بسم الله الرحمن الرحيم .... والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

Basic Trigonometric Ratios of common angles

لقـد واجهتنا مسائل عدة في الرياضيات تحتاج منا الى معرفة مسبقة بالنسب المثلثية لأشهر الزوايـا المعروفة لدى الرياضيين وهي ١٧ زاوية أو بالأحرى ١٦ لأن الزاوية ٣٦٠ هي نفسها الزاوية صفر .

لقـد وفقني الله تعالى الى استنبــاط العلاقات بين نسب هذه الزوايا وذلك استنادا على دائرة الوحـدة (التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة واحدة) وبتطبيق نظرية النسب المثلثية نجد أن:

In Coordinate, (x,y) → x = Cos & y = Sin المكون الصادي هو الجيب, والسيني هو جيب التمام

لمزيد من المعلومات حول هذه العلاقات، الرجاء الاطلاع على الملحقات أسفل هذه الجداول :

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Point	$(1, 0)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(0, 1)$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Degree	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Point	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$(-1, 0)$
Sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Degree	210°	225°	240°	270°
Radian	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
Point	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(0, -1)$
Sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0

Degree	300°	315°	330°	360°
Radian	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Point	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$(1, 0)$
Sin	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Radian = Degree x $\frac{\pi}{180}$ تحويل الدرجة الى راديان والعكس

For angle 30° → $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$: النقطة الاحداثية المقابلة للزاوية ٣٠° هي

For angle 60° → $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: النقطة الاحداثية المقابلة للزاوية ٦٠° هي

For angle 45° → $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: النقطة الاحداثية المقابلة للزاوية ٤٥° هي

Multiply $\frac{1}{\sqrt{2}}$ by $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ → $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *قد تختلف الأشكال لكن المقدار واحد (بالنسبة للزاوية ٤٥)*

For angle Zero or 360° $(x,y) = (1, 0)$: النقطة هي (٣٦٠°) بالنسبة للزاوية صفر أو

For angle 90° → $(x,y) = (0, 1)$: النقطة هي ٩٠° وكذلك بالنسبة للزاوية

تعمم الكميات أعلاه لبقية زوايا الأرباع مع مراعاة أن زوايا الربع الأول تتساوى مع زوايا الربع الثالث في الكميات وتختلف في الإشارات و كذلك زوايا الربع الثاني مع الرابع لمعرفة ذلك انظر الشكل الأخير في صفحة ٥

For other ratios, it is known that: لإيجاد بقية النسب مثلا الظل والقاطع ... الخ استخدم هذه العلاقات :

Tan = $\frac{Sin}{Cos}$, Cot = $\frac{1}{Tan}$ or $\frac{Cos}{Sin}$, Sec = $\frac{1}{Cos}$, Cosec = $\frac{1}{Sin}$

أفضل طريقة لتوليد الزوايا المشهورة ومعرفة نسبها على المستوى الاحداثي (الديكارتي)

The best way to generate common angles and their ratios

خذ زوايا الأرباع الرئيسة: الزاوية صفر أو ٣٦٠ , ٩٠ , ١٨٠ و ٢٧٠

Take main four Coordinates angles 0 or 360, 90, 180 and 270:

أضف أو اطرح من أي زاوية ربع ٣٠ درجة وأيضا أضف ٤٥ درجة لكل منها.

Then add or subtract 30 degree from each, and add 45 degree also :

(0), 30=(0+30), 45=(0+45), 60=(90-30), (90), 120=(90+30), 135=(90+45), 150=(180-30), (180), 210= (180+30), 225=(180+45) 240=(270-30), (270), 300=(270+30), 315=(270+45), 330=(360-30), (360) or 0.

