦٠٨٤٠٠ [ل] ٦٠٧٤٠٠ [ح] ٦٨٤٠٠ [خ] – 3-2 من ٨٤٧٣٩٢١ ... فخط ا ب أقل: أثبتها في الهامش [ک] – 3 ٩٠٨٢٣٢١: ٩٠٨٢٣٣٢١ [ذ، ع، ط] ٩٠٧٢٣٢١ [ح، د] ٩٠٨٣٣٢١ [م] / أقل: قل [ل] / من ٣٠١٣: ناقصة [ک، ل] / ٣٠١٣: ٣٠١٢ [م] ٣١٣ [خ] / واحد: ناقصة [س] – 4 ک ب: ک ر [ع] ا ب [خ] / ٥٩٢٤: ٩٢٤ [ي] ٦٩٢٤ [خ] / واحد: كتب بعدها «وعلى ذلك المثال نبين أن نسبة»، ثم ضرب عليها بالقلم [ع] – 5-4 أقل ... خط: ناقصة [ل] / إلى ٧٨٠ ... واحد: ناقصة [ح، ذ، ع، ط، م] – 5 خط: ناقصة [و] / ک ب ٧٨٠: لب ٧٨ [ي] / ا ک: أثبتها في الهامش [ن] / وثلاثة: ثلثه [ي] / ٥٩٢٤: ٤٢٤ [خ] – 6-5 وقدر ... واحد: ناقصة [ت، ف] – 6 عند: عنده [س، ع] وعند [خ] / ٧٨٠ ... عند: مكررة [ح] / كقدر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «لأن نسبة كل واحد من العددين الأولين إلى نظيره من هذين العددين نسبة (كنسبة [ص]) ثلاثة وربع إلى الواحد» / فإذا ... ٢٤٠: ناقصة [س] / ک ب: ل ب [خ] / ٢٤٠، كان ا ک: ناقصة [جـ، ت] / ا ک: أثبتها في الهامش [ع] – 7 ١٨٢٣: ١٨٢٢ [ا] / ومربع: مربع [و] / ٣٣٢٣٣٢٩: ٣٣٢٣٣٩ [ع] ٣٣٢٣٣٣٢٩ [ص] ٣٣٣٣٣٢٩ [ت] ٣٣٢٣٢٩ [ح] / ک ب: ک ر [ع] / ومربع ک ب: مكررة [ث] غير واضحة [خ] / ٥٧٦٠٠: ٧٧٦٠٠ [جـ، ت، س] ٥٧٢٠٠ [ک، ل] – 8-7 ٥٧٦٠٠ ... ٣٣٨٠٩٢٩: مكررة [ث] – 8 ٣٣٨٠٩٢٩: ٣٣٨٠٢٩ [خ] / من: ناقصة [ع] / وتسعة: وستة [ي] نسبة [خ] / أحد عشر: ١١ [ت، جـ، ذ، ع، ط، م] – 9-8 من واحد ... عشر: أثبتها في الهامش [ث] – 9 المثال: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ل، ک، ن، م، و] / نبين: ناقصة [و] / نسبة (الأولى): ناقصة [ي] / ٣٦٦١: ٣٢٦١ [ک، ل] – 10-9 إلى ٢٤٠ ... عشر: مكررة [خ] – 10 ٣٦٦١: ٣٦ [ت] ٦٦١ [خ] / أحد عشر: ١١ [جـ، ت] / عند: ناقصة [ذ، ط] / كقدر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «إذ (أي [ا]) نسبة كل منها إلى نظيره من هذين العددين (ناقصة في [ا، د، ص، هـ]) نسبة أربعين إلى أحد عشر» / عند ٦٦: ناقصة [ف] / ١٠٠٧ عند ٦٦: ٦٦٠٠٧ [ع] / وإذا: فاذا [د] / كان: كانت [ي] / ل ب: ا ب [ض، و] – 11 من: ناقصة [ث، خ، ي] / ١٠٠٧ ومربع ا ل أقل: أثبتها في الهامش [ث] / من: ناقصة [ض، ک، ل، ن، و] / ١٠١٤٠٤٩: ٠١٤٠٤٩ [خ] ١٥١٤٠٤٩ [ذ] / ٤٣٥٦: ٤٣٥٤ [ذ، ط، ع] ٤٣٥٩ [ب، ش] – 12 من: ناقصة [ع] / ١٠١٨٤٠٥: ٠١٨٤٠٥ [ط] ١٠١٨٤٠ [خ] / ١٠١٨٤٠٥ ... أقل من: مكررة [ي] ناقصة [م].

www.j4know.com

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ا م إلى م ب أقل من ٢٠١٦ وسدس واحد عند ٦٦. فإذا كان
م ب ٦٦، كان ا م أقل من ٢٠١٦ وسدس،/ ومربع ا م أقل من ٤٠٦٤٩٢٨، ومربع م ب خ – ١٨٦ – ظ
٤٣٥٦ ومربع ا ب أقل من / ٤٠٦٩٢٨٤،/ فخط ا ب أقل من ٢٠١٧ وربع واحد. ولكن خط ذ – ٣٧٧ – ظ ش – ١٦٥ – و
م ب / بهذا القدر ٦٦ وخط م ب ضلع ذي ستة / وتسعين ضلعًا الذي تحيط به الدائرة. فنسبة م – ٢٢ ع – ٨١ – ظ
القطر إلى أضلاع / ذي ستة وتسعين ضلعًا الذي / تحيط به الدائرة أقل من نسبة ٢٠١٧ وربع ض – ٧٤ – ظ
واحد إلى ٦٣٣٦. جـ – ٤٤ – و

فقد / تبيّن أن نسبة جملة / أضلاع ذي / ستة وتسعين ضلعًا الذي تحيط به الدائرة إلى القطر ل – ٥ – ظ
أعظم من نسبة ثلاثة وعشرة أجزاء من واحد وسبعين إلى الواحد. ومحيط الدائرة أطول من جملة ذ – ٣٨٨ – و ث – ١٧٩ – و
أضلاع ذي ستة وتسعين / ضلعًا الذي تحيط به الدائرة وأقصر/ من جملة أضلاع / ذي ستة ن – ١١٨ – و
وتسعين ضلعًا الذي يحيط بالدائرة. فقد صحّ مما وصفنا أن نسبة محيط الدائرة إلى / قطرها أعظم ت – ٢٨١ ي – ٦١ – ظ
من نسبة ثلاثة وعشرة أجزاء من واحد وسبعين إلى الواحد وأصغر من نسبة ثلاثة وسبع إلى ب – ١٥٩ – و
الواحد؛ وذلك ما أردناه.

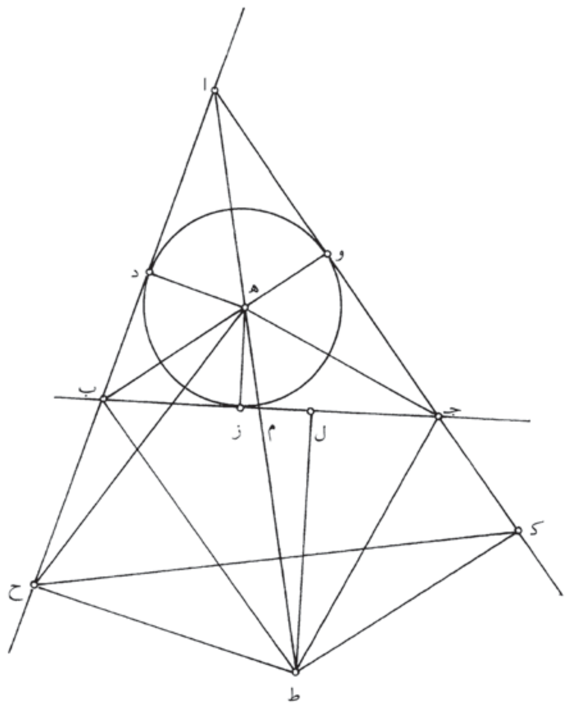
ومن الممكن أن يوصل بهذا / الوجه بعينه إلى أي غاية يراد من التدقيق في هذا العمل./ ک – ٢١٨ – ظ ح – ٨٧ – ظ

/ – زَ – كل مثلث إذا ضرب نصف جميع أضلاعه في فضله على كل/ ضلع من أضلاعه ز – ٣٧ – و س – ٨ – ظ
بأن يضرب في فضله على أحد أضلاعه، ثم في ثانيها ثم في ثالثها، كان / الحاصل مساويًا لضرب ق – ٢٩ – ظ
تكسيره في نفسه.

1-2 وعلى ... كان ا م أقل من: ناقصة [م] – 1 المثال: ناقصة [و] / ٢٠١٦: ٤٠١٦ [ل] ٢٠١٧ [هـ] ٢١٤ [خ] ٦٠١٦ [ض] – 2 ٢٠١٦ ... أقل: أثبتها في الهامش [ن] / ٢٠١٦ ... أقل من: ناقصة [س] / ٢٠١٦ وسدس: سدس و٢٠١٦ [ک، ل] / وسدس: سدس [و] / ومربع: مربع [و] / ا م: ناقصة [خ] / من: ناقصة [ض، ک، ل، ن، و] / ٤٠٦٤٩٢٨: ٤٠٨٤٩٢٨ [ص] ٤٠٤٩٢٨ [ا] ٤٠٦٩٢٨ [خ] – 3 ٤٣٥٦: ٤٢٥٦ [م] / ٤٠٦٩٢٨٤: ٤٠٦٩٢٨٢ [جـ، ت] ٤٠٦٩٣٨٤ [ک، ل] / من: ناقصة [ض، ک، ل، ن، و] / ٢٠١٧: ٢١٧ [خ] ٢٥١٧ [ذ] / وربع: ومربع [م] ربع [خ] / ولكن: وكل [هـ] – 4 بهذا: هذا [ب، ش] / القدر: القد [ل] / وخط: فخط من [ب، ش] / تحيط: تحيطه [ض] / به: ناقصة [جـ، س] أثبتها فوق السطر [ت] / فنسبة: ونسبة [س] – 4-5 فنسبة ... الدائرة: مكررة [ا] – 5 تحيط: ناقصة [س] / به: ناقصة [ص، ي] / ٢٠١٧: ٣٠١٧ [ت] ٢٩١٧ [م] – 5-7 ضلعًا ... جملة: مكررة [م] – 6 إلى: ناقصة [جـ] / ٦٣٣٦: ٩٣٣٦ [ض] ٦١٣٣٦ [خ] – 7 تبين: يتبين [ض] / أضلاع: اوضاع [خ] / ستة: تسعة [ض، ک، ل، ن، و] / القطر: القدر [ح] – 8 وعشرة: عشرة [ا] وعشر [ي] / واحد: احد، ثم أثبت الصواب فوقها مع «نحه» [ت] / ومحيط: ويحيط [خ] / جملة: جميع [ع، ق] – 9 أضلاع: اضلا [خ] – 9-10 به ... يحيط: ناقصة [ط، م] / وأقصر ... بالدائرة: ناقصة [ض، ن، ل، ک، و] – 10 يحيط بالدائرة: يحيط به الدائرة [خ] / صحّ: وضح [ا، ف] / مما: ما [جـ، ت، س] / وصفنا: وضعنا [خ، س، ک، ل، و] / إلى: التي [ق] – 11 نسبة (الثانية): نسبة الى [خ] / إلى: ال فى [ي] – 12 أردناه: أردنا [ل] – 13 يوصل: نوصل [د، ک] يفصل [هـ] ويوصل [ي] / بعينه: نفسه [ط] / إلى: ناقصة [د، ف، هـ] / أي: ناقصة [م] / يراد: ناقصة [ع] تراد [س] – 14 زَ: ناقصة [ا، ت، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] الشكل السابع من كتاب بني موسى [ز] / كل: وكل [ع، ط] / نصف: فوق السطر [ن] / على: على ما [ع] / ضلع: ناقصة [ع] – 15 في (الثانية): ناقصة [ط] / ثم في ثانيها: ناقصة [ل] / ثانيها: بينها [خ] / الحاصل: الخاصل [و] / مساويًا: مساو [ز] / لضرب: ناقصة [ز، ع] يضرب [ل] – 16 تكسيره: بكسره [ذ، ط] بكسيرة [خ] لتكسيره [ز].

www.j4know.com

فليكن المثلث ا ب جـ، ونرسم أعظم دائرة / يحيط بها وهي دائرة د ز و، وليكن مركزها هـ، ذ – ٣٨٨ – ظ
ونخرج هـ د هـ و هـ ز / إلى نقط التماس، ونخرج ا هـ. ونبين أن ا د ا و متساويان، وكذلك ب د ص – ١٢٨
ب ز وجـ و جـ ز. / وظاهر أن أحد خطي ا د ا و فضل نصف / جميع الأضلاع / على ب جـ، وأن و – ١٦٦ – ظ
أحد خطي ب د ب ز فضل نصفه على ا جـ، وأن أحد خطي جـ و جـ ز فضل نصفه على ا ب. ثم ط – ٢٦٠ – و / ز – ٣٧ – ظ
نخرج ا هـ إلى ط وا ب إلى أن يصير ب ح مثل جـ ز وا جـ / إلى أن يصير جـ ك مثل ب ز. فيكون د – ١٤٩ – ظ
كل واحد من ا ح ا ك مثل / نصف / جميع الأضلاع. ونخرج من نقطتي ح ك عمودي ح ط ف – ١٣١ – ظ / خ – ١٨٧ – و



1 د ز و: ور و[ذ، ع، ط] د ز هـ [ا] د ز[د، هـ] / هـ: ناقصة [ي] – 2 هـ و هـ ز: وهـ ز[م] هـ و[هـ] ر هـ ر[ي] هـ ر[خ] / نقط: نقطة [ا، ت، ح، ز، س، ط، ع، ف، ق، ل، م، هـ، و، ي] الفاظ [خ] / ا هـ: هـ ا [ل] / ونبين: ويتبين [ش] وتبين [ا، ب، و] / وكذلك: فكذلك [ي] – 3 ب ز: ر [ذ] / جـ و: حـ ر[ي] ناقصة [ض] / وظاهر: وظ [ت] فظاهر[ل، هـ] / أحد: ناقصة [جـ، ت] / ا د: د ا [ح] / ا و: و[ذ، ي] / فضل: يصل [خ، ي] / نصف: أثبتها فوق السطر[ت] / ب جـ: ا ب جـ [ع] – 3-4 وجـ و... ب ز: ناقصة [ف] / جميع ... نصفه (الثانية): ناقصة [خ] – 4 أحد: ناقصة [ت] واحد [ذ] / ب د: ب د د [ع] ب ز[س] / ب ز: ب د [س] / نصفه: نصف [و] / ا جـ: جـ [ي] / جـ و: هـ و[ع] / ثم: و[ذ] – 5 ط وا ب: أثبتها في الهامش [و] / وا ب: وت [خ] / أن: ناقصة [ذ، ط] / ب ح: ب حـ [و] / ب ز: ب [ت] / فيكون: ويكون [ب، ش] – 6 ا ك: ا ط [م] ك [ذ] / ونخرج: نخرج [ع، ط] / ح ط: ح ك، ثم أثبت الطاء في الهامش [ع] ط ح [ق].

