كلية المجتمع - صنعاء
دائرة العلوم الأساسية
قسم الرياضيات

محاضرات في

رياضيات المهندسين (1)

المستوى الثاني - قسم تكنولوجيا معدات طبية وهندسة الكمبيوتر والالكترونيات

2007 - 2008

أ/ محمد عبد الجليل الشميري

١- نظم الإحداثيات في مستوي.

١.١- الاحداثيات الديكارتية في المستوي:

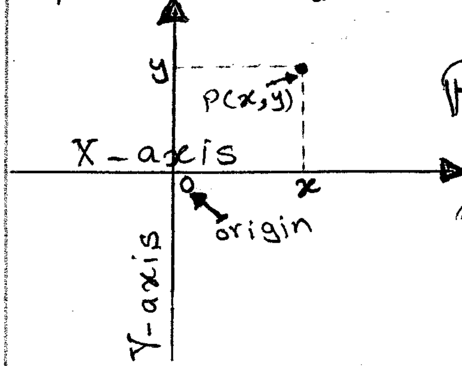
Rectangular coordinates in the plane.

يُعتبر مستوي الاحداثيات المتعامدة (Rectangular coordinates plane) عند نقطة نطلق عليها نقطة الأصل (origin) والمتكون من خطين احداثيين مُتعامدين أحدهما أفقي (المحور X. X-axis) والآخر رأسي (المحور Y. Y-axis) نظام ثنائي الأبعاد (Two dimensions space) ويُسمى أيضاً بنظام الاحداثيات الكارتيزية (Cartesian coordinates system)

ونحن نعلم منذ سنوات الدراسة في التعليم الأساسي طريقة تعيين موقع النقطة $p(x, y)$ في هذا المستوي حيث:

x هي البُعد الأفقي للنقطة p عن المحور Y بينما y هي البُعد الرأسي للنقطة p عن المحور X.

ونسمي الزوج المرتب (x, y) بالاحداثيين الديكارتيين للنقطة p.



ومجموعة جميع الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية تسمى بالمستوى الديكارتي ونرمز له بالرمز $\mathbb{R}^2$ حيث

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \ , y \in \mathbb{R}\}.$$

ومن دراستنا للهندسة التحليلية في المرحلة الثانوية نعلم:

- البُعد بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هو:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- احداثيا النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي:

$$P_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي معادلة جبرية بمتغيرين من الدرجة الأولى تأخذ الشكل $ax + by + c = 0$ حيث a، b، c معاملات حقيقية.

والمستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$ حيث $(a \neq 0, b \neq 0)$
يقطع المحورين الإحداثيين عند نقطتين هما: $(0, \frac{-c}{b})$ ، $(\frac{-c}{a}, 0)$
وفي الحالات الخاصة:

- المستقيم الذي معادلته $ax + by = 0$ $(a \neq 0 ، b \neq 0 ، c = 0)$ يمر بنقطة الأصل.
- المستقيم الذي معادلته: $ax + c = 0$ $(a \neq 0 ، b = 0 ، c \neq 0)$ مستقيم رأسي يوازي المحور Y ويقطع محور X عند النقطة $(\frac{-c}{a}, 0)$
- المستقيم الذي معادلته: $by + c = 0$ $(a = 0 ، b \neq 0 ، c \neq 0)$ مستقيم أفقي يوازي المحور X ويقطع محور Y عند النقطة $(0, \frac{-c}{b})$
- المستقيم الذي معادلته $ax = 0$ $(a \neq 0 ، b = 0 ، c = 0)$ ينطبق على المحور Y.
- المستقيم الذي معادلته $by = 0$ $(a = 0 ، b \neq 0 ، c = 0)$ ينطبق على المحور X.

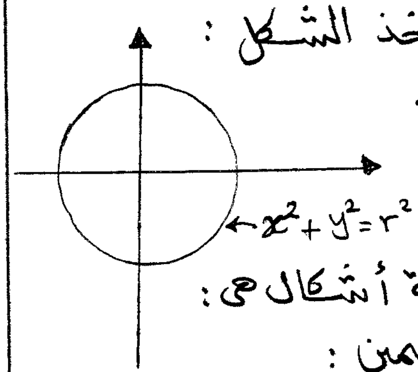
- معادلة الدائرة: Equation of the circle.

معادلة الدائرة التي مركزها (a, b) ونصف قطرها r هي:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- اذا كان مركز الدائرة نقطة الأصل فالمعادلة تأخذ الشكل:

$x^2 + y^2 = r^2$ حيث r نصف القطر.



- معادلات القطع المكافئ: (parabola)

لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h, k) أربعة أشكال هي:

- محور القطع يوازي المحور X واتجاهه نحو اليمين:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$; $p > 0$

- محور القطع يوازي المحور X واتجاهه نحو اليسار:

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$; $p > 0$

- محور القطع يوازي المحور Y واتجاهه نحو الأعلى:

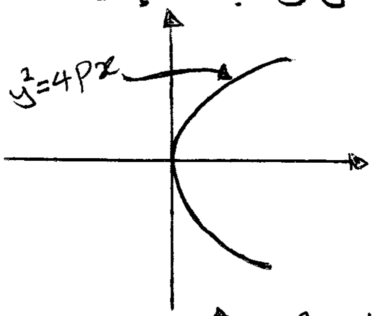
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$; $p > 0$

- محور القطع يوازي المحور Y واتجاهه نحو الأسفل:

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$; $p > 0$

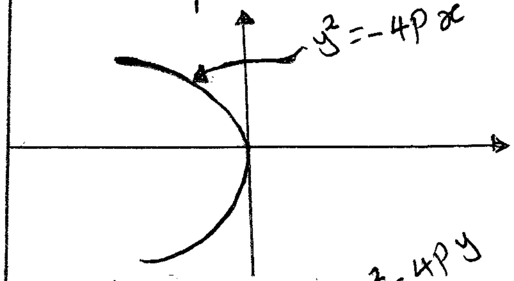
وهذه المعادلات تأخذ أوضاعاً قياسية حيث يكون رأس القطع عند نقطة الأصل ومحوره ينطبق على أحد المحورين الاحداثيين:

- محور القطع على محور X ورأسه عند نقطة الأصل واتجاهه إلى اليمين معادلته : $y^2 = 4px$ ؛ $p > 0$



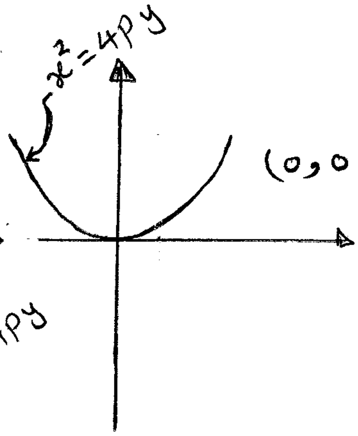
- محور القطع على محور X ورأسه (٠,٠) واتجاهه إلى اليسار معادلته:

$$y^2 = -4px \quad ; \quad p > 0$$



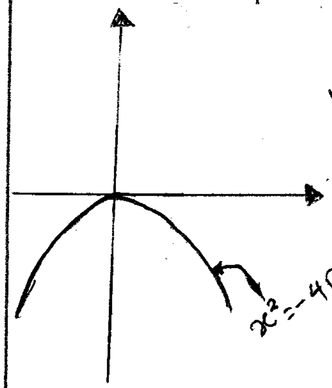
- محور القطع على محور Y ورأسه (٠,٠) واتجاهه نحو الأعلى معادلته:

$$x^2 = 4py \quad ; \quad p > 0$$



- محور القطع على محور Y ورأسه (٠,٠) واتجاهه إلى أسفل معادلته:

$$x^2 = -4py \quad ; \quad p > 0$$



• معادلات القطع الناقص : Equations of the ellipse.

لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h,k) شكلين :

- اذا كان محوره الكبير يوازي المحور X فإن معادلته:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a > b$$

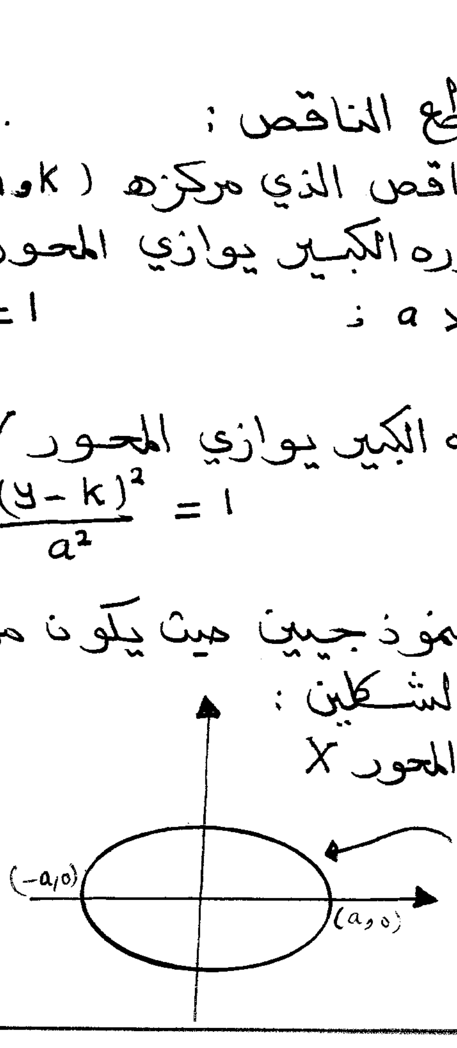
- اذا كان محوره الكبير يوازي المحور Y فإن معادلته:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad ; \quad a > b.$$

وفي الوضعين النموذجيين حيث يكون مركز القطع الناقص نقطة الأصل تأخذ المعادلة الشكلين :

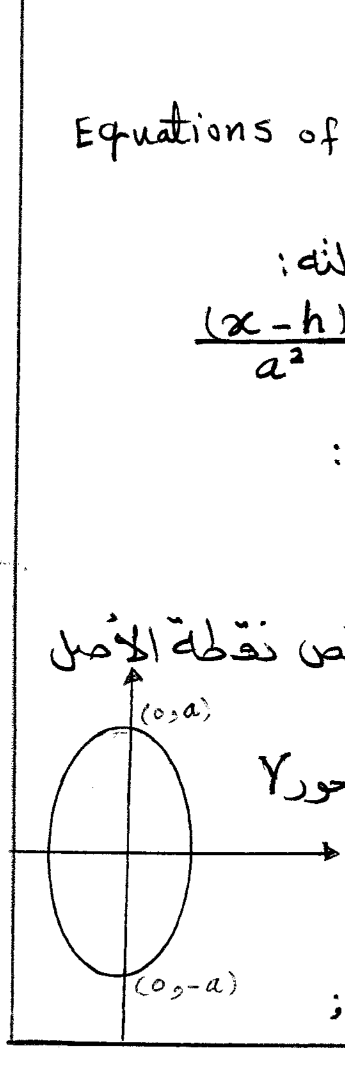
- المحور الكبير على المحور X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a > b$$



- المحور الكبير على المحور Y

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a > b$$



• معادلات القطع الزائد Equations of the hyperbola.

لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه (h, k) شكلين :

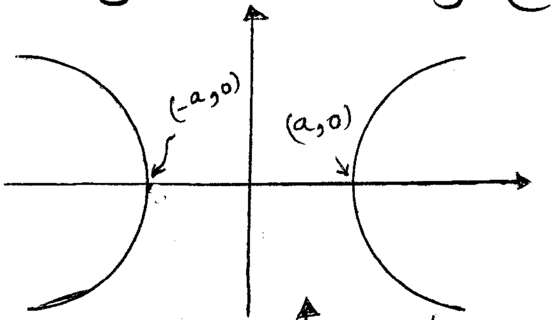
- اذا كان محوره القاطع يوازي المحور X معادلته :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- اذا كان محوره القاطع يوازي المحور Y فإن مُعادلته :

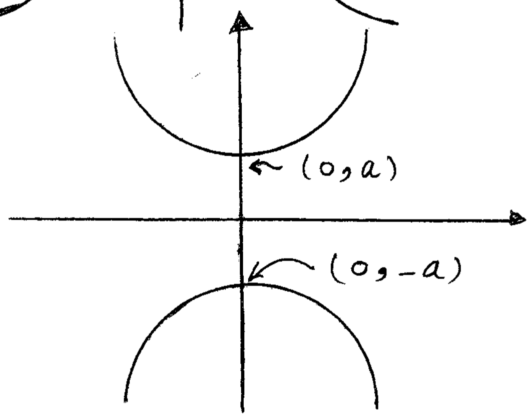
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

و في الحالة النموذجية حيث يكون مركز القطع الزائد نقطة الأصل تأخذ المعادلة الشكلين :



- اذا كان محوره القاطع على المحور X فالمعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- اذا كان محوره القاطع على المحور Y فالمعادلة :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

EXERCISES (1.1)

In exercises 1 – 4 Find the distance between the pair of points.

1- $(3, 1)$ & $(5, 5)$

2- $(-2, 3)$ & $(-3, -4)$

3- $(0, 5)$ & $(2, -6)$

4- $(4, 1)$ & $(-1, 0)$

In exercises 5 – 30 sketch the graph of the equation.

5- $x^2 + y^2 = 5$

6- $2x^2 + 3y = 0$

7- $x + 3y = 8$

8- $3x - 5y = 1$

9- $x - 4y = 0$

10- $5x + 2 = 3$

11- $3y - 2 = 0$

12- $x^2 - 4y = 0$

13- $y^2 - 3x = 0$

14- $y^2 + 5x = 0$

15- $4x - y^2 = 0$

16- $3x^2 + 6y^2 = 18$

17- $5x^2 - 2y^2 = 20$

18- $6x^2 = 3 + 12y^2$

19- $3x^2 = 15 - 3y^2$

20- $2x^2 + y^2 = 1$

21- $9x^2 - 16y^2 - 36x - 108 = 0$

22- $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$

23- $x^2 + 3y^2 + 8x + 12y + 5 = 0$

24- $y^2 - 6y + 4x + 17 = 0$

25- $2x^2 + 3x - y + 5 = 0$

26- $x^2 - 4x + 4 = 0$

27- $x^2 + 2x + 1 = 0$

28- $3x^2 - y^2 = 6x + 4y + 1$

29- $3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$

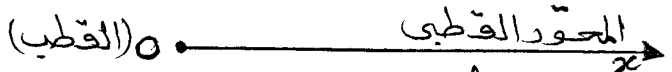
30- $2x^2 - 12x = 4y - 2y^2 - 15$

١.٢ ـ الإحداثيات القطبية polar coordinates.

يعتمد نظام الاحداثيات الديكارتية على التقابل بين أزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية ونقاط في مستوي الاحداثيات القائم ثنائي الأبعاد، لكن هذا النظام ليس الوحيد. وسوف نقدم نظاماً احداثياً آخر (ثنائي البعد) لايقل أهمية عن سابقه هو نظام الاحداثيات القطبية.