<u>**انظر الشكل٢ في صفحة ٥**</u> افرض X لزويا الأرباع الأساسية بغض النظر عن الإشارة فستجد الاتي :

١- زوايا الربع الأول والثالث لكل X+30 تقابلها نقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2}\right)$ ولكل X-30 تقابلها نقطة $\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

٢- وعكسها زوايا الربع الثاني والرابع X+30 تقابلها نقطة $\left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و X-30 تقابلها نقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2}\right)$

٣- زوايا انصاف الأرباع جميعها (٤٥, ١٣٥ , ٢٢٥ , ٣١٥) تقابلها نقطة واحدة هي : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الصفحة التالية بها الملحقات التي تساعدنا في فهم ما سبق من علاقات .

Appendices الملحقات

See the below shapes so as to formulate the relation

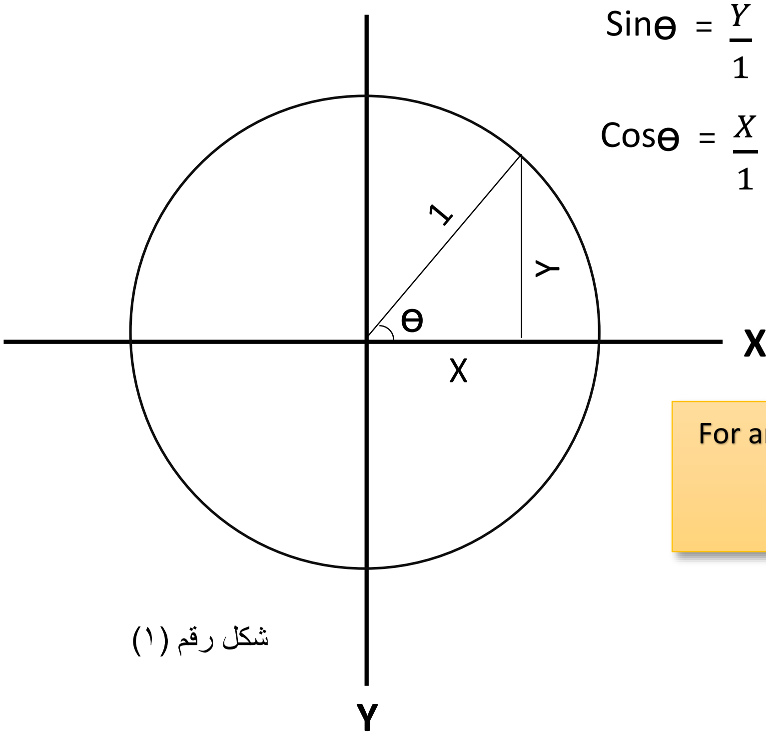
انظر الى الأشكال التالية لمعرفة الفكرة واستنباط العلاقة

استخدم دائرة الوحدة ونظرية النسب المثلثية (الجيب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ و جيب التمام = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$)

ومعلوم كذلك في دائرة الوحدة أن الوتر يساوي واحد.

$$\text{Sin}\theta = \frac{Y}{1} = Y$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{X}{1} = X$$



شكل رقم (١)