www.j4know.com

ك ط، فيلتقيان ضرورة على نقطة واحدة من ا ط وهي نقطة ط / مثلاً، ويكون ط ح ط ك ع – ٨٢ – و
متساويين. وإن أردنا أخرجنا عمود ح ط ووصلنا ط ك وبيّنا أنه أيضًا عمود لتساوي / ضلعي ل – ٦ – و
ا ك ا ح، وكون ا ط مشتركًا وتساوي زاويتي ح ا ط ك ا ط. ونصل ب ط ط ج، ونفصل ب ل
من ب ج مثل / ب ح ونصل ط ل، فهو عمود على ب ج، لأن الفضل بين مربعي خطي ت – ٢٨٢
ب ط ط ج / كالفضل بين مربعي خطي ب ح ج ك، وب ح مساوٍ ل ب ل وج ك مساوٍ ه – ٦٢ – ظ
ل ج ل، فالفضل بين مربعي خطي ب ط ط ج كالفضل / بين مربعي خطي ب ل ل ج، ذ – ٣٨٩ – و
فلذلك/ ط ل عمود على ب ج. وهو مساوٍ ل ط ح لكون ب ح مساويًا ل ب ل وب ط ش – ١٦٥ – ظ
مشتركًا، وزاويتا ح ل قائمتين، / فتكون / زاويتا ل ب ط ح ب ط متساويتين. ونصل ه ب، ز – ٣٨ – و
فزاويتا ز ب ه د ب ه متساويتان. ولكون زاوية ل ب ح / مع زاوية ل ط ح كقائمتين، يكون / ض – ٧٥ – و م – ٢٣
زاوية ز ب د مساوية لزاوية ل ط ح، ونصفها / لنصفها. فزاوية ه ب د من مثلث ب د ه / ك – ٢١٩ – و ا – ١٠٠ – و
مساوية لزاوية ب ط ح من مثلث ب ح ط. وزاويتا ب د ه ب ح ط قائمتان، فمثلثا / ب د ه س – ٩ – و ي – ٦٢ – و
ب ح ط متشابهان: نسبة ه د إلى د ب كنسبة ب ح إلى ح ط. ود ب مثل ز ب وب ح مثل

1 ك ط: ك د [ج، ت] / فيلتقيان: فراغ [ذ] فللتقان [ط] فاالملتقيان [خ] فيلقيان [ض]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، ه] التعليق التالي «وليكن على ط فيكونان متساويتين لتساوي زاويتي ط ح ك ط ك ح لتساوي باقيتها، أعني ا ح ك ا ك ح، إلى قائمتين لتساوي ا ح ا ك ونخرج ا ه إلى م (ا ل م ا [ا]) ونصل ط م (ط م ا [ا])، ف ط م ا خط (ناقصة في [ا، د، ص، ه]) مستقيم لكون زوايا م قوائم، من كلام ابن الهيثم (من ... الهيثم: ناقصة [ا، ب، ش])» / ضرورة: ض [ت] / نقطة (الأولى): نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، ه] التعليق التالي «لأن لو رسمنا (لأنا إذا توهمنا [ا]) على ا ط دائرة لمرت بنقطتي ح ك ويلزم تلاقي العمودين على ط ضرورة (ناقصة في [ا، ب، ش، ص]) وإلا (ولا [ا]) يلزم الخلف» / واحدة: واحد [ي] / ط: ناقصة [ي] / مثلاً: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / ويكون: فيكون [ث] يكون [ذ] / ط ح: ح ط [ج، ت، ق] ط ب ح [خ] — 2 متساويين: متساويان [ز] / ط ك: ا ك [ذ] / وبينا أنه أيضًا: وبينا أيضًا أنه [ث] / لتساوي: يساوي [خ] تساوي [ز] / ضلعي: ناقصة [خ، ز، ي] — 3 وتساوي: تساوي [خ] / ك ا ط: ناقصة [ض] / ط ج: ط ب ح [خ] ط ح [ز] / ونفصل ب ل: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، ه] التعليق التالي «هذا على تقدير كون ب ز أطول من ز ج فإن (وان [ه]) كان أقصر منه يقع ل بين ز ج وإن (ناقصة [ه]) كان مساويًا له فلا نحتاج إلى هذا العمل» — 3-4 ب ل ... الفضل: ناقصة [ط] — 4 ب ح: ا ب ح [خ] / ط ل فهو عمود: ناقصة [خ] — 5 ب ط ... خطي: ناقصة [ق] / ط ج: ط ب ح [خ] / بين: من [و] / ج ك: ناقصة [ج] / وب ح: ب ح [ا] ناقصة [ج] رب ح [ي] — 6 ل ج ل: ب ح ل [ي، خ] / ب ط ... خطي: ناقصة [ز] / ط ج: ط ب ح [خ] / خطي: ناقصة [ذ، ط] / ل ج: ب ح [ي، خ] — 5-6 ب ح ... خطي (الثانية): ناقصة [ف] — 7 عمود: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، ه] التعليق التالي «وإلا فليكن ط ي عمودًا عليه ويلزم أن يكون الفضل بين مربعي ب ط ط ج كالفضل بين مربعي (ب ط ... مربعي: ناقصة [ه]) ب ي ي ج واستحالته ظاهرة» / ل ط ح: ل ط ب ح [خ] / مساويًا: مساو[ص] / ب ل: ب د [س] — 8 قائمتين: قائمين [ي، خ] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / زاويتا: ناقصة [ز] / ل ب ط: ل ط [ز] / ح ب ط: ح رط [ج، ف] ح ط [ز] / متساويتين: متساويين [ث، ع، ط] متساويان [خ] / ونصل: وفصل [س] / ه ب: ه ح ب [ذ، ط] — 9 ز ب ه: د ب ه [ش] / د ب ه: وب ه [ذ، ع، ط] / متساويتان: متساويتا [ط] / ولكون: لكون [ع] ولكن [ب، ش] / ل ب ح: ب ح [خ] ا ب ح [ض] / زاوية: اويه [خ] — 10 مساوية: متساوية [خ، ط] / لزاوية: ناقصة [خ، س] / ونصفها: ونصفها [ع، ط] / لنصفها: لنصفها [ذ، ع] كنصفها [ج] ناقصة [ي] / فزاوية: لزاوية [ع] / ه ب د: ب ه د [ف] / مثلث: ناقصة [ص] / ب د ه: ب ج ه [ط] — 11 لزاوية: ناقصة [ي] / ب ط ح: ع ط [ع، ط] ط ب ح [خ] / ب ح ط: ب ط ح [ذ، س، و] / فمثلثا: فثلثا [ي] — 11-12 ب د ه ... مثل (الثانية): ناقصة [ي] / ب د ه ب ح ط: ب ح ه ع [ط، ع] — 12 ح ط: ط ح [س] / ود ب: ونسبة د ب [و] / ز ب: ناقصة [ع، ط] ب ز [ب، ث، د، ز، خ، س، ش، ص، ض، ف، ل، ك، ن، م، ه، و] ب و [ح] / وب ح مثل: ناقصة [ع، ط] / مثل: ناقصة [ذ].

www.j4know.com

زجـ، ونسبة هـ د إلى ز ب كنسبة زجـ إلى ح ط، وضرب هـ د في ح ط مساوٍ لضرب ب ز في
زجـ. وأيضًا، / نسبة مربع هـ د إلى ضرب هـ د في ح ط، أعني إلى ضرب ب ز في زجـ، كنسبة ب – ١٥٩ – ظ
هـ د إلى ح ط، أعني كنسبة ا د إلى ا ح، فنسبة مربع هـ د إلى ضرب ب ز في زجـ كنسبة ا د
إلى ا ح. فضرب مربع هـ د في ا ح كضرب ب ز في زجـ في / ا د. وإذا ضربناهما/ في ا ح، صار ق – ٣٠ – و، ت – ٢٨٣
مربع هـ د في مربع ا ح كضرب / ب ز في زجـ في ا د في ا ح، ولكون هـ د في ا ح / كتكسير ث – ١٧٩ – ظ
المثلث، يكون مربع هـ د / في مربع ا ح مربع تكسير المثلث. فإذن مربع تكسير المثلث مساوٍ ل – ٦ – ظ، ز – ٣٨ – ظ
لضرب / ب ز في زجـ في/ ا د في ا ح، أعني الفضول الثلاثة / في / نصف جميع الأضلاع؛ و – ١٦٧ – و، ط – ٢٦٠ – ظ
وذلك ما أردناه. ن – ١١٨ – ظ

وأيضًا، بوجه آخر بعد أن ثبت أن نسبة هـ د إلى د ب كنسبة ب ح إلى ح ط، أنا إذا جعلنا ذ – ٣٨٩ – ظ
الثاني وسطًا بين الأول / والرابع، كانت نسبة الأول إلى الرابع مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ع – ٨٢ – ظ
ومن نسبة الثاني إلى الرابع، أعني من نسبة الأول إلى الثالث./ فنسبة هـ د إلى ح ط مؤلفة من خ – ١٨٧ – ظ
نسبة هـ د إلى د ب ومن نسبة هـ د إلى ب ح. ود ب مثل/ ب ز وب ح مثل زجـ، فنسبة هـ د ك – ٢١٩ – ظ

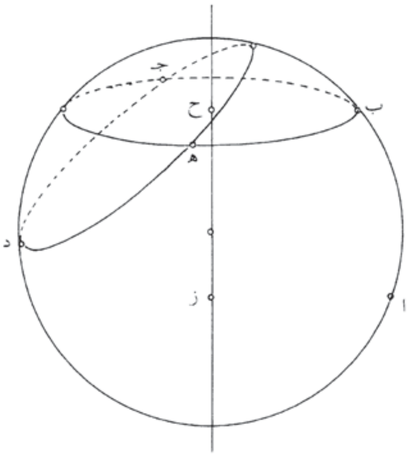
1 زجـ ... وضرب هـ د: ناقصة [ي] / زجـ: رح [ز، ع] ب ح [خ] / ونسبة: فنسبة [ت، ث، جـ، ح، خ، ذ، ز، س، ع، ط، ف، ق، م، هـ] / هـ د: د هـ [ذ، ع، ط] / وضرب: وحرب [خ] / هـ د: د هـ [ث، ذ، ض، ع، ط] ح د [ق] / في: وفي [خ] / مساوٍ لضرب: واحرب [ي] / ب ز: د [خ] – 2 وأيضًا: أيضًا [و] ناقصة [ذ] / هـ د (الأولى): د هـ [د، هـ] / وأيضًا ... زجـ: ناقصة [ع، ط] / إلى ضرب هـ د ... زجـ: ناقصة [ذ] / هـ د في ... ضرب: ناقصة [خ] – 3 ح ط: ح [خ] / كنسبة: نجد في هامش [ا، ب، د، ش؛ ص، هـ] التعليق التالي «ولنمثل لذلك مثلاً (لهذا العمل [ص]) فليكن (مثل [ا]) زاوية ا قائمة وب جـ هـ ا وا ب ٦ (حـ [ا]) وا جـ ٨ (حـ ر [ا]) ومساحته (مساحته [ا]) الحاصلة (الخاصة [ب، ش؛ هـ]) هي ضرب أحد ضلعي القائمة في نصف الآخر وهي ٢٤ وكذا إذا ضربنا {١٢ (حـ ا [ا]) في ٢ ثم في ٤ ثم في ٦ [ا؛ ب، د، ش] = نصف جميع الأضلاع الذي هو ١٢ في فضله على ضلع ب جـ الذي هو ٢ ثم في فضله على ا جـ الذي هو ٤ ثم في فضله على ا ب الذي هو ٦... [ص]} ونأخذ جذر الحاصل أعني (ا ب و[ا]) ٥٧٦ وهو ٢٤ أيضًا (ناقصة في [ا؛ ب، د، ش]) كما ذكرنا أولاً (ناقصة في [ا، ب، د، ش]) وعلى هذا في المثلث الحادّ الزاوية (الزوايا [ا]) ومنفرجتها (منفرجها [ا]) إذ هو (وهو [ا]) عام في الجميع؛ ونجد أيضًا في هامش [ب] «لبيان مثلثي ا د هـ ا ح ط» / زجـ: رح [ع] – 3-4 فنسبة ... ا ح (الأولى): ناقصة [ق] – 4 هـ د: د [ي] / ا ح: الف ح [ز] / زجـ: ب جـ [ت] زح [هـ] / في: و[خ] / ضربناهما: ضربناها [ز] – 5 هـ د في مربع: ناقصة [م] / ا ح: ا هـ [خ] / ب ز: هـ ز [ط] ب د [ق] / زجـ: زح [هـ] / ا ح: هـ ح [خ، ي] / هـ د: د هـ [ث] / ولكون هـ د في ا ح: ناقصة [جـ، ت، س] / كتكسير: لتكسير [جـ، ح، س، ي] – 5-4 وإذا ... ا د: ناقصة [ح] – 6 المثلث: ا المثلث [هـ] / يكون: ايكون [ط] / يكون ... المثلث (الثانية): ناقصة [هـ] / ا ح: ا هـ [ذ، ع، ط] / مربع (الثالثة): ناقصة [د] / فإذن ... المثلث: ناقصة [ف] / تكسير (الثانية): بكسر [ط] / مساوٍ: و[خ] مساوو [ي] – 7 زجـ: د حـ [ي] / في: إلى [ق] ناقصة [و] / ا د: ناقصة [و] / ا ح: ا ح ا [و] / في: مع [ق] / نصف: أثبتها في الهامش [ع] / جميع: مجموع [جـ] / الأضلاع: للأضلاع [و] – 9 أيضًا: ناقصة [جـ، ت] / ثبت: ست [ط] يثبت [ا، ب، ش، ص، ض، ك، م؛ ن؛ و] / أن: ناقصة [م] / هـ د: د ط هـ [ز] / أنا: امّا [ق] لانا [د] – 10 وسطًا: وسط [و] وسطًا في النسبة [ز] / كانت: ان كانت [خ] كان [ث] وكانت [ذ] / الأول (الثانية): الأولى [ق] / إلى: ناقصة [ي] / إلى: ناقصة [و] – 11-10 الثاني (الثانية) ... الأول إلى: ناقصة [ع، ط] – 11 من نسبة الثاني ... أعني من: ناقصة [ذ] / الثالث: الثاني، ولكن نجد «لث» في بداية الصفحة التالية [خ] / هـ د: د هـ [و] / ح ط: ح د [هـ] – 11-12 من نسبة ... ومن: أثبتها في الهامش [ث] – 12 هـ د: د هـ [و] / نسبة: نجد بعدها «د ب إلى ح ط التي هي بقاعدة الابدال كنسبة» [ل] ونجد هذه الجملة في هامش [ك] / ومن نسبة: كنسبة [ل] / ود ب: أثبتها تحت السطر [ك] ورب [خ] و [ض] / ود ب ... هـ د: ناقصة [جـ] / ب ز: ب د [ط].

www.j4know.com

إلى ح ط، أعني/ نسبة ا د إلى ا ح مؤلفة من نسبة هـ د إلى ب ز ومن نسبة هـ د إلى ز جـ، ز - ٣٩ - و
فضرب ا د في ب ز في ز جـ / كضرب مربع هـ د في ا ح، ونتمم البرهان بالوجه المتقدم./ ص - ١٢٩ نهاية [ز]

– ح – كل نقطة في داخل/ كرة يخرج منها أربعة خطوط متساوية إلى سطح الكرة فوقعت ر - ٣٨
على نقط ليست في سطح واحد مستقيم فهي مركز الكرة.