نظام الإحداثيات القطبية:

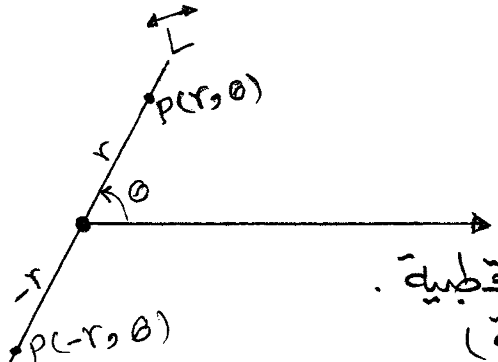
لتكن ٥ نقطة ثابتة وليكن $\overrightarrow{ox}$ شعاعاً ثابتاً ينبعث من النقطة ٥ ويُسمى بالمحور القطبي كما نسمي النقطة الثابتة ٥ بالقطب (المبدأ) ويُسمى هذا النظام بالنظام القطبي.



ولتعيين موقع النقطة p التي احداثياها القطبيين (θ و ٢) في نظام الاحداثيات القطبية نتبع مايأتي:

١. نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي يصنع مع المحور القطبي زاوية قدرها θ راديانا ماراً بالقطب ٥، تسمى θ بالزاوية القطبية.

٢. نأخذ على المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ المسافة الموجهة ٢ بدءاً من القطب ٥ ويُسمى ٢ بالبُعد القطبي.

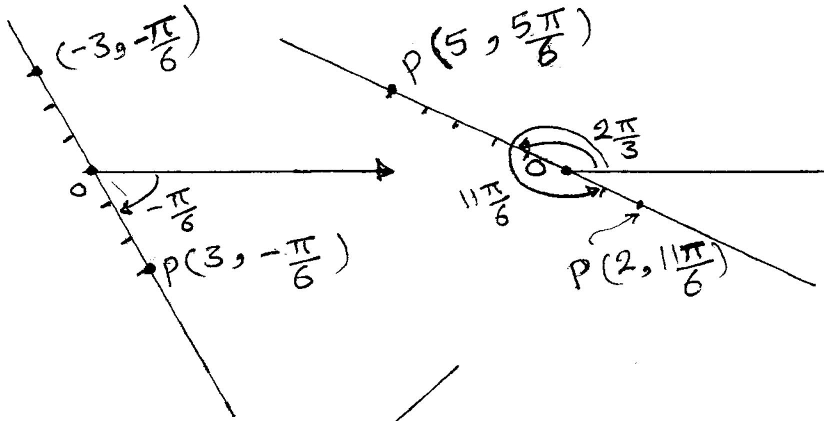


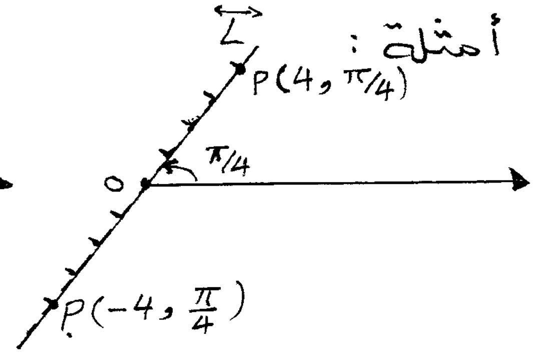
مع مراعاة ما يأتي:

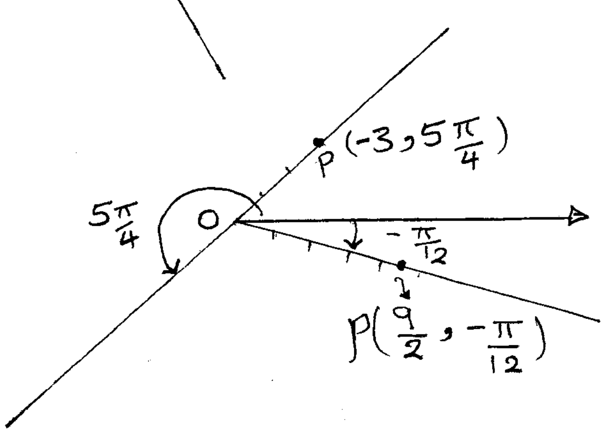
- يُعتبر البُعد القطبي (٢) موجباً اذا قيس من النقطة ٥ في اتجاه القطعة المستقيمة المحددة للزاوية القطبية.
  (أي اذا كان يمثل ضلعاً للزاوية القطبية)
  ويُعتبر البُعد القطبي (٢) سالباً اذا قيس في الإتجاه المضاد.
  (أي اذا كان امتداداً لضلع الزاوية في الإتجاه المضاد).

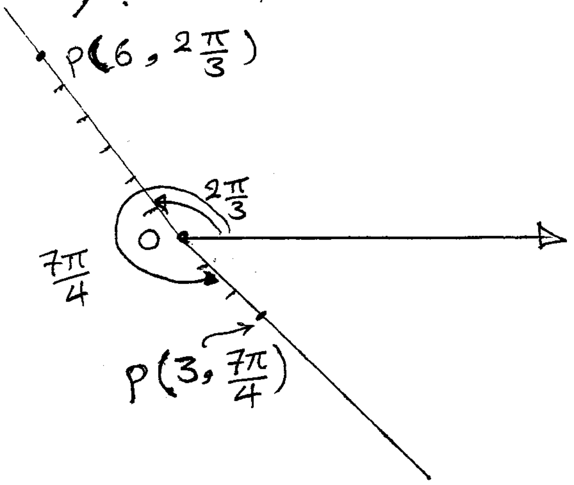
- تعتبر الزاوية القطبية θ موجبة اذا قيست في اتجاه عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. وتعتبر سالبة اذا قيست في اتجاه نفس اتجاه حركة عقارب الساعة

أمثلة :

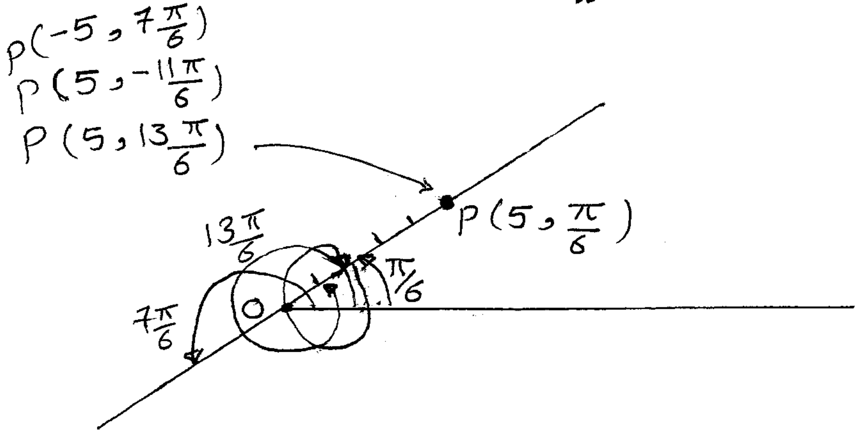








وأخيراً لاحظ الشكل التالي :



نلاحظ أن جميع الثنائيات المرتبة : $(5, \frac{\pi}{6})$ ، $(5, \frac{13\pi}{6})$ ،
$(5, -\frac{11\pi}{6})$ ، $(-5, \frac{7\pi}{6})$ ، $(-5, \frac{19\pi}{6})$ ، ---- وغيرها

تمثل نقطة وحيدة في المستوي

وبصورة عامة : لأي نقطة وحيدة في النظام القطبي عدد غير منتهٍ من أزواج الإحداثيات القطبية.