For any coordinate point اذن لأي نقطة احداثية (x,y) نجد أن

X = Cos & y = Sin

Tip : You can use above relation to prove the Trigonometric identities

يمكن استخدام نظرية فيثاغورث والشكل أعلاه لإثبات المتطابقات الأساسية

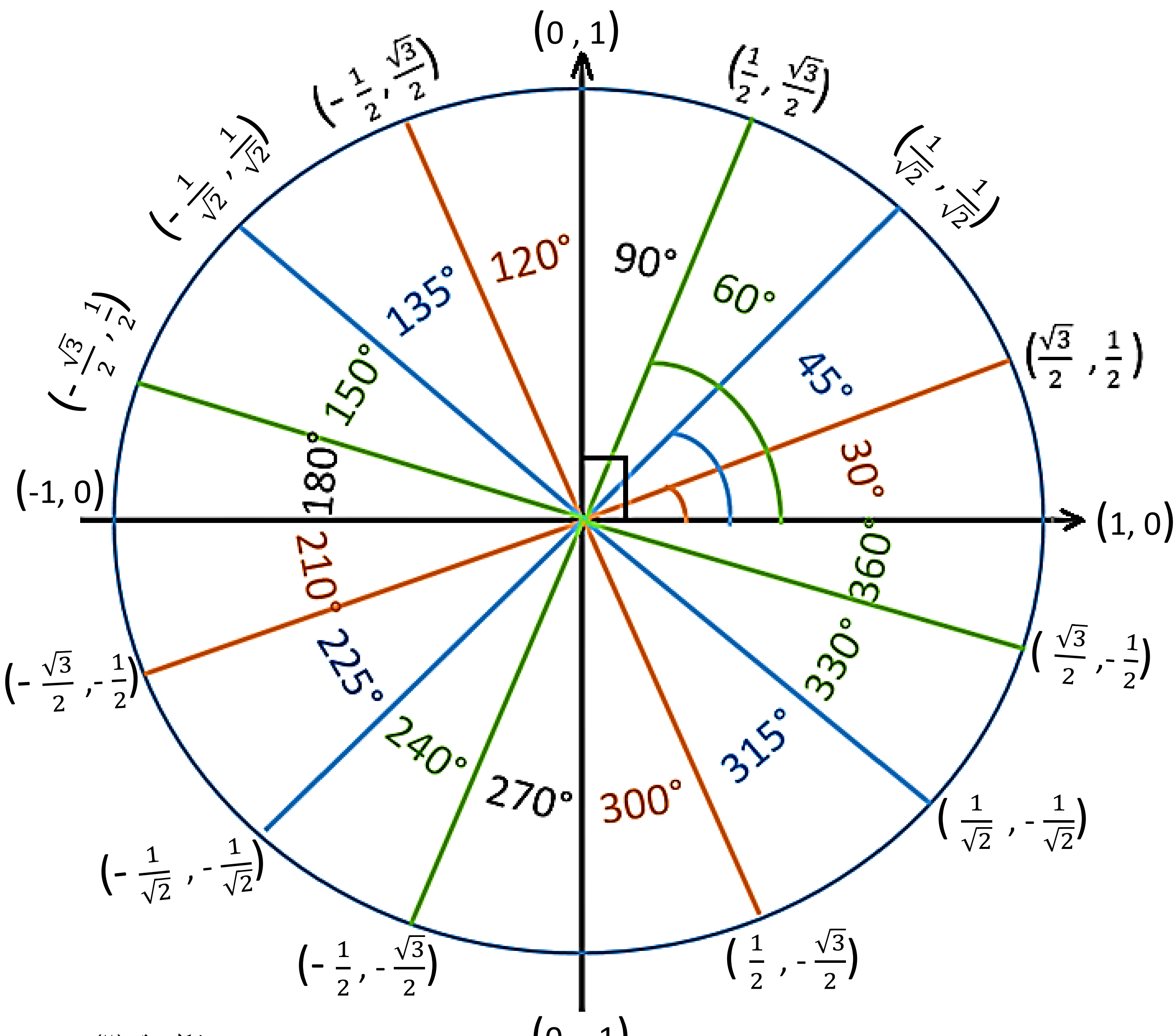
$$x^2 + y^2 = (1)^2 \rightarrow \text{Sin}^2 + \text{Cos}^2 = 1$$

To find other identities, divide above equation by (Sin) and then by (Cos)

نص نظرية فيثاغورث للمثلث القائم الزاوية يقول : (مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين)

For the previous Common angles see below shape

بالنسبة للزوايا المشهورة ولكي تتمكن من دراسة الجداول الماضية انظر هذا الشكل



شكل رقم (٢)

هذا ولله الحمد أولاً وآخراً ... وصلى الله على نبينا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

للاستفسار أو ابداء الملاحظة حول هذه المذكرة يمكنكم مراسلتي عبر الإيميل ادناه أو زيارة صفحتي

https://www.facebook.com/ali.elsayid