فليكن الكرة / ا ب جـ د هـ والنقطة الداخلة // ز والخطوط الخارجة منها إلى سطح الكرة ش - ١٦٦ - و
خطوط ز ب ز جـ ز د ز هـ وهي متساوية/ وليست في سطح واحد، وذلك لأن كل ثلاث نقط جـ - ٤٤ - ظ ف - ١٣٢ - و ض - ٧٥ - ظ



فهي في سطح واحد لما تقرر في كتاب أقليدس. فندير على نقط / ب جـ هـ دائرة ب جـ هـ، س - ٩ - ظ
وعلى نقط هـ جـ د دائرة هـ جـ د، ونخرج من ز على سطح دائرة ب جـ هـ عمود ز ح، فيقع على

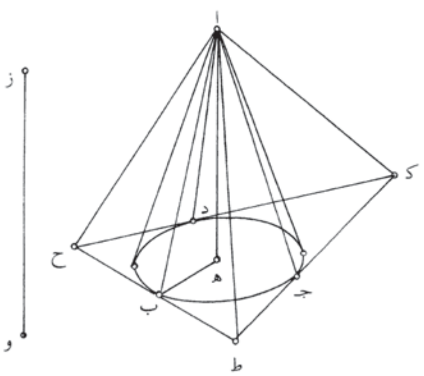
1 إلى ح ط ... ب ز: ناقصة [جـ] / ح ط: حـ ط [م] / ا د إلى ا ح: ناقصة [ك، ل] / هـ د: د هـ [ع] / ب ز: ب د [ق] بح ودبر [ف] / ب ز ... إلى: مكررة [ذ] – 2 ب ز: ب د [ذ، ط، ق] ب ح [ش] / ز جـ: زح [ع] ب جـ [س] / ونتمم: ويتمم [ط، ق] / بالوجه المتقدم: بالمتقدم [ز، خ] / المتقدم: المقدم [ذ، س] ناقصة [هـ] – 3 ح: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / في: ا في [خ] – 3-4 إلى ... نقط: ناقصة [ث، ح] – 4 نقط: نقطة [ا، جـ، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، ف، ق، هـ، ي] / ليست: ناقصة [ذ، ع، ط] / واحد: واحدة [ط] / فهي: وهي [ذ، ع، ط] / فهي ... الكرة: مكررة [ي] – 5 ا ب جـ د هـ: ا ب جـ د [ع، و، ي] الحدة [خ] / والنقطة: والنقطة و[ع] / ز: ب [س] / سطح: السطح [و] – 6 خطوط: ناقصة [ث] / ز جـ: زح [و] / ز هـ: هـ [س] / وهي: ناقصة [ي] / متساوية: مساوية [خ، ط، ع] متساو[و] / وليست: ليست [و] / ثلاث: مثلث [م] /نقط: نقطة [ا، ذ، ع، ط] فقط [ض] – 7 كتاب: كتا [ا] / أقليدس: أوقليدس [ص] / نقط: نقطة [ا، خ، ذ، ض، ع، ط، م، و، ي] / جـ هـ: هـ جـ [س] / دائرة ب جـ هـ: ناقصة [ض] / ب جـ هـ: لبح [خ] – 8 وعلى ... هـ جـ د: ناقصة [ذ، ط] / نقط: أثبتها في الهامش [ع] نقطة [خ، م، و، ي] / هـ جـ د: جـ د هـ [جـ، ت، ر، و] / هـ جـ د: حـ د هـ [ا، ب، ث، جـ، ح، ت، د، ر، س، ش، ص، ض، ع، ك، ل، ن، هـ] ب جـ د [و] / ز ح: وزح [ي].

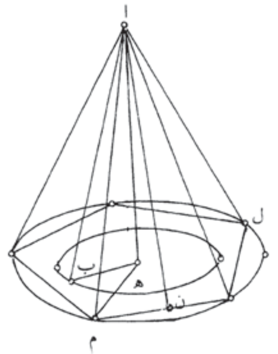
www.j4know.com

مركز دائرة ب ج هـ لأنا إذا وصلنا خطوط ب ح ج ح هـ ح، كانت متساوية // لتساوي ذ - ٣٩٠ - و
خطوط ز ب ز ج ز هـ واشتراك ز ح، / وكون الزوايا التي عند ح قائمة. / ولأن دائرة ب ج هـ على ت - ٢٨٤ ب - ١٦٠ - و
سطح كرة ا ب ج د هـ، وخرج من مركزها عمود ح ز، فهو يمرّ بمركز الكرة على ما تبيّن في ثاني ل - ٧ - و
أشكال كتاب الأكر لثاوذوسيوس. وبمثل ذلك / نبيّن أن العمود الخارج من مركز دائرة هـ ج د ي - ٦٢ - ظ
يمرّ بمركز الكرة. والعمودان لا يتلاقيان إلا عند ز، فـ ز مركز الكرة؛ وذلك ما أردناه./

- ط - كل مخروط مستدير قائم، فسطح الخط الواصل بين رأسه وأي نقطة فرضت على ق - ٣٠ - ظ
محيط قاعدته في نصف محيط قاعدته/ يساوي سطحه المستدير. ا - ١٠٠ - ظ

فليكن المخروط ا ب ج د / ورأسه ا / ودائرة قاعدته / ب ج د ومركزها هـ / ومحوره ا هـ، / ط - ٢٦١ - و
وهو عمود على سطح القاعدة حتى يكون المخروط قائمًا. ونصل ا ب، فسطح ا ب في / نصف م - ٢٤ ك - ٢٢٠ - و
محيط ب ج د هو مساحة / السطح المستدير المحيط بالمخروط. خ - ١٨٨ - و ع - ٨٣ - و ر - ٣٩





1 لأنا: لا [ث] / ب ح: ب حـ [م] – 2 خطوط: خط ط [ي] / ز ج: ز ح [س] د ح [خ] / واشتراك: واشترك [س، و] / ز ح: د رح [خ] / وكون: وكعب [ط] ويكون [ي] / التي: ناقصة [خ] / ب ج هـ: ب حـ حـ هـ [ع] ب ح هـ [س] – 3 ا ب ج د هـ: ا ب ج د [هـ] / مركزها: مركز [خ] / ح ز: هـ ز [ذ، ع، ط] حـ ز [ا] / بمركز الكرة: بمركزها لكرة [خ] / على: ناقصة [س] / ما: مكررة [ا] لما [س] / تبين: يتبين [ا، ش] بين [خ، س] سبق [م] / ثاني: ثماني [ا] أثبتها فوق السطر [ت] – 4 الأكر: الكرة [ذ] لأكر [ص] الا [ض] / لثاوذوسيوس: لثاووسيوس [ذ] لثاودسوس [ط] وذوسيوس [ب، ش] لثاوذاوسيوس [خ] / وبمثل: ومثل [ذ، ع، ط] / من: بين [ع] / هـ ج د: هـ حـ و [ع] – 3-5 على ... الكرة (الأولى): أثبتها في الهامش [هـ] – 5 يمر: ناقصة [هـ] / والعمودان: والعمودات [ا] / عند: ناقصة [ع] / ز: ناقصة [خ، ذ، ع، ط] نقطة ز [س] / فـ ز: في [س] / الكرة: ناقصة [ل] – 6 ط: ناقصة [خ، س، ض، ع، ق، ي] / وأي: وا د [م] – 7 محيط (الأولى): محيطه [ا] / يساوي: تساوى [ي] / سطحه: سطح [خ، د، هـ] / المستدير: المستديرة [ض، و] – 8 ورأسه ا: د را ب د ا [خ] وواله ا [ي] / هـ: ناقصة [ذ، ع، ط] / ومحوره: ويحوزه [م] ويحوزاه [خ] – 9 المخروط: ناقصة [و] / قائمًا: قائما [ط، و] / فسطح: لسطح [خ] – 10 هو: وهو [ب، ذ، ش، ط، م] / السطح: المسطح [ج].

www.j4know.com

وإلا فلتكن ا ب في خط أطول من نصف المحيط أولاً، وليكن ذلك الخط و ز. ونعمل على
محيط ب جـ د مضلعًا يكون جميع أضلاعه أقصر / من ضعف و ز، وهو مضلع ح ط ک، وليماس و – ١٦٧ – ظ
الدائرة على نقط ب جـ د. ونخرج خطوط ا ح ا ط ا ک ونصل / ا جـ ا د، فتكون خطوط ا ب ذ – ٣٩٠ – ظ
ا جـ ا د المتساوية أعمدة على أضلاع ح ط ط ک ک ح، لأن ا هـ عمود على سطح دائرة
ب جـ د، والخطوط / الواصلة بين مركزها ونقط التماس أعمدة على الأضلاع، ولذلك يكون د – ١٥٠ – و
سطح ا ب في نصف جميع الأضلاع / مساويًا / لسطح المضلع / المحيط بالمخروط المستدير وهو ل – ٧ – ظ
أعظم من سطح المخروط المستدير. ونصف جميع الأضلاع أقصر من خط و ز، وكان سطح ا ب ت – ٢٨٥ ش – ١٦٦ – ظ
في و ز هو سطح المخروط / المستدير، فسطح ⟨المخروط⟩ المستدير / أعظم مما هو محيط به؛ هذا ض – ٧٦ – و ن – ١١٩ – و
خلف.

ثم ليكن و ز أقصر من نصف المحيط، وا ب في و ز هو سطح// المخروط المستدير، وليكن ا ب س – ١٠ – و ث – ١٨٠ – و
في نصف محيط ب جـ د الذي هو أعظم منه مساويًا لسطح مخروط مستدير قاعدته دائرة م ل
ورأسه آ. ونعمل في دائرة م ل ذا أضلاع وزوايا متساوية غير مماسة لدائرة ب جـ د، ونخرج من
زواياه إلى آ خطوطًا، فيكون السطح المحيط بالجسم الحادث / أقل من سطح المخروط المستدير ف – ١٣٢ – ظ
الذي // قاعدته م ل لكون المخروط محيطًا به. ولكن سطح خط يخرج من آ إلى منتصف أحد ص – ١٣٠ ذ – ٣٩١ – و
أضلاع الشكل الذي لا يماس دائرة / ب جـ د في نصف/ ⟨جميع⟩ أضلاعه هو مثل سطح ک – ٢٢٠ – ظ ر – ٤٠
ذلك المجسم. والخط الخارج من آ إلى منتصف // ذلك الضلع أطول من خط ا ب ونصفُ ط – ٢٦١ – ظ ذ – ٣٧٩ – و

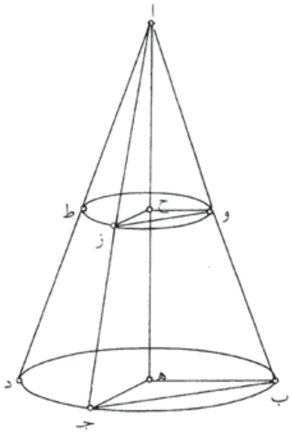
1 وليكن: فليكن [ي] / ونعمل: ويعمل [س] – 2 وز: آ ز[ت] / مضلع: ضلع [ح] / وليماس: ولتمام [ل] ولتماس [ب، س، ش، ک، و] – 3 نقط: نقطة [ا، ت، ذ، ط، ق، م] / ا ط ا ک: ا ک ا ط [س] / ا جـ: ا ح [س] ا ب ا جـ [ذ] – 3-4 ا ب ا جـ: ا جـ ا ب [ا، ف] – 4 ا جـ: ناقصة [خ] / المتساوية: المساوية [ث] / ک ح: ک [ذ، ط] ا ب ح [خ] / عمود: ناقصة [د] – 5 ب جـ د: ناقصة [ت] / الواصلة: المواصلة [ط] / مركزها: مركز[ت] / ونقط: ونقطة [ا، ت، ث، ض، ع، ط، ق، ک، ل، ن، هـ، و] / أعمدة: أعني أعمدة [ب، ش] – 6 ا ب في نصف: ناقصة [س] ا ب في سطح، ثم ضرب على «سطح» بالقلم [ع] / مساويًا: مساو[ث، جـ، ح، ر] / المحيط: بالمحيط [ب، ش] / بالمخروط: المخروط [ب، ش] – 6-7 وهو ... المستدير: ناقصة [س] – 7 المخروط: ناقصة [خ، ف، ق، م، ي] / ا ب: ب [خ] – 6-8 وهو ... المستدير (الأولى): أثبتها في الهامش [هـ] – 7-8 وكان ... وز: مكررة [ع، ط] كررها مرتين [ذ] – 8 وز: و ل [ت] / هو: وهو[ع] / فسطح ... المستدير: ناقصة [ي] / هو: ناقصة [ي] – 10 وا ب في: وا ب د [ا] / في: مكررة [ي] / وز: هـ ر[م] / سطح: السطح [ع، ط] / ا ب: ان [خ] – 11 محيط: ناقصة [س] يحيط [م] / مخروط مستدير: المخروط المستدير [س] / م ل: بل [م] – 12 ورأسه آ: وراا [خ] / آ: ناقصة [ع] / م ل: هـ م ل [ا] ناقصة [م] / ذا: ناقصة [خ، ق، م] / أضلاع: أربعة أضلاع [ع] وأضلاع [خ] / وزوايا: زواياه [جـ] وزاويا [خ] / غير: ناقصة [ي] – 13 زواياه: زاواياه [ا] / آ: ناقصة [ي] / خطوطًا: خطوط [ا] / السطح: سطح [ض] / بالجسم: بالجسم [خ، ض، ع، ط، ف، ک، ل، ن، م، و، ي] المجسم [ا] / سطح: سخط [ش] – 14 م ل: بل [م] / لكون: فيكون [جـ، ت، ر] / المخروط محيطًا: المحيط مخروطا [ع] المحيط مخروط محيطًا [ذ، ط] / ولكن: ولكون [ذ، ع، ط، م] وليكن [جـ، ت] / خط: ناقصة [خ، ي] / آ إلى: ناقصة [خ] / أحد: واحد [ذ، ع، ط] احدى [ا، ب، ت، ث، جـ، ح، د، ر، ش، ص، ض، ق، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] – 15 أضلاع: أضلاعه [خ] / الشكل: ناقصة [ع] الأشكال [هـ] / يماس: تماس [ط، و] / ب جـ د: ا ب جـ [خ] / أضلاعه هو: أضلاع هـ و[ق] / سطح: ر سطح [هـ] أثبتها فوق السطر[ر] – 16 ذلك: تلك [ي] / المجسم: للجسم [و] الجسم [ي] / ذلك: وذلك [ي].

www.j4know.com

⟨جميع⟩ أضلاع الشكل أطول من نصف محيط دائرة ب ج د، / فسطح المخروط / المستدير الذي / قاعدته م ل أصغر من سطح الجسم الذي في داخله؛ هذا خلف. ق – ٣١ – و / ع – ٨٣ – ظ / ي – ٦٣ – و

فإذن سطح ا ب في نصف ⟨محيط⟩ دائرة ب ج د مساوٍ لسطح مخروط ا ب ج د؛ / وذلك ما أردناه./ ب – ١٦٠ – ظ

– ي – كل مخروط مستدير⟨قائم⟩ قاعدته دائرة وقد فصله سطح موازٍ لقاعدته، كان ذلك الفصل دائرة والمحور يمرّ بمركزها. ح – ٨٨ – و



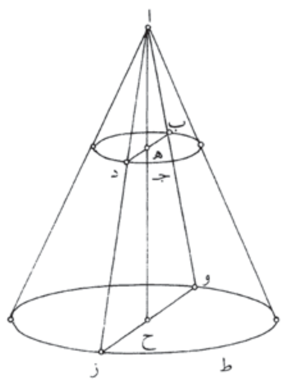
فليكن المخروط رأسه ا وقاعدته ب ج د ومركزها ه والسطح الفاصل وط ز / والمحور ا ه، وقد مرّ بنقطة ح / من السطح الفاصل. فنعلم على ب ج د نقطتي ب ج على أن قوس ب ج أقل من نصف دائرة. ونخرج ه ب ه ج ب ا ج ا ب ج، / فيمرّ مثلث ا ب ه بفصل وح من السطح الفاصل ومثلث ا ه ج بفصل / زح ومثلث ا ب ج بفصل وز، ويحدث مثلث وح ز خ – ١٨٨ – ظ / ل – ٨ – و / ت – ٢٨٦ / ذ – ٣٧٩ – ظ