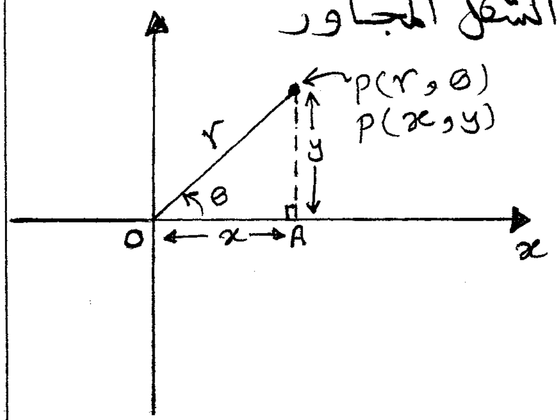
أي أن : للنقطة ذات الإحداثيين القطبيين (r, θ) كل الإحداثيات القطبية من الشكل $(r, \theta + 2n\pi)$ و $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$ حيث n عدد صحيح .

وعليه فإن : كل ثنائي مرتب $p(r, \theta)$ يُعيِّنان نقطة وحيدة من المستوي لكن العكس غير صحيح فكل نقطة في المستوي يمكن أن نعبر عنها بمجموعات لانهائية من الثنائيات القطبية .

العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

يوجد تقابل بين مجموعة النقاط في المستوي الديكارتي ومجموعة الأزواج المرتبة في نظام الاحداثيات القائم فكل نقطة في المستوي تمثل بزوج واحد وواحد فقط من الاحداثيات القائمة والعكس فكل زوج من الاحداثيات القائمة يمثل نقطة واحدة فقط من المستوي .
ان مثل هذا التقابل غير متوفر في نظام الاحداثيات القطبية ففي حين أن كل ثنائي قطبي يُمثل بنقطة وحيدة من المستوي الا أن كل نقطة في هذا المستوي يمكن أن نعبر عنها بمجموعات لانهائية من الثنائيات القطبية.
لذلك ولكي نحصل على مثل هذا التقابل بين نقاط المستوي والثنائيات القطبية نقيد اختيارنا لقيم r بحيث يكون $(0 \leq r)$ ولقيم θ بحيث تكون $0 \leq \theta < 2\pi$.
وبهذه الضوابط سوف نحصل على التقابل المطلوب وبهذا عند الحديث عن الإحداثيات القطبية للنقطة p فإننا نقصدها ضمن الضوابط المذكورة مالم يذكر خلاف ذلك .

ولإيجاد العلاقة بين احداثيا أي نقطة في نظام الإحداثيات المتعامد - النظام الديكارتي - (x, y) واحداثياها في النظام القطبي (r, θ) نطابق المحور القطبي والقطب من النظام القطبي مع المحور X الموجب ونقطة الأصل من النظام الديكارتي وبالترتيب .
ولنفرض أن النقطة p في المستوي لها الاحداثيات الديكارتية (x, y) ولها الإحداثيات القطبية (r, θ) كما في الشكل المجاور



ومن هذا الشكل نجد :
في $\Delta\, OAP$ القائم عند A :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث موقع θ يعتمد على اشارة كل من x و y .

ومن مبرهنة فيثاغورث:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ملاحظات :

١. لتحويل احداثيا نقطة من النظام القطبي إلى النظام الديكارتي نستخدم :

$x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$

2. لتحويل احداثيا نقطة من النظام الديكارتي إلى النظام القطبي:
نستخدم :

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

and: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

مع مراعاة اشارتي كُلٍّ من x و y.

والجدول التالي يوضح طريقة التعامل مع اشارة x و y

شكل الزاوية $0<\phi<\pi/2$	الربع الذي تقع فيه الزاوية	اشارة y	اشارة x
$\theta = \phi$	الأول	+	+
$\theta = \pi - \phi$	الثاني	+	−
$\theta = \pi + \phi$	الثالث	−	−
$\theta = 2\pi - \phi$ or $\theta = -\phi$	الرابع	−	+

3. حالات خاصة :

دكارتي — قطبي

$$(x, 0) \equiv \begin{cases} (x, 0) & \text{at } x>0 \\ (|x|, \pi) & \text{at } x<0 \end{cases}$$

$$(0, y) \equiv \begin{cases} (y, \frac{\pi}{2}) & \text{at } y>0 \\ (|y|, \frac{3\pi}{2}) & \text{at } y<0 \end{cases}$$

Examples:

[1] In problems 1-11, Find the cartesian Coordinates of the point with polar coordinates:

① $P_1(3, 0)$ ② $P_2(5, \frac{\pi}{2})$ ③ $P_3(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2})$

④ $P_4(1, \pi)$ ⑤ $P_5(4, \frac{\pi}{6})$ ⑥ $P_6(2, \frac{3\pi}{4})$

⑦ $P_7(1, \frac{5\pi}{3})$ ⑧ $P_8(2, \frac{7\pi}{6})$ ⑨ $P_9(6, \frac{16\pi}{3})$

⑩ $P_{10}(-2, \frac{5\pi}{4})$ ⑪ $P_{11}(-2, 3)$

solu: ① $P_1(3, 0)$ ② $P_2(0, 5)$ ③ $P_3(0, -\sqrt{2})$

④ $P_4(-1, 0)$

⑤ $\because x = r\cos\theta \Rightarrow x = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3}$

and $y = r\sin\theta \Rightarrow y = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4(\frac{1}{2}) = 2$

Thus, in Cartesian coordinates, the point is $(2\sqrt{3}, 2)$

⑥ $\because x = r\cos\theta \Rightarrow x = 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 2\sin\frac{3\pi}{4} = 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$

Thus, in Cartesian coordinates, the point is $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

⑦ $\because x = r\cos\theta \Rightarrow x = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

and $y = r\sin\theta \Rightarrow y = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Thus, in Cartesian coordinates, the point is $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

⑧ $\because x = 2\cos\frac{7\pi}{6} = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$

and $y = 2\sin\frac{7\pi}{6} = 2(-\frac{1}{2}) = -1$

Thus, in Cartesian coordinates, the point is $(-\sqrt{3}, -1)$

---

⑨ $\because x = 6\cos\frac{16\pi}{3} = 6\cos(\frac{4\pi}{3} + 4\pi) = 6\cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore x = 6(-\frac{1}{2}) = -3$

and $y = 6\sin\frac{16\pi}{3} = 6\sin(\frac{4\pi}{3} + 4\pi) = 6\sin\frac{4\pi}{3}$

$\therefore y = 6(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3\sqrt{3}$

Thus, in cartesian coordinates, the point is $(-3, -3\sqrt{3})$

---

⑩ $\because x = -2\cos\frac{5\pi}{4} = -2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$

and $y = -2\sin\frac{5\pi}{4} = -2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$

Thus, in cartesian coordinates, the point is $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

---

⑪ $\because x = r\cos\theta \Rightarrow x = -2\cos 3 \simeq 1.98$

$y = r\sin\theta \Rightarrow y = -2\sin 3 \simeq -0.28$

The rectangular point is $(-2\cos 3, -2\sin 3)$, which is located at approximately $(1.98, -0.28)$.

---

[2] In exercises 1 – 10, Find the polar coordinates of the point with cartesian coordinates:

① $(0, 4)$ ② $(0, -5)$ ③ $(2, 0)$
④ $(-1, 0)$ ⑤ $(1, 1)$ ⑥ $(-2, 2\sqrt{3})$
⑦ $(-2\sqrt{3}, -2)$ ⑧ $(6, -2\sqrt{3})$ ⑨ $(3, 2)$
⑩ $(-1, -3)$

sol: ① $p(0, 4)$

$\because$ النقطة p واقعة على محور Y الموجب لذلك فإن النقطة في الاحداثيات القطبية تكون $p(4, \frac{\pi}{2})$

---

② $p(0, -5)$

نلاحظ أن هذه النقطة واقعة على محور Y السالب لذلك فإن النقطة في الاحداثيات القطبية تكون $p(5 , \frac{3\pi}{2})$

---

③ $p(2 , 0)$

∵ p تقع على محور X الموجب لذلك فإن النقطة في الاحداثيات القطبية تكون $p(2 , 0)$

---

④ $p(-1 , 0)$

∵ p واقعة على محور X السالب لذلك فإن النقطة في الإحداثيات القطبية تكون $p(1 , \pi)$

---

⑤ $p(1 , 1)$

∵ النقطة p واقعة في الربع الأول وحيث أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

and: $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ (في الربع الأول)

لذلك فإن النقطة p في الاحداثيات القطبية تكون $p(\sqrt{2} , \frac{\pi}{4})$

---

⑥ $p(-2 , 2\sqrt{3})$

∵ النقطة p واقعة في الربع الثاني وحيث أن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

and : $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{-2}) = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ (θ في الربع الثاني)

Thus, in polar Cordinates, the point is $p(4 , \frac{2\pi}{3})$

---

⑦ $p(-2\sqrt{3} , -2)$

نلاحظ أن هذه النقطة واقعة في الربع الثالث

$\because r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12+4} = 4$

and: $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

Thus, in polar Coordinates, the point is $p(4, \frac{7\pi}{6})$

---

⑧ $p(6, -2\sqrt{3})$

∵ النقطة p واقعة في الربع الرابع وحيث أن:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

and: $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{-2\sqrt{3}}{6}) = \tan^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\therefore \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ (θ في الربع الرابع)

Thus, in polar Coordinates, the point is $p(4\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6})$

---

⑨ $p(3, 2)$

∵ النقطة p واقعة في الربع الأول وحيث أن:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

and: $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$ (حيث θ واقعة في الربع الأول)

Thus, in polar Coordinates, the point is $p(\sqrt{13}, \tan^{-1}(\frac{2}{3}))$

---

⑩ $p(-1, -3)$

نلاحظ أن هذه النقطة واقعة في الربع الثالث وحيث أن

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

and: $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{-3}{-1}) = \tan^{-1}(3)$

$\therefore \theta = \pi + \tan^{-1}3$ (θ في الربع الثالث)

Thus, in polar Coordinates, the point is:

$p(\sqrt{10}, \pi + \tan^{-1}3)$

---

3 Find all polar coordinate representations for the rectangular points:

(a) $p(3, 3)$ ⓑ $p(-2, 2)$ ⓒ $p(3, -1)$

solu: ⓐ $p(3, 3)$

∵ النقطة واقعة في الربع الأول ، وحيث أن:

and: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ (θ في الربع الأول)

فتكون النقطة p في الاحداثيات القطبية هي $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

وجميع الاحداثيات القطبية لهذه النقطة تأخذ الشكل:

$\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$ or $\left(-3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)$; $n \in \mathbb{Z}$

(b) $p(-2, 2)$

∵ النقطة في الربع الثاني وحيث أنّ:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

and: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(-1)$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (θ في الربع الثاني)

فتكون احداثيا النقطة p في النظام القطبي هي: $p\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

وجميع الإحداثيات القطبية لهذه النقطة تأخذ الشكل:

$p\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$ or $p\left(-2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)$; $n \in \mathbb{Z}$

(c) $p(3, -1)$

هذه النقطة واقعة في الربع الرابع وحيث أنّ:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

and: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$

$\therefore \theta = 2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ or $\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

(θ في الربع الرابع)

فتكون احداثيا النقطة p القطبيين هما $p\left(\sqrt{5}, -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

وتكون جميع الإحداثيات القطبية لهذه النقطة تأخذ الشكل:

$p\left(\sqrt{5}, -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2n\pi\right)$ or $p\left(-\sqrt{5}, -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \pi + 2n\pi\right)$

حيث n عدد صحيح.

$\boxed{4}$ In exercises 1-4, change the cartesian equation into a polar equation:

① $x^2+y^2=9$ ② $x^2-y^2=5$

③ $xy=3$ ④ $x+3y=2$

solu:

① $\because x^2+y^2=9 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=3$ or $r=-3$

② $x^2-y^2=5 \Rightarrow (r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2=5$

$\therefore r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta=5 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=5$

$\therefore r^2\cos 2\theta=5 \Rightarrow r^2=5\sec 2\theta$.

③ $xy=3 \Rightarrow (r\cos\theta)(r\sin\theta)=3 \Rightarrow r^2(\frac{1}{2}\sin 2\theta)=3$

$\therefore r^2=6\csc 2\theta$.

④ $x+3y=2 \Rightarrow r\cos\theta+3r\sin\theta=2$

$\therefore r(\cos\theta+3\sin\theta)=2 \Rightarrow r=\dfrac{2}{\cos\theta+3\sin\theta}$.

$\boxed{5}$ In problems ① and ②, Find a rectangular equation equivalent to the polar equation:

① $\theta=\frac{\pi}{6}$ ② $r=\tan\theta$

solu:

① $\theta=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan^{-1}(\frac{y}{x})=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{y}{x}=\tan(\frac{\pi}{6})$

$\therefore \frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\sqrt{3}\,y$.

② $r=\tan\theta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{x} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{y^2}{x^2}$

$$\therefore\ x^2(x^2+y^2)=y^2 \Rightarrow x^4+x^2y^2=y^2 \Rightarrow x^4=y^2-x^2y^2$$

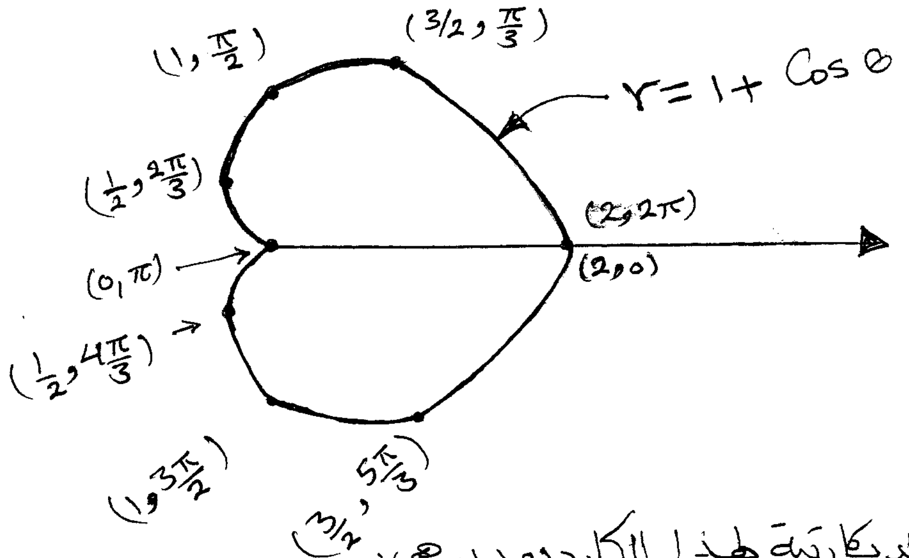
$$\therefore\ y^2(1-x^2)=x^4 \Rightarrow y^2=\frac{x^4}{1-x^2}.$$

$\boxed{6}$ sketch the graph of: $r=1+\cos\theta$

soln:

سوف نكون جدولاً لبعض قيم θ ، r ثم نمثلها بيانياً في النظام القطبي ونصل بينها بمنحنى أملس لنحصل على منحنى المعادلة:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\pi/3$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
r	2	$3/2$	1	$1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2



المعادلة الديكارتية لهذا الكارديويد هي:

$$x^4+y^4+2x^2y^2-2x^3-y^2-2xy^2=0$$

$\boxed{7}$ In exercises 1 – 10 , discribe the graph of the polar equation :

① $\theta=\frac{\pi}{4}$ ② $\theta=-\frac{\pi}{3}$ ③ $r\cos\theta=2$

④ $r\sin\theta=-1$ ⑤ $r=3$ ⑥ $r=-3$

⑦ $r=4\sin\theta$ ⑧ $r=6\cos\theta$ ⑨ $r=6\cos\theta+4\sin\theta$

⑩ $r=\cos\theta-\sin\theta$

solu: ① $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(\frac{\pi}{4})$

$\therefore \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x$

وهي الصورة الديكارتية لمعادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل يُنصف الربعين الأول و الثالث (في نظام الإحداثيات المتعامدة).
وعليه فإن المعادلة القطبية $\theta = \frac{\pi}{4}$ هي مُعادلة مستقيم يمر بالقطب O ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور القطبي. (في النظام القطبي).