1 أطول: ناقصة [س] / نصف: أثبتها في الهامش [ا، ع، ق] – 2 م ل: ب د [ي] / الذي: ناقصة [س] – 3 ا ب ج د: ا ب ج [ض، ک؛ ل، ن، و] الحدود [خ] – 5 ي: ناقصة [ا، خ، ذ، س، ش، ض، ع، ق، ي] يا [د] / ذلك: وذلك [ض] – 6 الفصل: الفضل [ب، ت، ذ، ش] / والمحور: والمجور [خ] والمخروط [ل] / والمحور يمرّ بمركزها: ناقصة [م] – 7 الفاصل: الفاضل [ب، ث، ذ، ش، ط] / وط ز: وط ب، ثم أثبت الصواب تحتها [ا] زط و[ق] وح ز[ر] وط [ي] / والمحور: المحور[و] / ا ه: له [ا] – 8 ح: ناقصة [خ] / الفاصل: الفاضل [ب، ذ، ش، ط] / فنعلم: فلنعلم [س] فليعلم [ج، ت، ر] فيعلم [ذ، ط] / نقطتي ب ج: ناقصة [د] / ب ج: ب ح [س] – 9 ه ب: ه ر[ت] / ب ج: رح [ض] / ا ب ه: انه [خ] / بفصل: بفضل [ت] نفصل [ل] ونفصل [ه] / وح: زح [ق] – 10 الفاصل: الفصل، ثم كتب في الهامش «الفاضل» [ط] / ومثلث: ومثل [ا] / ا ه ج: كرر بعدها «من السطح الفاصل» ولكن أشار إليها [ي] / زح: مطموسة [ص] زحـ [و] ب ح [خ] / ا ه ج ... ومثلث: ناقصة [ق] / زح ... بفصل: ناقصة [ح] / بفصل: بفضل [ت، ر، ط] بفصل [خ] / وز: زو[ق] ا ر[ت] / ويحدث: يحدث [ع، ي] وب حـ د ب [خ] / مثلث: مثل [ا] / وح ز: رح ر[ع] زح و [ق] وزح [ف].

www.j4know.com

ويكون / أضلاعه موازية لأضلاع مثلث ب هـ جـ كل لنظيره؛ فيكونان متشابهين،/ ونسبة و – ١٦٨ – و
ب هـ إلى هـ جـ كنسبة وح إلى ح ز، وب هـ هـ جـ متساويان، فلذلك وح ح ز متساويان، جـ – ٤٥ – و
وكل خط / يخرج من ح إلى محيط وز ط، فـ وز ط دائرة مركزها ح؛ وذلك ما أردناه./ م – ٢٥

– يا – كل قطعة من مخروط مستدير قائم فيما بين دائرتين / متوازيتين،/ فإذا أخرج فيهما ا – ١٠١ – و
قطران متوازيان ووصل بين أطرافها بخطين متقابلين، كان سطح أحد الخطين في نصفي محيطي ش – ١٦٨ – و / س – ١٠ – ظ
الدائرتين مساويًا لسطح / القطعة / المستدير. ض – ٧٦ – ظ / ر – ٤١



فليكن القطع ب جـ د وط ز، قاعدتها وط ز والأخرى التي تلي رأس المخروط / ب جـ د ک – ٢٢١ – و
وهـ ح من المحور ما يقع بينهما وهو عمود على الدائرتين، وليخرج قطرا ب د وز متوازيين، ولنوصل بينهما ب و د ز.

1 موازية: موازيا [ع] موازين [س] موزنة [خ] / لأضلاع: الأضلاع [خ، ذ، ع، ط، ي] أضلاع [م] / ب هـ جـ: ب هـ ح [ض] / لنظيره: النظيره [خ] / فيكونان: فيكون [ف، ق] / متشابهين: مشابهين [و] متشا [خ] / ونسبة: فنسبة [ا، ض، ل، ک، ن، و] نسبة [ت] – 2 وح: زح [ق] / ح ز: ح و [ذ، ع، ط] / هـ جـ: هـ م [ي] / فلذلك: وكذلك [ث، س، ذ، ع، ط، م] فكذلك [خ، ق] / فلذلك ... متساويان: ناقصة [جـ، ت، ر] / وح: زح [ق] / ح ز: ح [ص، ع] ح و [ذ، ط، ق] – 3 يخرج: ويخرج [ي] / من ح: ناقصة [خ، ک، ل] / وذلك: وكذلك [خ] – 4 يا: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] يب [د] / كل قطعة: ناقصة [خ] / مخروط: المخروط [ذ، ع، ط] / قائم: قائما [خ] / متوازيتين: أثبتها في الهامش [ن] كتب بعدها «لا بد من فيه التوارين (هكذا) شرح» [و] ناقصة [خ] متوازيين [ض] / فإذا: فاذ [خ] / فيهما: فيها [جـ، ت، ر] – 5 قطران: ناقصة [ي] / ووصل: وصل [ط] وفصل، ثم أثبت الصواب فوقها [ت] / أطرافها: أطرافها [ف] / بخطين: بخطى [خ، ي] / كان: ناقصة [ي] / أحد: احدى [ي] / نصفي: نصف [خ، ي] / محيطي: محيط [خ، ش، م، ي] – 6 القطعة: قطعة [د، هـ] / المستدير: المستديرة [س] – 7 القطع: القطعة [س، ق] ناقصة [خ، ي] / ب جـ د وط ز: ب جـ د وط [خ] / قاعدتها: وقاعدتها [ق] / وط ز: وط زحـ [ت] وط [خ] / والأخرى: ولأخرى [ص] الأخرى [ت] والاخر [م] / تلي: على [س] ناقصة [ع] يلي [ص] / رأس: الرأس [و] / المخروط: المخروط في [هـ] / ب جـ د: ح د [خ، ي] – 7-8 ب جـ د وهـ ح من: مكررة [ل] – 8 بينهما: بينها [ا، ض، ل، ک، ن، و] / وليخرج: ولنخرج [ا، ر، س، ق، ل] / قطرا: قطر [ب، ش، ل، و] وطرا [ي] / ب د: ا ب د [ب، ش، ل] / وز: ناقصة [ي] / ولنوصل: وليوصل [ر] – 8-9 متوازيين ... د ز: ناقصة [م] – 9 ب و د ز: و د ر [ع] ب و د ک [ت].

www.j4know.com

نقول: فسطح ب و في نصفي ⟨محيطي⟩ دائرتي ب جـ د وط ز هو السطح المستدير المحيط بالقطعة.

فلنتمم المخروط إلى الرأس / وهو ا، ونخرج ح هـ إلى ا، وكذلك وب ز د. ومعلوم أن سطح ع – ٨٤ – و
ا و في نصف محيط / وط ز هو سطح جميع المخروط وسطحَ ا ب في نصف محيط ب جـ د هو ذ – ٣٨٠ – و
سطح مخروط ا ب جـ د./ وفضل الأول على الآخر هو السطح المستدير المحيط بالقطعة وذلك هو ط – نهاية ٢٦١ – ظ
سطح ب و في نصف محيط وط ز مع سطح / ا ب في فضل نصف محيط وط ز على نصف / ل – ٨ – ظ
محيط ب جـ د./ وسطح ا ب في فضل نصف محيط وط ز على نصف محيط ب جـ د مساوٍ ي – ٦٣ – ظ / هـ – ٦٣ – و
لسطح / ب و في نصف محيط / ب جـ د لأن / نسبة ا ب إلى ب و كنسبة نصف دائرة ب جـ د ق – ٣١ – ظ / خ – ١٨٩ – و / ت – ٢٨٧
إلى فضل نصف دائرة وط ز على نصف دائرة ب جـ د؛ وذلك ما أردناه.

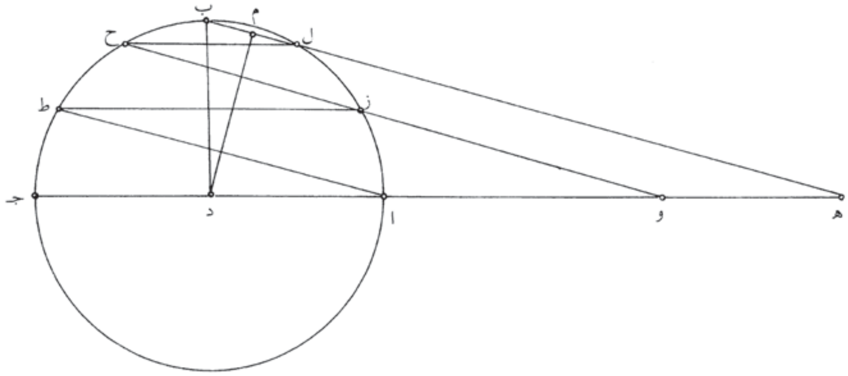
وقد نعلم من ذلك أن / خطي وب ب ا إن كانا متساويين كيف/كان اتصالهما على استقامة أو ف – ١٣٣ – و / ث – ١٨٠ – ظ
غير استقامة، فإن / تضعيف أحدهما بنصف دائرة وط ز وبدائرة ب جـ د هو مساحة سطح ن – ١١٩ – ظ
المجسم الذي رأسه / ا وقاعدته دائرة وط ز. ب – ١٦١ – و

ومن هاهنا نعلم أيضًا أنه إن كانت قطع كثيرة / من مخروطات الأساطين مركب بعضها على ص – ١٣١
بعض وكان أعلى سطح القطعة السفلى هو قاعدة / القطعة التي فوقها، وكان رأس القطعة العليا ر – ٤٢
من القطع نقطة، وكانت جميع القواعد متوازية والخطوط الخارجة في جميع القطع من قواعدها

1 نصفي: نصف [خ] / وط ز: وط د [ذ، ط] – 2 بالقطعة: بالقطع [ق] – 3 فلنتمم: فلنتم [ب، ش، ك، ل] فليتم [جـ، ر، س] / ح هـ: هـ ح [ذ، ع، ط] ح ا [م] هـ ا [هـ] / ا: ناقصة [ع] / وكذلك: ولذلك [ح] / وب: ب [و] رب [خ، ي] / ز د: ب و [ذ، ع، ط] و د [ت، ض، م] / ومعلوم: معلوم [ب، ش] ومعلو [ك] – 4 وط ز: وط و [ي] / هو: وهو [ث] / وسطح: سطح [خ، ي] / هو: وهو [ح، خ، ي] – 5 وفضل: ففضل [ح] / الأول: لأول [ص] / الآخر: لآخر [ص] / هو: من [ي] – 6 سطح: السطح [خ] / ب و: ب ز [هـ] / وط ز: وط و [ي]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «وذلك لأنه لما كان ا و في نصف وط ز هو سطح المخروط (المخروطات [د، ص]) فـ ا ب وب و فيه (ناقصة [هـ]) هو سطحه أيضًا وليكن فضل نصف وط ز على نصف ب جـ د هو وط (زط [ا] وط ز [ص]) فـ ط ز كنصف ب جـ د فإذن ب و في نصف وط ز وا ب في وط الفضل وفي ط ز (وا ب .. ط ز: ناقصة [ا]) أي نصف ب جـ د (ب جـ [د، هـ]) هو مساحة جميع المخروط لكن ا ب في نصف ب جـ د هو مساحة ا ب جـ د يبقى (ويبقى [ا]) ا ب في وط الفضل وب و في نصف وط ز مساحة القطعة» – 7 ب جـ د: جـ د [ت، جـ، ر] / سطح ا ب في: ناقصة [ذ] / وسطح ... ب جـ د: ناقصة [خ، م، ع] / نصف (الثانية): ناقصة [ذ] – 8 ب و: ب جـ [ت] / ب جـ د: ب جـ [ث] / كنسبة: نجد في هامش [ا، د، ش، ص] التعليق التالي «وذلك لأن نسبة ا ب إلى ا و كنسبة ب د إلى و ز بل كنسبة نصف ب جـ د إلى نصف وط ز، وبالتفصيل نسبة ا ب إلى ب و كنسبة نصف ب جـ د إلى فضل (ناقصة في [ص]) نصف وط ز على نصف ب جـ د». – 9 فضل: أثبتها في الهامش [ن] / ب جـ د: ف ب حـ د [خ] – 10 قد: ناقصة [د] / نعلم: يعلم [ب، جـ، خ، د، ذ، ر، س] تعلم [و] / وب: ا ب [ت] هـ ب [ل] / كانا: كان [و] كانا و [خ] / كان: كانا [ذ] / اتصالهما: ايضا لهما [خ] – 11 بنصف: تنصيف [م] بتضعيف [خ] / وط ز: وط رحـ [ت] وهـ ط ز [و] / وبدائرة: بدائرة [ت] / ب جـ د: ب جـ هـ [س] – 11-12 ب جـ د ... دائرة: ناقصة [ا] – 12 وط ز: وط هـ [جـ] – 13 نعلم: يعلم [جـ، خ، د، ذ، ر، س، ق] ناقصة [ض، ل، ك، ن، و] / إن: ناقصة [ع] إذا [ب، ش] / كانت: كان [خ، و، ي] / قطع: ناقصة [ذ، ع] / كثيرة: كره [ت] / الأساطين: لأساطين [ص] الاساطر [ي] – 14 سطح: سطحى [خ، ذ، ع، ف، م، ي] – 15 القطع: القطعة [س] / نقطة: بقطعة [ف] قطعة [س] / وكانت: وكان [جـ، د، ع، هـ] / القطع: القطعة [ذ].