---

② $\theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(-\frac{\pi}{3})$

$\therefore \frac{y}{x} = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x \Rightarrow y + \sqrt{3}x = 0$

وهي معادلة خط مُستقيم يمر بنقطة المبدأ.
في النظام القطبي يصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ (في الاتجاه السالب لقياس الزوايا) مع المحور القطبي.
وفي النظام المتعامد (الديكارتي) يمر بالربعين الثاني والرابع.

---

③ $r\cos\theta = 2 \Rightarrow x = 2$

وهي معادلة مستقيم رأسي.

---

④ $r\sin\theta = -1 \Rightarrow y = -1$

وهي مُعادلة مستقيم أفقي.

---

⑤ $r = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

وهي مُعادلة دائرة مركزها نقطة المبدأ (نقطة الأصل) ونصف قطرها 3

---

⑥ $r = -3 \Rightarrow -\sqrt{x^2+y^2} = -3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

وهي مُعادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها (3).

⑦ $r = 4\sin\theta \Rightarrow r = 4\left(\frac{y}{r}\right) \Rightarrow r^2 = 4y$

$\therefore x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$

وهي مُعادلة دائرة مركزها (0و2) ونصف قطرها (2).

---

⑧ $r = 6\cos\theta \Rightarrow r = 6\left(\frac{x}{r}\right) \Rightarrow r^2 = 6x$

$\therefore x^2 + y^2 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 = 0$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$

وهي مُعادلة دائرة مركزها (3و0) ونصف قطرها (3).

---

⑨ $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta \Rightarrow r = 6\left(\frac{x}{r}\right) + 4\left(\frac{y}{r}\right)$

$\therefore r^2 = 6x + 4y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y + 6x$

$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 13 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$

وهي مُعادلة دائرة مركزها (3و2) ونصف قطرها ($\sqrt{13}$).

---

⑩ $r = \cos\theta - \sin\theta \Rightarrow r = \frac{x}{r} - \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = x - y$

$\therefore x^2 + y^2 = x - y \Rightarrow x^2 - x + y^2 + y = 0$

$\therefore x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

وهي معادلة دائرة مركزها ($\frac{1}{2}$ و $\frac{-1}{2}$) ونصف قطرها ($\frac{1}{\sqrt{2}}$)

معادلات بعض المنحنيات القطبية.

1 المعادلة : $r\cos\theta = a \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$

معادلة مستقيم رأسي.

2 المعادلة : $r\sin\theta = b \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$

معادلة مستقيم أفقي.

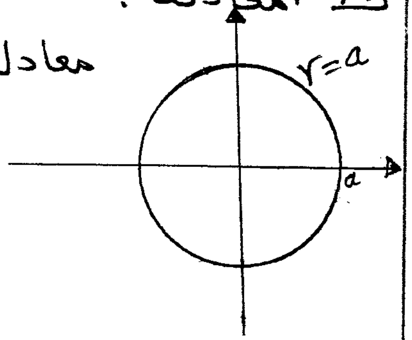
3 المعادلة : $\theta = \alpha$

هي معادلة مستقيم تمر بنقطة الأصل.

ويصنع زاوية قياسها الجبري α مع المحور القطبي

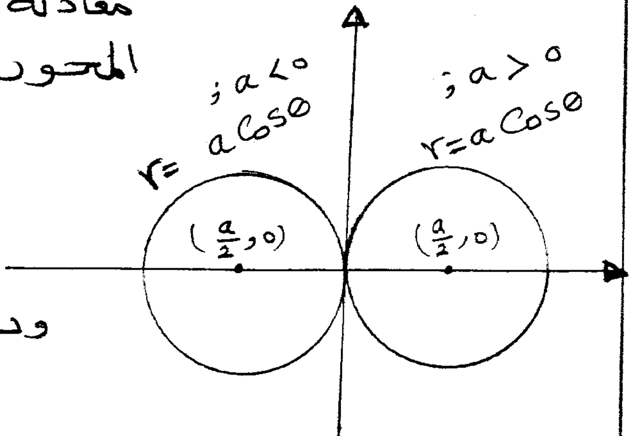
4 المعادلة : $r = a \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*$

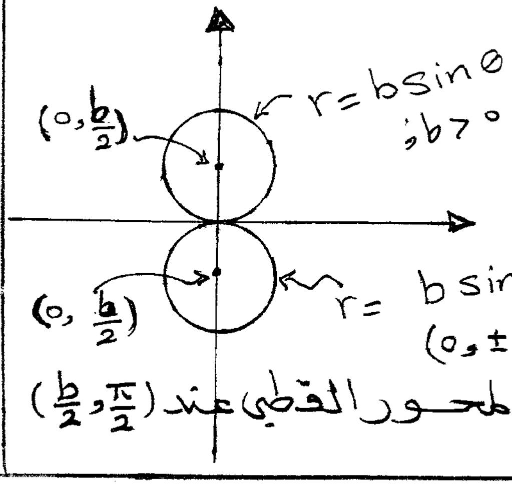
معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $|a|$.



5 المعادلة : $r = a\cos\theta \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^*$

معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل مركزها على المحور X عند $(\frac{a}{2}, 0)$ في النظام الديكارتي وفي النظام القطبي يقع المركز على المحور القطبي عند $(\frac{a}{2}, 0)$ أو على امتداد المحور القطبي عند $(\frac{a}{2}, \pi)$ ونصف قطرها $\frac{|a|}{2}$.





6 المعادلة : $r = b\sin\theta \quad ; b \in \mathbb{R}^*$

معادلة دائرة تمر بنقطة المبدأ

في النظام الديكارتي مركزها على المحور Y عند $(0, \pm\frac{b}{2})$

وفي النظام القطبي مركزها على المحور العمودي على المحور القطبي عند $(\frac{b}{2}, \frac{\pi}{2})$

أو مركزها على امتداد المحور العمودي على المحور القطبي عند $(\frac{b}{2}, \frac{3\pi}{2})$
ونصف قطرها $\frac{|b|}{2}$.

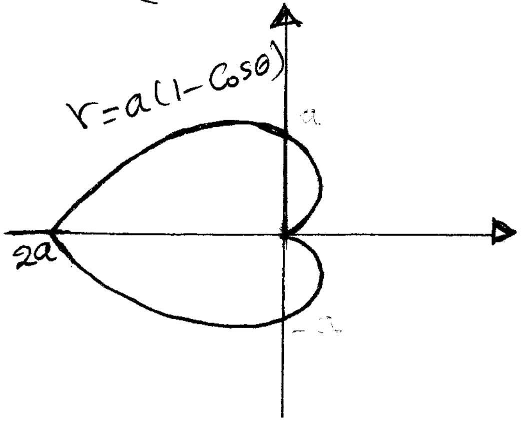
$\boxed{7}$ المعادلة: $r = a\cos\theta + b\sin\theta \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$

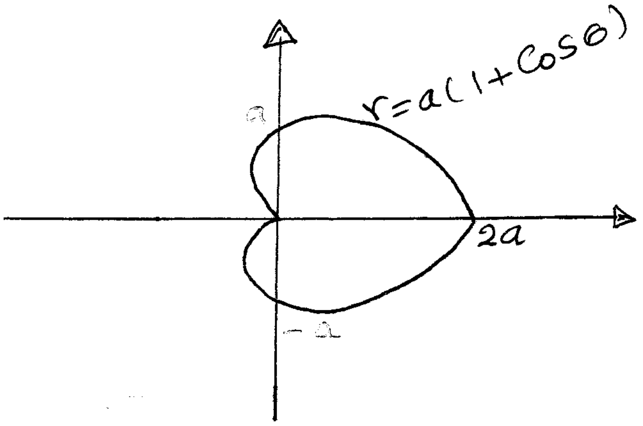
هي معادلة دائرة نصف قطرها $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ تمر بنقطة الأصل
ومركزها الديكارتي $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

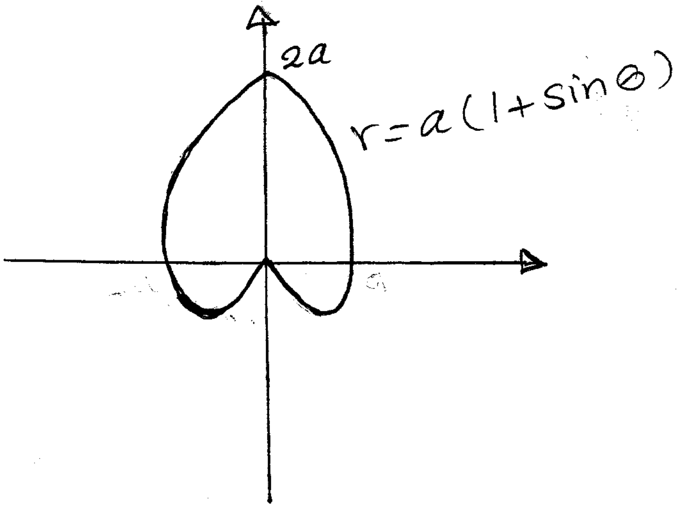
$\boxed{8}$ المعادلة: $r = a(1 \pm \cos\theta)$; $a > 0$

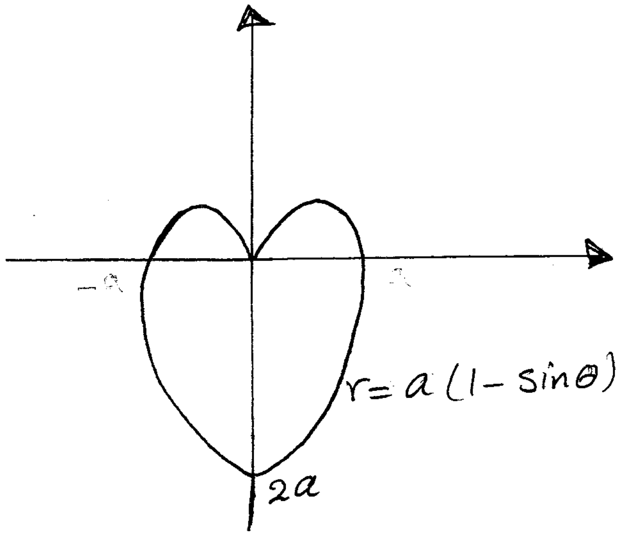
or $r = a(1 \pm \sin\theta)$

هي معادلة المنحنى القلبي (الكارديويد - cardioid)

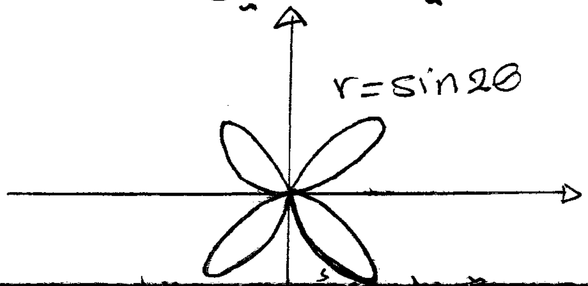


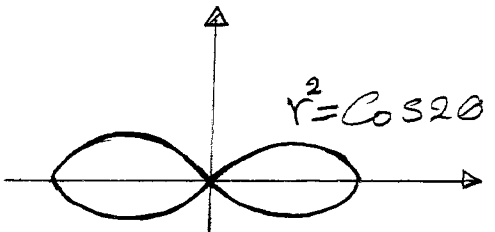






تنبيه: توجد منحنيات قطبية أخرى كثيرة غير الكارديويد مثل
الليمنيسكيت و الوردة وحلزون أرشميدس وغيرها.
فمثلاً





ليمنيسكيت (ذو العروتين)

Examples:

[II] sketch the graphs of the following polar equations:

① $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ② $r\sin\theta = -2$ ③ $r = -2\sec\theta$

④ $r = 4$ ⑤ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ⑥ $r = 4\cos\theta$

⑦ $r = -5\sin\theta$ ⑧ $r + 2 = 0$

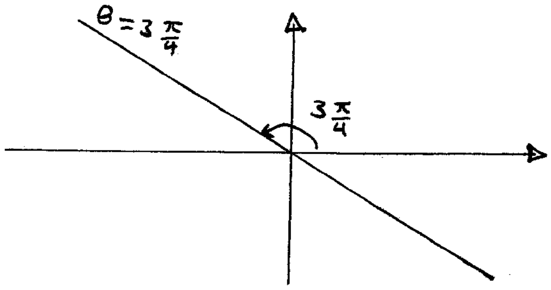
⑨ $r = 8\cos\theta + 8\sin\theta$ ⑩ $r = 3\cos\theta - 2\sin\theta$

⑪ $r = 2 - 2\sin\theta$ ⑫ $r = 3 + 3\cos\theta$

⑬ $r = \tan\theta \sec\theta$ ⑭ $r = \dfrac{6}{\sqrt{9 - 5\sin^2\theta}}$

⑮ $r^2 \cos 2\theta = 1$

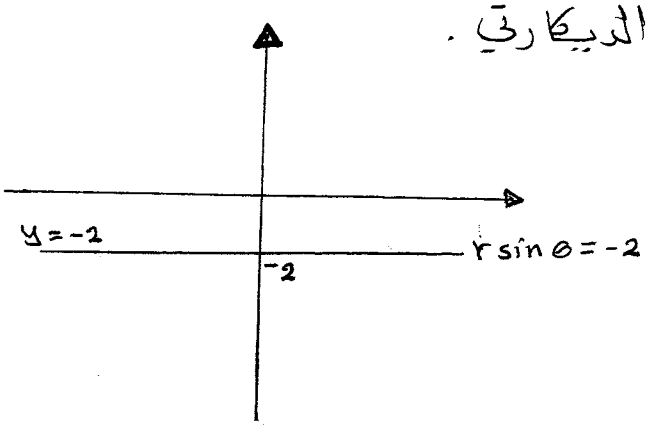
solu: ① $\theta = \frac{3\pi}{4}$



معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية $\frac{3\pi}{4}$ مع المحور القطبي ويمر بالربعين الثاني والرابع في المستوى الديكارتي

② $r\sin\theta = -2 \Rightarrow y = -2$

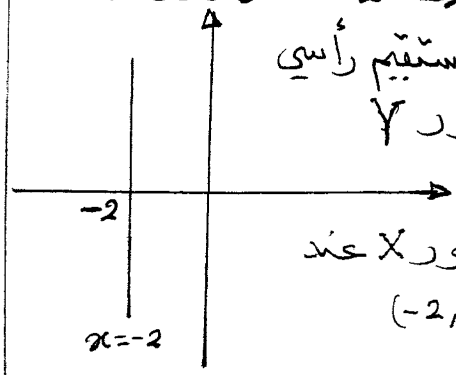
معادلة مستقيم أفقي يوازي المحور X ويقطع المحور Y عند $(0,-2)$ في المستوى الديكارتي.