إلى أعاليها مستقيمات/ متساويات،/ فإن سطح أحد تلك الخطوط في نصف محيط / قاعدة س – ١١ – و
القطعة السفلى وفي جميع محيطات قواعد / سائر القطع التي فوقها هو مساحة سطح المجسم المركب ك – ٢٢١ – ظ و – ١٦٨ – ظ
منها جميعًا سواء، كانت سطوح القطع متصلة على استقامة أو على غير استقامة. ذ – ٣٨٠ – ظ

– **يب** – ليكن ا ب جـ دائرة قطرها ا جـ ومركزها د، وقد قام عمود د ب / منه على القطر، ش – ١٦٧ – ظ ع – ٨٤ – ظ
ولنقسم ربع ا ب بأقسام متساوية كم كانت، وهي ا ز ز ل / ل ب، ولنخرج / وتر ب ل وننفذه، ض – ٧٧ – و
وننفذ قطر جـ ا إلى أن يلتقيا على هـ، ونخرج من نقطتي ز ل / وتري ز ط ل ح موازيين لقطر جـ ا. ذ – ٣٨٥ – و
فأقول: إن خط د هـ يساوي نصف قطر جـ ا ووتري / ز ط ل ح جميعًا. ل – ٩ – و



فنخرج ط ا ح ز وننفذ ح ز إلى أن يلقى جـ هـ على و، وبمثل ذلك ندبر إن كانت الأقسام
أكثر. فخطوط جـ هـ ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط ا / ح و ب هـ متوازية، لأن قوسي ط ح ت – ٢٨٨

1 مستقيمات: مستقيما [و] / فإن: ناقصة [م] – 2 القطعة: ناقصة [ت، جـ، ر، س، م] / وفي: في [خ، م] / محيطات: مخروطات [س] محيطان [خ] المحيطات [ذ، ع] / هو: ناقصة [ا] / المركب: ناقصة [ا] لاركب [ض، و] – 2-6 سائر ... ل: ناقصة [ذ] – 3 أو على غير استقامة: ناقصة [ذ] / على (الثانية): ناقصة [م] – 4 يب: ناقصة [خ، د، س، ض، ع، ق، ي] / ليكن ا ب جـ: ناقصة [خ] / ا ب جـ: ا ب جـ د [ت] / دائرة: أثبتها في الهامش [ك] / قطرها: وقطرها [س، م] قطعها [ي] / ا جـ: ناقصة [جـ] / وقد قام: وقدم [ل] فقد قام [م] ووقد قام [خ] / على: مكررة [ل] – 5 ولنقسم: ولنتمم، وكتب فوقها «ولنتم» [ت] ولنتم [جـ] ولنرسم [ح] / ربع: مربع [ح] لربع [خ] ولنقسم ربع: فراغ [ذ] / وهي: ناقصة [م] / ا ز: ا ب [ذ، ح] ا و [م] / ل ب: ناقصة [ي] / وتر: وب ر [خ] ه د [ذ] / ب ل: ل ب [ب، ش، ص] ب ک [س] ب ل د [ذ] / وننفذه: وبعده [ا، خ] ننفذه [ذ] ناقصة [ف، م] – 6 وننفذ: وترقد [ا] فنفد [ع] ويبعد [خ] ناقصة [ذ] / جـ ا: ا جـ [ا، ف] / إلى أن: لان [ع] / يلتقيا: ملتقا [ع] / ز: ب [خ] / وتري: وتر [س] / ل ح: ب ح [خ] ل [ذ] / موازيين: متوازيين [ض] / جـ ا: ح ا [ض] – 6-7 موازيين ... ل ح: ناقصة [ق] – 7 يساوي: تساوي [خ] / ووتري: د و ب ر ي [خ] / ز ط: أثبتها في الهامش [ث] / ل ح: ل حـ [ع، هـ] ب ح [خ] ا ح [ت] / جميعًا: ناقصة [ل] – 8 وننفذ ح ز: ناقصة [د] / ح ز: ز [و] / أن: ناقصة [ي] / يلقى: بقى [ي] / ذلك: أثبتها فوق السطر [ر] / ندبر: ب د ب ر [خ] – 9 جـ هـ ط ز: ناقصة [خ] / ح ل: ح ک [ت] / متوازية: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / وخطوط: وخط [ع] / ط ا: ح ا [خ، ف، م، ي] / ب هـ: ب ا [ک، ل] / ط ح: ح ط [س] ط ب حـ [خ، ي].

www.j4know.com

ح ب مساويتان / لقوسي ا ز ز ل، فسطح ط ا و ز متوازي الأضلاع وط ز مثل ا و. وبمثل ذلك د – ١٥٠ – ظ
ح ل مثل و هـ، فـ د هـ مثل د ا ط ز ح ل جميعًا؛ وذلك ما أردناه.

وإن أخرجنا / د م عمودًا على وتر ب ل، كان سطح نصف ب ل في د هـ أصغر من مربع م – ٢٦
نصف القطر / وأكثر من مربع د م، وذلك لأن مثلثي د ب م ب هـ د متشابهان لكون زاويتي خ – ١٨٩ – ظ
د م ب هـ د ب قائمتين وزاوية ب مشتركة، فنسبة ب م / إلى م د / كنسبة ب د إلى د هـ، ي – ٦٤ – و ر – ٤٣
فـ ب م – أعني نصف ب ل –/ في د هـ مساوٍ لـ ب د في م د. وب د في م د أصغر من مربع ا – ١٠١ – ظ
ب د وأعظم من مربع / م د. فإذن نصف ب ل في نصف القطر وفي وتري ط ز ح ل جميعًا أصغر ذ – ٣٨٥ – ظ
من مربع نصف القطر وأعظم من مربع / د م. ق – ٣٢ – و

فكل دائرة يخرج قطر فيها وينصف نصفها ويقسم أحد الربعين بأقسام متساوية كم كانت،
ويخرج / من نقط الأقسام أوتار في الدائرة موازية للقطر، كان سطح / نصف وتر أحد تلك الأقسام ك – ٢٢٢ – و
في نصف القطر وفي جميع الأوتار أصغر من مربع نصف / القطر وأعظم من مربع العمود الخارج س – ١١ – ظ ج – ٤٥ – ظ
من المركز الواقع على أحد أوتار تلك الأقسام، وذلك هو المطلوب.

– يج – إذا وقع في نصف كرة مجسم يحيط به نصف الكرة، وكان المجسم مركبًا من قطع
مخروطات / مستديرة كم كانت، وكان أعلى / سطح كل قطعة قاعدة للقطعة التي فوقها،/ ع – ٨٥ – و ف – ١٣٣ – ظ
وقاعدة القطعة السفلى هو قاعدة نصف الكرة / ورأس ‹قطعة› المخروط الأعلى نقطة هي قطب ل – ٩ – ظ ب – ١٦١ – ظ

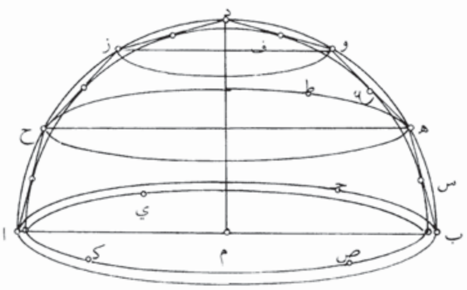
1 مساويتان: متساويتان [خ، ر، ض، ع، ق، و، ي] / لقوسي: كقوسي [خ] / ا ز: ا ب [ا] لز [هـ] / فسطح: وسحح [ي] / ط ا و ز: ط و ر [خ] / ا و: ا ر [و] / وبمثل: مثل [ع] – 2 و هـ: حـ هـ [ت] هـ و [ف] ر هـ [م] / فـ د هـ: ور هـ [خ] / مثل: ناقصة [ذ، ع] / مثل د ا ط ز ح ل: أثبتها فوق السطر [و] – 3 إن: ناقصة [ل] اب [خ] / د م: ناقصة [جـ] أثبتها في الهامش [ك] / نصف: ناقصة [ع] / ب ل: رل [س] / ب ل: رل [ع] / د هـ: ر هـ [م] / مربع: ربع [م] – 4 مثلثي: مبنى [خ] / د ب م: د م ب [ذ، ع] / ب هـ د: ب هـ م [ذ] / لكون: يكون [ع، م] – 5 د م ب: د هـ ب [هـ] / هـ د ب: د ب [ع] / ب: ز، ثم صححها في الهامش [هـ] / فنسبة: ونسبة [ا، ب، ت، ث، جـ، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ق، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] / إلى: ناقصة [خ] / م د: ب د [ذ] / كنسبة ب د: ناقصة [خ] – 6 ب ل: رل [ع] / في: ناقصة [ا] / د هـ: ر هـ [ع] / م د: م ب [ع] د م [د، س] م ب د [خ] / وب د في م د: ناقصة [جـ، خ، ت، ر، هـ] / م د: د م [س] / أصغر: وأصغر [ر] / مربع: ربع [ب] – 6-8 ب د (الثالثة) ... مربع (الأولى): ناقصة [ت] – 7 ب د: ناقصة [خ] / في (الثانية): أثبتها في الهامش [ف] / ح ل: ح [خ] / جميعًا: ناقصة [خ، ي] – 8 مربع: مربعى بع [ع] / مربع: مربع نصف القطر [س] – 9 فكل: وكل [ب، ش، و، ي] ک ل [خ] / قطر فيها: بطرفها [ق] قطرها [ي] / فيها: منها [ا، ب، ث، خ، ش، ص] / الربعين: الرابعين [خ] / متساوية: مساوية [ض، و] / كم: ل م كما [خ] – 10 نقط: نقطة [ا، خ، ذ، ص، ض، ع، ق، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] / أوتار: اوتا [م] – 11-12 في نصف ... الأقسام: ناقصة [ص] – 11 وفي: في [ع] / الأوتار: الاوتان [خ] – 12 المركز: مركز [ذ] أوتار: ناقصة [س] / وذلك: في ذلك [ت] ذلك [خ] / هو: ناقصة [ع] / المطلوب: المط [جـ، ت، س] – 13 يج: ناقصة [خ، ذ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / إذا وقع: ناقصة [خ، ي] / في: ناقصة [ي] / يحيط: محيط [ع، ي] / به نصف: بنصف [ق] / وكان: كان [ت] وكانت [ن] / قطع: أثبتها تحت السطر [ر] – 14 مستديرة: مستدير [ل، ک، ن، و] مستديرات [هـ] / سطح: سطحي [د، خ، ع، ف، ق، هـ، م، ي] / قطعة: قطع [ق] أثبتها في الهامش [هـ] / قاعدة للقطعة: أثبتها في الهامش [ث] / للقطعة: القطعة [هـ] – 15 القطعة: ناقصة [م] / نقطة: أثبتها فوق السطر [ر] / ورأس ... قطب: مكررة [هـ].

www.j4know.com

نصف الكرة، / وكانت القواعد متوازية، والخطوط الخارجة من / قواعد القطع إلى / أعاليها على و – ١٦٩ – و
استقامة متساوية، ثم وقع في المجسم نصف كرة يحيط به المجسم قاعدتها دائرة / في سطح قاعدة ت – ٢٨٩ ذ – ٣٨٦ – و
النصف // الأول، كان السطح المحيط بالمجسم أصغر من ضعف/ قاعدة نصف الكرة الأول ن – ١٢٠ – و ش – ١٦٨ – و
وأعظم من ضعف قاعدة نصف الكرة الثاني. ض – ٧٧ – ظ ص – ١٣٢

فليكن نصف الكرة ا ب جـ د قاعدتها عظيمة ا ب جـ وقطبها د، وليكن فيه مجسم على ما
وصفنا مركب من ثلاث قطع، أولاها ترتفع من دائرة ا ب جـ إلى دائرة هـ ط ح / والثانية ترتفع / ر – ٤٤
منها إلى دائرة ول ز والثالثة ترتفع منها / إلى نقطة د. ث – ١٨١ – و خ – ١٩٠ – و

نقول: فالسطوح المستديرة المحيطة بهذا المجسم جميعًا أصغر من ضعف سطح دائرة ا ب جـ.



فلنخرج في نصف كرة ا ب جـ د نصف عظيمة يمرّ بالقطب وهو ا د ب، ونخرج قطر ا ب
للكرة ونـنصفه على م. ونخرج ح هـ زو، فهما موازيان لـ ا ب، لأنها فصول مشتركة بين عظيمة
ا د ب والدوائر الثلاثة، وهما قطرا دائرتي هـ ح ط وزل. / ونخرج خطوط ب هـ هـ و ود من ذ – ٣٨٦ – ظ
القواعد إلى الأعالي، وهي متساوية بالفرض، وسطح نصف واحد منها في نصف ا ب وفي هـ ح / ک – ٢٢٢ – ظ

1 نصف الكرة: مكررة [هـ] / والخطوط: فالخطوط [م] / القطع: للقطع [خ] – 2 متساوية: مساوية [و] / يحيط: محيط [ع] / المجسم: مكررة [ا] الجسم [ع] – 3 النصف: لنصف [ص] / بالمجسم: بالجسم [ق] – 4 ضعف: نصف [جـ، ت، ر] اضعف [و] / نصف: ننصف [ع] أثبتها في الهامش [ک] – 5 د: و [س] – 6 وصفنا: وضعنا [خ، ر، ک، ل، و] / مركب: مركبا [ت] / ثلاث: ثلثه [ب، ش] / أولاها: اولها [ت] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل، ک] منه يقع [ث] مرتفع [س] / ا ب جـ: ا ب جـ د [ت، خ، ي] / هـ ط ح: هـ ط [س] ط ب ح [خ] ط ح [ذ] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل] ناقصة [ي] – 7 دائرة ول ز... إلى: ناقصة [س] / ول ز: ول [ي] وک ر [خ] / والثالثة: الثالثة [ف] والثانية [و] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل] منه يقع [ث] / منها: مكررة [ق] / د: و [ع] – 8 فالسطوح: فال سحوح [ي] فاالسطوح [خ] / المحيطة: المحيط [ب، خ، ر] / المجسم: المجسم ر [ع] / أصغر: ناقصة [ذ، ع] / سطح: أثبتها فوق السطر [ت] – 9 كرة: ک ره [خ] / نصف: ناقصة [ع] / قطر: قطب [خ] – 10 وننصفه: وبنصفه [س] / ح هـ: هـ ح [س] / زو: ور [ع، م] / فهما: فيها [و] فها [ع] فهو [جـ] / موازيان: متوازيان [ث، ر] ولكن صححها ناسخ [ت] فوقها / لـ ا ب: ناقصة [ت] ب [و] ا ب [ض] / عظيمة: عظمه [س] – 11 قطرا: قطر [ع] / هـ ح ط وزل: ا هـ ح ط ول ر [ع] هـ ح ط د رل [خ] / خطوط: قطرط [ي] / ب هـ: هـ ب [س] ب ر [خ] – 12 إلى: ناقصة [ا، ف] / الأعالي: الاعلى [ي] / متساوية: مساوية [ع] / واحد: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] / نصف: ناقصة [ب، ش، ص] / هـ ح: ح هـ [ت].

www.j4know.com

وزَ جميعًا أصغر من مربع نصف اب لما مرّ. وأيضًا / سطح واحد منها / في نصف محيط دائرة ي – ٦٤ – ظ م – ٢٧
اب جـ وفي محيطي دائرتي ح هـ ط / زول جميعًا مثل السطح المحيط / بالمجسم لما مرّ. وسطح س – ١٢ – و ذ – ٣٨٢ – و
واحد منها في نصف اب وفي هـ ح وزَ جميعًا، ثم الحاصل فيما إذا ضرب/ فيه / القطر حصل ق – ٣٢ – ظ
المحيط، / مساوٍ لسطح واحد منها في نصف محيط دائرة اب جـ وفي محيطي دائرتي ح هـ ط زول ع – ٨٥ – ظ ل – ١٠ – و
جميعًا، أعني للسطح المحيط بالمجسم وهو أقل من ضعف الحاصل من ضرب مربع نصف اب فيما
إذا ضرب/ فيه القطر حصل المحيط. ومربع نصف اب فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط هو ت – ٢٩٠
مساوٍ لسطح الدائرة، لأن ضرب نصف اب فيما إذا ضرب فيه القطر / حصل المحيط هو نصف و – ١٦٩ – ظ
المحيط وضربه مرة أخرى في نصف اب هو سطح الدائرة. فالسطح المحيط بالمجسم أقل من ضعف
سطح دائرة / اب جـ./ ض – ٧٨ – و

ثم نرسم في مجسم اب جـ د نصف كرة يحيط به المجسم. ولكون سطح قاعدته/ دائرة في ح – ٨٨ – ظ ش – ١٦٨ – ظ
سطح / دائرة اب جـ يكون أصغر منها. وننصف خطوط ب هـ هـ و و د على نقط س ع ف، ر – ٤٥
ونصل م س م ع م ف وهي // متساوية لأنها أعمدة من المركز على أوتار متساوية. ونرسم على مركز ا – ١٠٢ – و ب – ١٦٢ – و
م وببعد م س في سطح دائرة اب جـ دائرة ک ص ي، ونخرج / في سطح هذه الدائرة خط ف – ١٣٤ – و ک – ٢٢٣ – و
م ص وليس هو / في سطح دائرة ا د ب. ولأن خطوط م س م ع م ف م ص الأربعة المتساوية

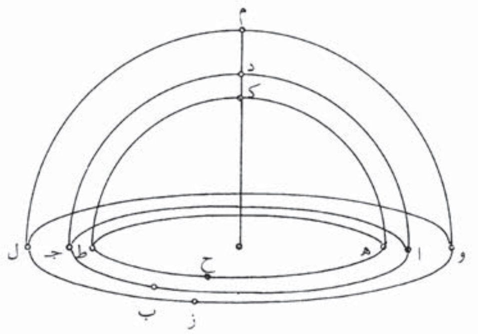
1 أصغر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «فسطح واحد منها (منها [ا]) فيما ذكر أصغر من ضعف مربع نصف اب وكذا (ولذا [ا]) إذا ضربناها فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط» / وأيضًا: أيضًا [ح] / سطح: ناقصة [ق] / دائرة: ناقصة [ب، ش، ص] – 2 محيطي: محيط [و] / ح هـ ط: هـ ح ط [ض] / المحيط: المجسم [ع] فراغ [ذ] – 3 نصف: كرر بعدها الجملة السابقة «محيط دائرة ... جميعًا مثل» [خ] / هـ ح: ح هـ [ح] / فيه: و[ي] ناقصة [خ] مثله [ذ] – 3-4 اب ... نصف: ناقصة [جـ، ت، ر] – 4 المحيط: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص] التعليق التالي» لأن نصف اب فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط هو نصف اب جـ وهـ ح (ر هـ ح [ا]) منه محيط ح هـ ط ووزَ فيه محيط وزل (زول [ص، د، هـ])» / مساوٍ: مكررة [ف] / اب جـ: اب د [ع] / وفي: في [س] / ح هـ ط: ح هـ ل [ا] ح هـ [س] ح هـ ط ا [ي] / زول: ول [ي] – 5 للسطح: السطح [ت، خ، د، ز، ض، ط، ق، هـ، م، و، ي] / من (الأولى): ناقصة [خ] – 6 فيه: فيها [س] / حصل: حطل، ثم أثبت الصواب في الهامش [ع] / ومربع ... المحيط: ناقصة [ذ، ق] / حصل المحيط: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / هو: ناقصة [س] وهو [خ] – 6-7 ومربع ... حصل المحيط: أثبتها في الهامش [هـ] / هو ... المحيط: ناقصة [د] / مساوٍ ... حصل المحيط: ناقصة [ح] – 7 لأن: ولأن [ض] / نصف ... ضرب: ناقصة [م] / فيما: مما [ق] / هو: وهو [خ، ذ، س] – 8 وضربه: وضرب [خ] وحربه [ض]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ص] التعليق التالي «ومنه يحصل مربع نصف اب»، وكتبه ناسخ [هـ] فوق السطر / وضربه ... المحيط: مكررة [ل] / هو: وهو [ذ، ع] / سطح: نصف [ي] / الدائرة: ناقصة [خ] / فالسطح: والسطح [هـ] ناقصة [خ] بالسطح [ض] / أقل: اقول [خ] / ضعف: نصف [س، و] – 9 اب جـ: اب هـ [ع] – 10 مجسم: مجسم المحيط [ا] / يحيط: محيط [هـ، ع] / ولكون: ويكون [ص، ک، ل، م] لكون [ح] / قاعدته: قاعدة [س، و] – 11 دائرة: ناقصة [خ، ل] / يكون: ويكون [خ] / وننصف: ونصف [ع] وبنصف [و] / هـ و: وهـ [ث] / نقط: نقطة [ث، خ، س، ذ، ع، ي] – 12 ونصل: ولنصل [ت] / م س: مصـ [ي] منه [خ] / متساوية (الأولى): مساوية [ا، ذ، ع، و] / مركز: مر [ي] – 13 وببعد: وننفذ [ک، ل] / م س: س [ع] / اب جـ: اب جـ د [ا، ف] ناقصة [ي] / دائرة: ناقصة [ع، ي] / ک ص ي: د ص ي [هـ] ک ص ري [خ] / ونخرج: يخرج [خ] / هذه: هذا [خ، ع] / الدائرة: الدوائر [ق] – 14 خطوط: خطر [و] / م ف: م ص [ک] م ب [ض] / م ص: م ف [ک، ل] / م س ... المتساوية: ناقصة [ا].

www.j4know.com

التي / ليست في سطح واحد خرجت من نقطة مَ إلى محيط الكرة الداخلة، يكون مَ مركزًا لها ذ – ٣٨٢ – ظ
وم س نصفَ قطر لها ودائرةُ ک ص ي قاعدةً لها. ومربع م س أصغر / من سطح نصف ب هـ في خ – ١٩٠ – ظ
نصف ا ب وفي هـ ح وز جميعًا، فمربع م س في المقدار / الذي إذا ضرب فيه القطر حصل ل – ١٠ – ظ
المحيط، أعني سطح دائرة ک ص ي، أصغر من سطح نصف ب هـ / في نصف ا ب وفي هـ ح ن – ١٢٠ – ظ
وز جميعًا ثم الحاصل في المقدار الذي إذا / ضرب فيه القطر حصل المحيط، أعني نصف سطح س – ١٢ – ظ
المجسم المحيط بنصف الكرة الداخلة. فجميع سطح المجسم أعظم من ضعف سطح دائرة
ک ص ي؛ وذلك ما أردناه.

– **يد** – سطح نصف الكرة المستدير ضعف سطح الدائرة العظيمة التي هي/ قاعدتها. ت – ٢٩١
فليكن ا ب ج د نصف كرة، ودائرة ا ب ج عظيمة تقع فيها وهي قاعدتها، ودَ قطبها. فإن
لم يكن ضعف سطح / دائرة ا ب ج / مساويًا لسطح نصف الكرة، فليكن أولاً أصغر منه، ع – ٨٦ – و
وليكن مساويًا لسطح نصف كرة / أصغر من نصف كرة ا ب ج د، وهو نصف / كرة د – ١٥١ – و هـ – ٦٣ – ظ
هـ ح ط ک./ فإذا عمل في / نصف كرة / ا ب ج د مجسم – كما وصفنا – قاعدته دائرة ا ب ج ر – ٤٦ ص – ١٣٣
ورأسه نقطة دَ بحيث لا يماس / نصف كرة هـ ح ط ک، كان سطحه/ أصغرَ من ضعف سطح ذ – ٣٨٣ – و ي – ٦٥ – و
دائرة ا ب ج وأعظمَ من سطح نصف كرة هـ ح ط ک. فضعف سطح دائرة ا ب ج المساوي ث – ١٨١ – ظ ق – ٣٣ – و
لسطح نصف كرة هـ ح ط ک أعظم كثيرًا منه؛ هذا خلف.

1 التي ... يكون: ناقصة [ا] / التي: ناقصة [ف] / ليست: ناقصة [ب، ش، ص] أثبتها في الهامش [ن] / نقطة: نقط [خ] / مركزًا: مركز [ع] مركزها [ذ، م] / لها: ناقصة [خ] – 1-3 لها وم س ... إذا: ناقصة [ي] – 2 وم س: وم ص [ذ] / وم س نصف قطر لها: مكررة [ح] / قطر لها: قطرها [ت، ج، د، ر، ز، ط، ع، ل، ق] / ومربع: اومربع [خ] / سطح: مسطح [ع] / نصف ب هـ في: مكررة [ذ] – 3 نصف: ناقصة [ل] / ا ب: ب ا [ذ، ع] / هـ ح: ح هـ [ج، ذ، ع، م] / وز: هـ ر [ت] / فيه: ناقصة [ذ، ع] / حصل: خصل [و] – 3-5 فمربع ... جميعًا: ناقصة [خ] أثبتها في الهامش [ث] – 4 سطح (الأولى): ناقصة [ذ، ع] / نصف (الثانية): ناقصة [ح] / ا ب: ا ي [م] / وفي: وفي نصف [و] – 5 إذا: أثبتها فوق السطر [ن] / القطر: ناقصة [ي] / سطح: ناقصة [و] – 6 المحيط: ناقصة [ذ، ع] / الداخلة: ناقصة [ا] / ضعف: ناقصة [م] نصف [ذ] / دائرة: الدائرة [ض] – 8 يد: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / سطح: ناقصة [خ، ض، ع] / نصف الكرة: ناقصة [خ] / المستدير: المستديرة [ج، س، ق] / قاعدتها: قاعدته [ا، ب، ت، ث، ج، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ک، ل، ن، م، و، هـ، ي] – 9 ا ب ج د: ا ب د ح [ع] ا ب ج [م] / ا ب ج: ا ج [ج] / تقع: يقع [ر، س، ک، ل، ن، و] / قاعدتها: قاعدته [ا، ب، ت، ث، ج، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] – 10 يكن: ناقصة [ذ] / ضعف: ضعيف [س] / الكرة: ناقصة [م] – 10-11 الكرة ... نصف (الأولى): ناقصة، لكن نجد في الهامش «لسطح نصف كرة ا ب ج د فليكن مساويًا» مع «ظ» فوقها، يعني «الظاهر» [ج] مكررة [خ] – 11 كرة (الثانية): ناقصة [م] / وهو: و [خ] / كرة: ناقصة [ت، ج، ر، س] – 12 هـ ح ط ک: ح ط ک [ب، خ، ذ، ش، ص] هـ ح [ج] / كرة: ناقصة [ا، ب، ض، ل، ک، ن، ش، ص، و] / ا ب ج د: ا ب ج [ج، ت، ر] / مجسم: ناقصة [ف] / وصفنا: وضعنا [ل، ک] / دائرة: ناقصة [ع] – 13 بحيث: حيث [خ، ي] / كرة: ناقصة [ج، ت، ر، س] / هـ ح ط ک: ح ط ک [خ] / ضعف: ناقصة [ف] – 13-14 كان ... هـ ح ط ک: أثبتها في الهامش [ک] ناقصة [م] – 14 وأعظم ... ا ب ج: ناقصة [س] / هـ ح ط ک: ح ط ک [خ] / فضعف: وضعف [ا، ب، ح، ش، ص، ض، ق، ک، ل، ن، و] ضعف [ج، ت، ر] نصف [خ] / فضعف سطح دائرة: مكررة [و] – 15 هـ ح ط ک: ح [خ] ح ط ک [ث] / منه: من [س].



ثم ليكن ضعف سطح دائرة ا ب جـ أعظم من سطح نصف كرة / ا ب جـ د، وليكن مساويًا لسطح نصف كرة وزل م. ونعمل فيه مجسمًا – كما وصفنا – غير مماس لنصف كرة ا ب جـ د./ فيكون سطح المجسم / أعظم من ضعف // سطح دائرة ا ب جـ / لما مرّ، وسطح نصف كرة وزل م أعظم من سطح المجسم لكونه محيطًا به. فسطح نصف كرة وزل م أعظم كثيرًا من ⟨ضعف⟩ سطح دائرة ا ب جـ، وكان / مثله؛ هذا خلف. فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه./ و – ١٧٠ – و ض – ٧٨ – ظ جـ – ٤٦ – و ط – ٢٦٤ – و م – ٢٨ ك – ٢٢٣ – ظ ش – ١٦٩ – و

وقد بان منه أن سطح الكرة أربعة أمثال سطح أعظم دائرة تقع فيها./ ل – ١١ – و

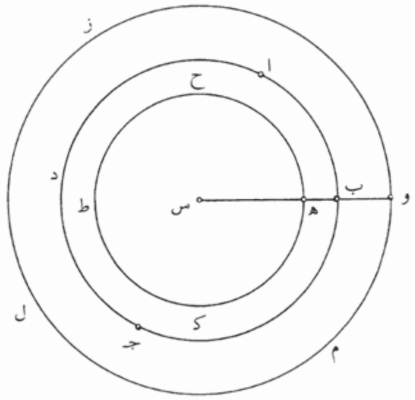
– يه – كل كرة فإن الحاصل من ضرب نصف قطرها في ثلث السطح المحيط بها مساوٍ لعظمها. خ – ١٩١ – و

فليكن الكرة ا ب جـ د ونصف قطرها س ب. فإن لم / يكن س ب في ثلث سطح كرة ا ب جـ د عظمها، فليكن أولاً أصغر من عظمها، وليكن س ب في ثلث سطح / كرة أعظم من ب – ١٦٢ – ظ ذ – ٣٨٣ – ظ

2 وزل م: وول م [خ] / ونعمل: ويعمل [س] / ونعمل فيه مجسمًا: ناقصة [ي] / مجسمًا: مجسم [ع] / وصفنا: وضعنا [ل، ك، و] – 3 فيكون: فليكون [و] / المجسم: المجسمة [ي] / أعظم: الأعظم [خ] – 4 أعظم ... وزل م: مكررة [ع] / من: ناقصة [ع] / به: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / فسطح: بسطح [ت] – 5 خلف: هو خلف [ع] / ثابت: الثابت [خ] – 7 وقد ... فيها: ناقصة [س] أثبتها في الهامش [ث] / تقع: ناقصة [ض، ك، ل، ن، و] يرتفع [هـ] / فيها: ناقصة [ب، ش، ص، ي] – 8 يه: ناقصة [ا، خ، د، س، ش، ض، ع، ق، ي] ١٥ [ط] / كل كرة: ناقصة [خ] / ضرب: الضرب [ع]؛ نجد في هامش [ا، ش] التعليق التالي «ويلزم منه أن سطح قطر الكرة في محيط (يحيط [ا]) أعظم دائرة يقع فيها مساو (مساويًا [ا]) لسطح الكرة لما تبين أن نصف قطر الدائرة (الكرة [ا]) في نصف محيطها هو مساحة الدائرة» / المحيط: ناقصة [ف] – 10 س ب: س ف ب ل [س] بب [م] ب أعظم [خ] / س ب: م س ب [خ] / ثلث: ناقصة [س] – 11 ا ب جـ د: ا حـ د [ذ، ع، ط] / ا ب جـ د ... سطح كرة: أثبتها في الهامش [ف] / عظمها (الثانية): ناقصة [ع] / وليكن ... أعظم من: ناقصة [ي] / كرة أعظم من: فراغ [ذ] / أعظم من: ناقصة [خ].

www.j4know.com

كرة ا ب جـ د مساويًا لعظم كرة ا ب جـ د، مثلاً ككرة وز ل م. وليكن / مركزاهما واحدًا، / ع – ٨٦ – ظ
ونعمل على كرة ا ب جـ د مجسمًا – كما وصفنا – لا يماس كرة وز ل م. فيلزم مما مرّ أن س ب في س – ١٣ – و
ثلث / سطح المجسم يساوي ⟨عظم⟩ المجسم ويكون أكثر / من كرة ا ب جـ د. ويلزم منه أن يكون ت – ٢٩٢
ثلث سطح المجسم أعظم من ثلث ⟨سطح⟩ كرة وز ل م المحيط به؛ هذا خلف. ر – ٤٧



ثم ليكن س ب في ثلث / سطح كرة ا ب جـ د أعظم من عظمها، وليكن س ب في ثلث ف – ١٣٤ – ظ سطح كرة أصغر من كرة ا ب جـ د – ككرة هـ ح ط ك – مساويًا لعظم كرة ا ب جـ د. ونعمل في كرة ا ب جـ د مجسمًا كما وصفنا بحيث لا يماس كرة هـ ح ط ك. ويجب مما مرّ أن س ب في ثلث مساحة سطح المجسم أصغر من مساحة كرة ا ب جـ د، فثلث سطح هـ ح ط ك أعظم من ثلث سطح المجسم المحيط به؛ هذا خلف.

فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه.

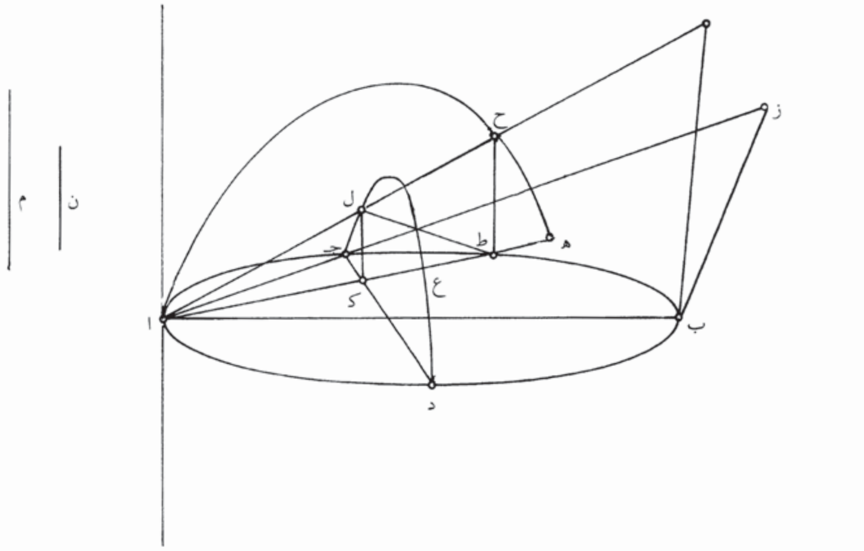
1 كرة ... وز ل م: ناقصة [ي] فراغ [ذ] / كرة: ناقصة [خ] / مساويًا ... ا ب جـ د: مكررة [ع] / لعظم: اعظم [ع] لعظيم [و] / ككرة: لكرة [ب، ش، ص] الكرة [خ] / وليكن: فليكن [ب، ش] / مركزاهما: مركزهما [خ] مراكزهما [ث] موازاهما [و] – 2 ونعمل: ويعمل [س] / على: ناقصة [خ] / وصفنا: وضعنا [ذ، ط، ل، ك، و] / يماس: تماس [ب، ش، ط، و] / س ب: س ب ا [ع] – 3 سطح: السطح [ق] كتب فوقها «مساحة» [ا] / يساوي: تساوى [ب، ش] يتساوي [ا] / ويكون: مكررة [ف] / أكثر: أكبر [ت، ر، ف، ق] / ا ب جـ د: ا ب ط د [ع] / منه: ناقصة [ت] – 3-8 المجسم ويكون ... المجسم: ناقصة [ا] – 4 ثلث: ناقصة [ع] أثبتها في الهامش [ت] / المجسم: ناقصة [ث] / المحيط: المحيطة [ب، ش] / به: ناقصة [ق] – 4-5 وز ل م ... كرة: ناقصة [خ، ي] – 5 ثم ليكن: ثم لم يكن [ذ، ع، ط] / ثلث: ناقصة [و] / س ب: س ت [م] – 5-6 ا ب جـ د ... سطح كرة: ناقصة [ث، س] – 6 سطح: أثبتها فوق السطر [م] / ا ب جـ د: ناقصة [ب، ش، ص] أثبتها في الهامش [ن] فوق السطر [و] / ككرة: لكرة [ي] / هـ ح ط ك: ح ط ك [خ] / مساويًا: مساو [ق] أثبتها في الهامش [ث] / لعظم: ناقصة [ح] / ونعمل: ويعمل [س] – 7 وصفنا: وضعنا [ذ، ط، ل، ك، و] / بحيث: ب حـ د ب [خ] / يماس: تماس [ب، ش] / كرة: ناقصة [ع] / هـ ح ط ك: ح ط ك [ت] / ويجب: وتحت [و] وبحيث [خ] ويلزم [ذ، ع، ط] / مما: بما [ت] / أن: من ان [خ] / س ب: حـ ب [ت] / في: مكررة [ف] – 8 سطح (الثانية): ناقصة [ت، و] / هـ ح ط ك: وح في ط ك ل [ت] – 9 ثلث: ناقصة [ت] ل ب [خ] / المجسم: ناقصة [ث] – 10 فإذن: بان [ي] ل ب [خ] / ثابت: الثابت [خ].

www.j4know.com

/ – يو – نريد أن نجد مقدارين يقعان بين مقدارين مفروضين / لتتوالى الأربعة على نسبة ز - ٥٠ - و ا - ١٠٢ - ظ
واحدة.

وعلم ذلك نافع لطالب الهندسة، وبه يَعرفُ ضلع المكعب./ وذلك أنا إذا عرفنا مقدارين ن - ١٢١ - و ك - ٢٢٤ - و
يقعان / بين / الواحد والمكعب على نسبة واحدة يكون ثانيها من جانب الواحد ضلعًا للمكعب. ق - ٣٣ - ظ
وهذا العمل / لرجل من القدماء / اسمه مانالاوس / أورده في كتاب له في الهندسة / ونحن نصفه. ط - ٢٦٤ - ظ خ - ١٩١ - ظ

ليكن المقداران خطي / م ن، وليكن م أعظم من ن ؛/ ونرسم دائرة/ ا ب جـ ونجعل قطرها ل - ١١ - ظ ذ - ٣٨٤ - و
وهو ا ب مساويًا لـ م، ونخرج فيها وترا ا جـ مساويًا لمقدار ن، / ونخرج من ب عمودًا على ا ب، ي - ٦٥ - ظ ض - ٧٩ - و
ونخرج ا جـ حتى يلقاه على ز، ونقيم على / قوس / ا جـ ب نصف أسطوانة مستديرة قائمة، أعني و - ١٧٠ - ظ نهاية - ق
تكون أضلاعها أعمدة على سطح دائرة ا جـ ب. وندير على خط ا ب نصف دائرة يقوم سطحها ص - ١٣٤ ز - ٥٠ - ظ



1 يو: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] الشكل السادس عشر من كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية لبني موسى محمد والحسن وأحمد [ز] / نريد: ناقصة [خ] / نجد: ب ح د [خ] / مفروضين: مفروضتين [ز] / لتتوالى: تتوالى [ع] لتوالى [خ، ش] ليستولى [ح] / الأربعة: لأربعة [ص] – 2 واحدة: واحد [ع] – 3 لطالب: لطلب [م] / يعرف: نعرف [و] نقدر [ك، ل] / ضلع: سطح ضلع [ع] ضلعب [ش] / أنا: أثبتها فوق السطر [ث] – 4 ثانيها: مالها [س] / للمكعب: لمكعب [ت] – 5 العمل: لعمل [خ] / لرجل: لزحل [ل] الرجل [خ] / القدماء: العلماء [جـ، ت، ر، س] / نصفه: ونصفه [جـ] نضفه [خ] – 6 ليكن: ليكون [ا، ز] / خطي: أثبتها في الهامش [ف] / ونجعل: ويجعل [س] – 7 مساويًا: مساو [جـ، ز، ض، ل، ك، ن، و] / ونخرج: ويخرج [س] / وتر: وترا [م] / مساويًا لمقدار: مساو بالمقدار [ز، ك] / ونخرج: ويخرج [س] / من ب: فراغ [ذ] – 8 حتى: على [ذ، ع، ط] / ونقيم: ونقيم ه [خ] / نصف: فراغ [ذ] / مستديرة: مستدير [ي] – 9 سطح دائرة: فراغ [ذ] / ا جـ ب: ا ب حـ [ذ، ع، ط] ا جـ [س] / ا ب: ب [خ] / يقوم: تقوم [ذ، س، ل] / سطحها: سطحا [ا].

على سطح ا ب جـ / على / زوايا / قوائم وهي قوس ا ح هـ . ونثبت نقطة آ من قوس/ ا ح هـ في ش – ١٦٩ – ظ
موضعها كالمركز ونديرقوس ا ح هـ على مركز ا بحيث يكون سطحها / في جميع دورانها قائمًا على م – ٢٩ ت – ٢٩٣
سطح ا ب جـ على قوائم ليكون قوس ا ح هـ يفصل سطح نصف الأسطوانة القائم على قوس ر – ٤٨ س – ١٣ – ظ
ا جـ ب . ونثبت / خط ا ب / كالمحور ونديرمثلث ا ز ب على محور / ا ب حتى يلقى خط ا ز فصل ب – ١٦٣ – و ع – ٨٧ – و
سطح نصف الأسطوانة وترسم نقطة جـ من خط ا ز في دورانه نصف دائرة جـ ع د قائمًا على ذ – ٣٨٤ – ظ
سطح ا ب جـ على قوائم. ونرسم على الموضع الذي يلقى فيه خط ا ز فصل سطح نصف الأسطوانة
نقطة ح . ونثبت قوس ا ح هـ من مدارها عند نقطة ح ونخرج خطي ا ح ح هـ ونرسم حيث يلقى
خط ا ح قوس جـ ع د نقطة ل ، ونخرج من نقطة ح عمودًا على سطح دائرة ا ب جـ وهو
خط ح ط ، / ونخرج ل ک وهو عمود على سطح دائرة ا ب جـ لأنه فصل مشترك لسطح مثلث ک – ٢٢٤ – ظ
ا ح هـ / ولنصف دائرة / جـ ع د القائمين على سطح ا ب جـ ، ونخرج خط ل ط ونبيّن أنه عمود ث – ١٨٢ – و
على ا ل لأن سطح جـ ک في ک د مثل مربع ل ک ./ ولكن ضرب جـ ک في ک د مثل ضرب ط ک ط – ٢٦٥ – و ل – ١٢ – و
في ک ا ، فضرب ط ک في ک ا مثل مربع ل ک ، فزاوية ط ل ا قائمة. وقد تبيّن أن زاوية ا ح هـ
قائمة لأنها مركبة على نصف دائرة ا ح هـ ، وأن زاوية / ا ط ح قائمة لأن ح ط عمود على سطح د – ١٥١ – ظ
دائرة / ا ب جـ وخط ط ا في سطح دائرة ا ب جـ ، وأن / زاوية ا ل ط قائمة لما مرّ. فمثلثات ض – ٧٩ – ظ ف – ١٣٥ – و

1 سطح ... زوايا: فراغ [ذ] / ا ب جـ : ا حـ [ع] / زوايا: زاويا [ت، ي] / قوائم: قائم [ک، ل] / ا ح هـ : ا حـ هـ [س] ا ح ه و[خ] / ونثبت: وثبت [ا، ط، و] / آ : ا م [ي] / آ من قوس: ناقصة [خ] / ا ح هـ : ا حـ هـ [ط] ا هـ ح [ب، ش، ص] – 1-2 في موضعها كالمركز: فراغ [ذ] – 2 موضعها: مواضعها [ش] / ونديز: وندوير [ذ، ع، ط] / ا ح هـ : ا ح حـ [س] / آ : ناقصة [و] / دورانها: دوراتها [ص، ط] دورانا [ز] / قائمًا: قائما [و] – 3 سطح: ناقصة [ذ، ع، ط] / ليكون: فيكون [ث، ع، ط] / قوس: ناقصة [جـ، ت، ر] / يفصل: مكررة [ط] بفصل [س] ناقصة [ر] تفصيل [ز] / سطح نصف الأسطوانة: ناقصة [جـ، ر] – 4 ا جـ ب: ا جـ ل [س] / ونثبت: ويبت [ط، و] / كالمحور: كالمركز [جـ، ت، ر، س] كالمحوره [م] كالمجور [خ] / ونديز: نديز [م] / حتى: على [ص] / يلقى: تلقى [خ] / يلقى خط ا ز: ناقصة [جـ، ر] / خط: مكررة [ذ، ط] / فصل: ونصل [ت] فضل [ب، ش] يفصل، وكتب فوقها «نصل» [ر]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ص، هـ] التعليق التالي «هو خط منحنٍ يحدث على سطح الأسطوانة من حركة نصف دائرة ا ح هـ» – 5 في: ناقصة [ي] / جـ ع د: حـ ع و[ع] جـ د ع [س] ونجد في هامش [ا، ب، د، ص] التعليق التالي «جـ ع منها يكون داخل الأسطوانة» / قائمًا: قائما [و] – 5-6 نقطة ... قوائم: أثبتها في الهامش [هـ] – 6 فيه: منه [خ] / ا ز: ناقصة [ي] ا ب [ث] / فصل: فضل [ب، ش] / سطح نصف: نصف سطح. وكتب «خ» فوق نصف و«م» فوق سطح [ر] – 7 ونثبت: وثبت [ط، ع] / ا ح هـ : ا هـ ح [ب، ش، ص] / مدارها: مركزها [س] / ونخرج: ويخرج [س] / ونرسم: وترسم [س] / حيث: ناقصة [خ] / يلقى: تلقى [س] – 8 ا ح: ا حـ [س] / جـ ع د: ح ع د [ض] / ل : د [ذ، ع، ط] / ونخرج: ويخرج [خ، س، ي] / ح : ناقصة [خ] – 8-9 وهو خط ... ا ب جـ: ناقصة [ذ، ط] – 10 ا ح هـ : ا هـ ح [س] / ولنصف: ونصف [ت] / القائمين: القائمتين [ا، ب، ث، ز، ش، ض، و] / ا ب جـ: ا جـ [ف] / ل ط: ب ط [خ، ز] – 11 سطح: ناقصة [جـ] / جـ ک : ک [ا] ناقصة [هـ] / ک د: بد [خ] / ضرب (الأولى): ضر[ز] / ط ک : ک ط [ک، ل] ط ل [جـ، س] – 11-12 ولكن ... ل ک : ناقصة [م] / ک د مثل ضرب ط ک في: ناقصة [خ] – 12 ک ا: نا [خ] / فضرب: فضر [ا] / ط ک : ک ط [ک، ل] / ک ا: با [خ] / فضرب ط ک في ک ا: مكررة [ا] ناقصة [ذ، ي] / ل ک : ک ل [ز] / ط ل ا: ط ل [ب، ش، كل [ي] / تبين: بين [س] – 13 دائرة: ناقصة [ع] / ا ح هـ : ا حـ هـ [س] ناقصة [و] / ا ط ح: ل ط ح [ا] ل ح ط [ض، ک، ل، ن، و] ا ط ب ح [خ] – 14 وخط ... ا ب جـ: ناقصة [هـ] / ا ل ط: ا ر ط، وأثبت الصواب في الهامش [ز] / فمثلثات: مثلثات [ت].

www.j4know.com

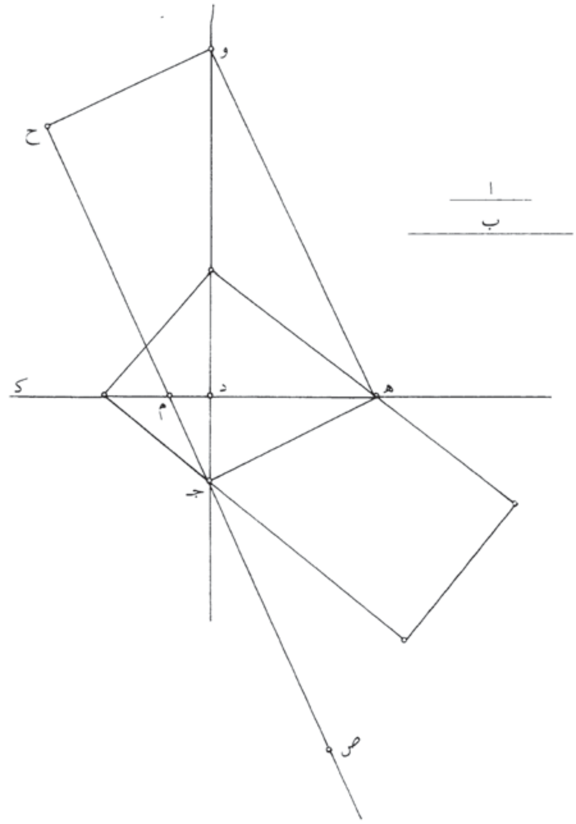
ا ح ه ا ط ح / ا ل ط في كل واحد منها زاوية قائمة وزاوية حادّة مشتركة، / فهي متشابهة: ر – ٤٩
نسبة ه ا إلى ا ح كنسبة ا ح إلى ا ط وكنسبة ا ط إلى ا ل. ولكن خط / ا ه مثل مقدار م / ز – ٥١ – و / ذ – ٣٨٥ – و
وخط ا ل مثل مقدار ن. / فقد وقع بينها مقدارا / ا ح ا ط وتوالت على نسبة؛ وذلك / ما أردناه. / ت – ٢٩٤ / خ – ١٩٢ – و / ج – ٤٦ – ظ / و – ١٧١ – و

– يز – ولأن الأشياء / التي استعملها مانالاوس وإن كانت صحيحة / فهي إما ألا يمكن أن ح – ٨٩ – و / ي – ٦٦ – و
تفعل وإما أن / تكون عسرة جدًا، طلبنا / لذلك وجهًا أسهل. ذ – ٣٨٠ – ظ
فليكن المقداران ا ب ونخط ج د مثل ا ونخرج عليه عمود د ه مثل ب ونصل ه ج س – ١٤ – و / ع – ٨٧ – ظ
ونخرج / ج د ه د لا إلى حدّ، ونخرج من ه عمودًا / على ه ج إلى أن يلقى ج د على و، ونخرج ش – ١٧٠ – و / ا – ١٠٣ – و
من ج خطًا موازيًا له وإلى أن يلقى ه د على م وهو م ج، ونخرجه إلى أن يصير م ص مثل ه و.
ونتوهم أن خط و ه يتحرك من ناحية نقطة و إلى ناحية / نقطة د ويكون طرفه الذي عند و غير ن – ١٢١ – ظ
مفارق في حركته لخط و د ويكون الخط في حركته لا يزال يمرّ على نقطة ه من خط ج ه كما
إذا تحرك خط و ه كما وصفنا، فحيث كان طرفه من خط و د فإن خط و ه في تلك الحال
يمتدّ على استقامة ما بين نقطة طرفه وبين نقطة ه من خط ه ج. ثم نرسم على / الممدود على ب – ١٦٣ – ظ / ك – ٢٢٥ – و
استقامة / خط ه د ك، / ونتوهم / أن خط م ص يتحرك من ناحية نقطة م / إلى ناحية / نقطة ل – ١٢ – ظ / ط – ٢٦٥ – ظ
ك ويكون طرفه الذي عند م غير مفارق في حركته لخط م ك ويكون خط م ص في حركته لا ص – ١٣٥ / ذ – ٣٨١ – و

1 ا ح ه: ا ح ه [س] / ا ط ح: ناقصة [ص] ط ح [س] / ا ل ط: ناقصة [ع] ا ك ط [خ] / واحد: ناقصة [م] / قائمة وزاوية: ناقصة [ي] / وزاوية: وزاوية ط [خ] وزاوية ا [ز] – 2 ه ا: ه [خ] ا ه [ز] / ا ح (الثانية): ح [خ] / وكنسبة: كنسبة [د، س] ونسبة [ز] / ولكن: وليكن [ذ] / ا ه: ا ح [ر] – 3 مقدارا: ار[خ] مقدار[ع] / ن: ر [ذ] / ا ح ا ط: ا ط ا ح [ا، ف] / وذلك: ذلك وذلك [ذ، ط، ع] / ما: وما [خ] / أردناه: كتب بعدها «تم» [ز] – 4 يز: ناقصة [خ، ر، ز، و، س، ش، ض، ط، ع، ي] / ولأن الأشياء: ناقصة [خ] / التي: ناقصة [ث] / استعملها: يستعملها [ص] / مانالاوس: منالاوس [ح، س] / وإن: فان [ك] / كانت صحيحة: كان [ذ] كان صحيحا [ا، ب، ث، ج، ح، خ، د، ر، ز، س، ش، ص، ض، ع، ط، ف، ك، ل، م، ن، و، ه، ي] / ألا: ان [ع] – 5-4 ألا ... وإما: ناقصة [م] – 5 تفعل: يفعل [ا، خ، ر، س، ط، ل] / تكون: يكون [ا، خ، س، ط، ل] لا يكون [ب، ش] / عسرة: عشره [ا، ح، ض، ط، و، ي] / لذلك: كذلك [خ] – 6 المقداران: المقدار[ي] / ونخط: ويخط [ا، ب، خ، ش، ط] وخط [ث، ر] / ا: او[ذ، ع، ط] ا ه [س] / ب: ب ج [ث] – 7 ج د: ح د [ذ، ع، ط] / ه د: ه [ط] / لا: ناقصة [ك، ل] / حد: احد [ث] / ونخرج: ويخرج [س] / على (الثانية): ناقصة [ي] / ونخرج: ويخرج [س] – 8 وهو م ج: ناقصة [ح، خ] / م ج: حح [ي] / ونخرجه: نخرجه [خ] / أن: ناقصة [ث] – 9 ونتوهم: نتوهم [ح، ه] وهوهم [ي] / ناحية: أثبتها فوق السطر[ح] / و: ناقصة [خ] / وإلى ناحية نقطة: ناقصة [ذ، ع، ط] / طرفه: نحوه [ي] / و: ر [ث، ر] – 10 مفارق: معارن [ي] / حركته: حركة [م] / لخط: خط [خ، ز، ف، م، ي] / ويكون: ولكون [س] مكررة [ر] / حركته: الحركة [ج، ث، ر] / لا: الا [ذ، ع، ط] / خط: خطة [س] ناقصة [ج] / كما: كما [خ، ذ، ض، ع، ط، ي] ناقصة [ز] – 11 إذا: فاذا [ز] / خط: ناقصة [ز] / و ه: و ح [ح] / وصفنا: وضعنا [خ، ك، ل] / فحيث: بحيث [خ] / خط: ناقصة [ج] / فإن: فان كان [ث، ج، ر، س] / الحال: الحالة [ب، ث، ش] – 12 يمتد: ممتدا [ع] ويمتد [ب، ش، ص] تمتد [ل] عند [ي] / وبين: و[ك، ل] / ه ج: ح ه [ب، ش] /على: ناقصة [ط] / الممدود: الممتدد [ع] المحدود [ا، ز] – 13 خط: ناقصة [س] / ونتوهم: وسوحه [ي] / م ص: ب ح [ي] / يتحرك: متحركة [ب، ش] – 14-13 إلى ناحية ... مفارق في: ناقصة [م] – 14 طرفه ... ويكون: أثبتها في الهامش [ن] / م: ناقصة [و] / مفارق: مقارن [ي] / حركته: حركه [ط] / لخط: الخط [ع] / م ص: م س [ك، ل] / في حركته: ناقصة [ج].

www.j4know.com

يزال مارًّا على نقطة جـ من خط هـ جـ كما وصفنا من حركة / خط وهـ. ونتوهم أن خطي وهـ ر – ٥٠ م ص في حركتها متوازيان. ونتوهم على طرف خط وهـ على نقطة هـ خطًا قائمًا على خط وهـ على زاوية قائمة مثبتًا/ معه في حركته، ولا نجعل لهذا الخط غاية محدودة ليكون // هذا الخط لا م – ٣٠ ت – ٢٩٥ يزال يقطع خط م ص عند تحرك خطي وهـ م ص. فإذا تحرك خطا وهـ م ص، وكانا في حركتها ز – ٥١ – ظ متوازيين، ولزم طرفاهما خطي ود م ك كما وصفنا، فلا محالة أن الخط القائم على خط وهـ على



1 مارًّا: مار [ح] / هـ جـ: حـ هـ [ب، ذ، ش، ع، ط، و] / وصفنا: وضعنا [خ، ک، ل، و] / من: ناقصة [و] ومن [جـ] / حركة: حركته [و] / خط: ناقصة [د، ي] / وهـ: ور [جـ] رهـ [ي] / أن: الى [ط] – 2 حركتها: حركتها [ب، ش، ص، ع، هـ، و] / ونتوهم: ويتوهم [س] ويتوهم أن [ت، ث، جـ، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، م، ي] / على: ناقصة [خ، ف، م، ي] من [ز] / على: ناقصة [ز] / نقطة: نقط [ک] / هـ: ناقصة [ل] – 1-2 ونتوهم ... وهـ (الأولى): ناقصة [ح] – 3 زاوية: زوايا [جـ، ت، ر] / مثبتًا معه: مثلها معه [ا] متتابعة [خ، ز، س، ل] مسانه [ي] / نجعل: يحصل [ذ، ط] / غاية: فانه، ونجدها فوقها السطر مع «صح» [م] / محدودة: ممدودة [ش] بحدوده [خ] / ليكون: فيكون [ت] – 4 يقطع: نقطع [س] يقع [خ] / خط: بخط [س] ناقصة [م] / م ص: م م [ع] / خطي: خط [ز، خ، ي] / م ص: م س [ع] / فإذا ... م ص: ناقصة [ا، ب، ش، ص، ض، ل، ک، ن، و] / خطا: فراغ [ذ] / م ص: ناقصة [ي] / كانا: كان [و] / حركتها: حركتها [ع] – 5 متوازيين: متوازنين [و] / خطي: خطين [ز] / ود م ک: فراغ [ذ] / وصفنا: وضفنا [ل] / محالة: لى الر [ي] محـ [ت] / أن الخط: مكررة [ا] / وهـ على: وهـ م ص [م] / خط وهـ على: ناقصة [د].

www.j4know.com

زاوية قائمة الذي يتحرك معه ويقطع خط م ص سينتهي إلى نقطة ص. فإذا انتهى / الخط القائم خ – ١٩٢ – ظ
على وهـ إلى ص أثبتنا هناك خطي وهـ م ص / وخططنا خطي هـ ص وم. ومعلوم أن خط ض – ٨٠ – و
هـ ص يقوم / من كل واحد من خطي وهـ م ص على زاوية قائمة لأنه هو الخط الذي جعلناه ث – ١٨٢ – ظ
يقوم من خط وهـ على زاوية قائمة ويتحرك معه / حتى ينتهي إلى نقطة ص. س – ١٤ – ظ

فأقول: إن خطي د م / د و بين مقداري جـ د د هـ: نسبة جـ د إلى د م كنسبة د م إلى د و ع – ٨٨ – و
وكنسبة د و إلى د هـ. ز – ٥٢ – و / هـ – ٦٤ – و

برهانه: أن خطي وهـ م ص متوازيان / متساويان وزاويتي وهـ ص م ص هـ قائمتان، ش – ١٧٠ – ظ / و – ١٧١ – ظ
فخط // وم / مساوٍ لخط هـ ص // وكل واحدة من زاويتي / هـ وم ص م و قائمة. ولكن م د ي – ٦٦ – ظ / ذ – ٣٨١ – ظ
عمود على خط وجـ وخط ود عمود على خط هـ م، فنسبة خط جـ د إلى د م كنسبة / د م إلى ك – ٢٢٥ – ظ / ط – ٢٦٦ – و
د و وكنسبة د و / إلى د هـ. ولكن خط جـ د مثل آ وخط د هـ مثل ب، فخطا د م د و وقعا / بين ل – ١٣ – و / ف – ١٣٥ – ظ
آ ب وتوالت على نسبة؛ وذلك ما أردناه.

ولكي يكون وجود ذلك بالفعل سهلاً نجعل مكان خط هـ و / القائم على هـ جـ مسطرة، ر – ٥١
ونجعل مكانَ هـ جـ مسطرة أخرى ينتظمها مع مسطرة هـ و قطب عند نقطة هـ مثبت في موضعه
ومسطرة هـ و تدور عليه، ونخرج خط جـ م القائم على هـ جـ على زاوية قائمة إلى نقطة ح ونجعل
جـ ح مثل هـ و، ونصيّر مكان خط جـ ح مسطرة ينتظمها مع مسطرة / هـ جـ قطب عند نقطة جـ ت – ٢٩٦

1 زاوية قائمة: فراغ [ذ] ناقصة [د] / الذي ... على: ناقصة [د] / ويقطع: ويقع [ع، ط] / خط: خطي [و] / م ص: م ح [خ] / فإذا انتهى الخط: فراغ [ذ] / الخط: مكررة [ن، و] – 2 وهـ: ر هـ [ي] / إلى: على [ض] / وخططنا ... وم: ناقصة [م] فراغ [ذ] / ومعلوم: معلوم [ذ، خ] / يقوم: تقوم [س، ل] – 3 من (الأولى): ناقصة [ك، ل] / خطي: خطين [ز] / جعلناه: جعلنا [ذ، ط] – 4 يقوم: مقوم [ذ، ع] تقوم [س] ناقصة [ز] يقدم على [ي] / وهـ: د هـ [ي] / حتى: خطي [خ] / ينتهي: انتهى [ف] / ص: ناقصة [و] – 5 خطي: خطين [ز] / بين: نبين [خ] / جـ د د هـ: ح ر وهـ [ط، ع] / د و: د ص [س] – 6 وكنسبة: كنسبة [ح، ي] / وكنسبة د و إلى د هـ: ناقصة [ب، ش] / إلى د هـ: مكررة [ي] – 7 متساويان: متساويتان [ك] / وهـ ص: وهـ و [ع] – 7-8 برهانه ... هـ ص: مكررة [ي] – 8 وم: رم [ي] / لخط: خط [خ] / واحدة: واحد [خ، ط] / زاويتي: زوايتي [خ] / ولكن: وليكن [ا، ح، ذ] – 9 وجـ: د جـ [ا، ض، و] رح [ش، ك، ل] وح [ح] / وخط: وخطي [ض، ن، ك، ل، و] ناقصة [خ] / ود: وجـ [س] وهـ د [خ] / عمود: عمودا [و] / خط: ناقصة [د، ذ، ع، ط] ح خ ط [خ] / هـ م: م هـ [م] / جـ د: جـ [ي] – 9-10 د م إلى د و: د هـ إلى د هـ [ذ، ط] – 10 وكنسبة: كتب قبلها «وكنسبة وهـ إلى د هـ» [ع] كنسبة [ز] / إلى د هـ: ناقصة [ط] / آ: خط آ [ذ، ط، ع] ناقصة [ل] / آ وخط: آ وخط [ب، ش] / ب: خط ب [خ] / د و: د م [ث] – 12 ولكي: ولان [ز، ذ، ع، ط] ولكن [جـ، ت] وليكن [خ، م، ي] / يكون: ناقصة [خ، ع، ي] / وجود: قصر [ي] / بالفعل: بالعقل [س] / سهلاً: هذا [خ] / نجعل: ناقصة [ت] فجعل [م] / هـ و: وهـ [ز] هـ هـ و [جـ] – 13 مكان: مكانان [خ] / أخرى: ناقصة [خ] / ينتظمها: وينتظمها [ت، ر] ينتظمهما [خ] / مسطرة: مسطر [ز] / هـ و: هـ ر [ا] و [خ] / مثبت: مثلث [خ، س، ض، و] يثبت [ز] – 14 هـ و: هـ [و] و [خ، ث، ذ، ط] / تدور: ويدور [ط] يدور [ر، س] / م القائم على هـ جـ: مكررة [خ] / هـ جـ: فوق السطر [و] – 14-15 خط ... مثل: ناقصة [ل] – 15 جـ ح: ص ح [ز، خ]، كثيرًا ما كتب الجيم صادًا [ز، خ] ولن نشير إليها فيما بعد/ هـ و: ح و [ز، خ، ذ، ع، ط، ف، ي] ح ر [م] هـ ر [و] / ونصير: نصير [ذ، ط] تصير [ز] / خط: ناقصة [ف] / مسطرة: أثبتها فوق السطر [ر] / مع مسطرة: ناقصة [س] / قطب عند نقطة جـ: ناقصة [ي] / نقطة: قطعة [ع] / جـ: مع [ض].

www.j4know.com