③ $r = -2\sec\theta \Rightarrow r = \dfrac{-2}{\cos\theta}$

$\therefore r\cos\theta = -2 \Rightarrow x = -2$

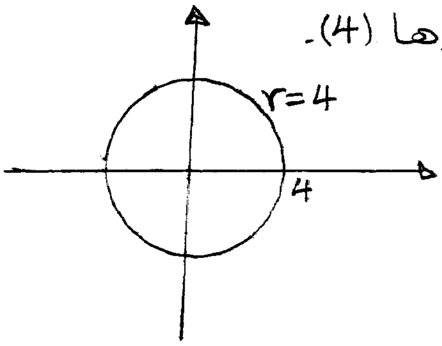
وهي معادلة مستقيم رأسي يوازي المحور Y



ويقطع المحور X عند النقطة $(-2,0)$

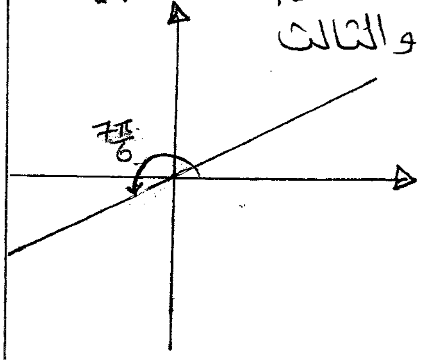
④ $r = 4$

تمثل معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها (4).



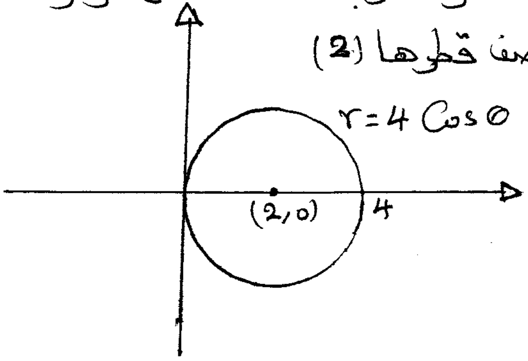
⑤ $\theta = \frac{7\pi}{6}$

معادلة مستقيم يمر بالربعين الأول والثالث



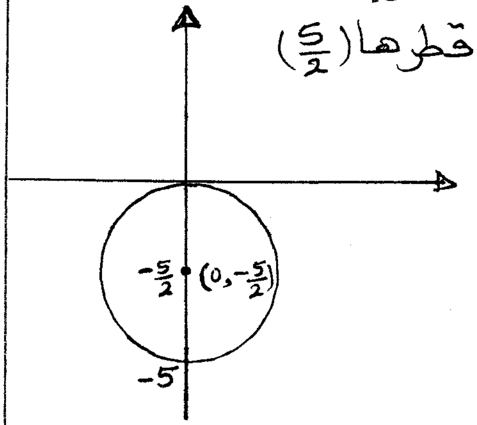
⑥ $r = 4\cos\theta$

تمثل معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل مركزها (2,0) ونصف قطرها (2)



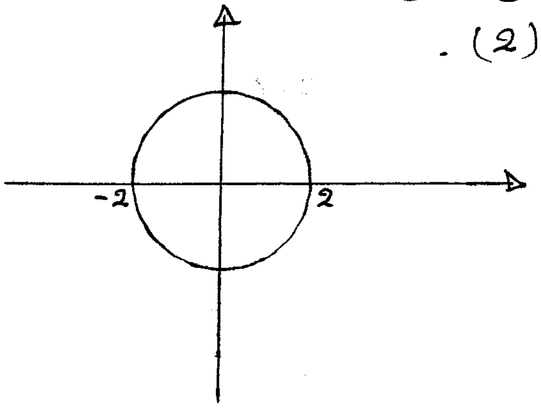
⑦ $r = -5\sin\theta$

تمثل معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل مركزها $(0, -\frac{5}{2})$ ونصف قطرها $(\frac{5}{2})$



⑧ $r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2$

معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها (2) .

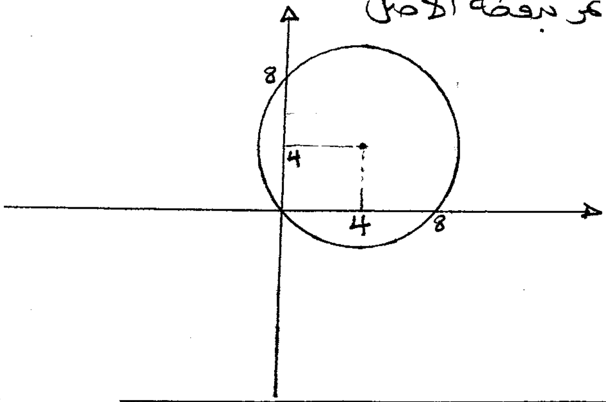


⑨ $r = 8\cos\theta + 8\sin\theta$

تمثل معادلة دائرة مركزها $(\frac{8}{2}, \frac{8}{2})$ أي (4,4) ونصف قطرها :

$$\frac{\sqrt{8^2+8^2}}{2} = \frac{\sqrt{(2)(64)}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

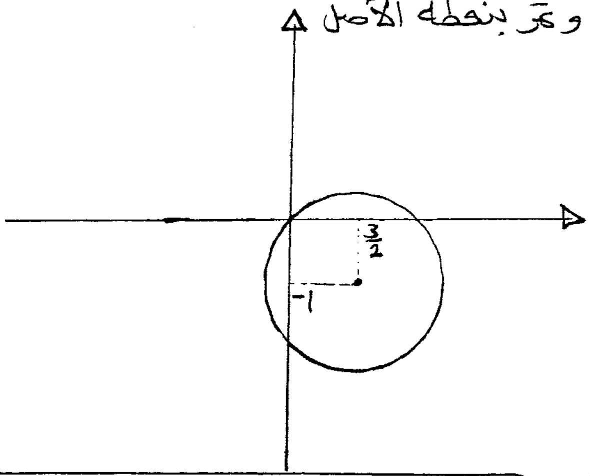
وتمر بنقطة الأصل



⑩ $r = 3\cos\theta - 2\sin\theta$

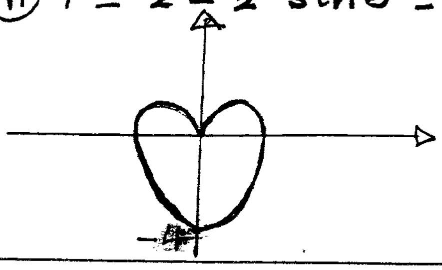
معادلة دائرة مركزها $(\frac{3}{2}, -1)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{9+4}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

وتمر بنقطة الأصل



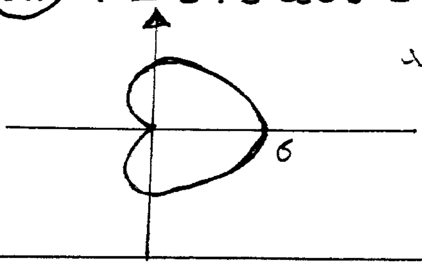
⑪ $r = 2 - 2\sin\theta = 2(1 - \sin\theta)$

وهي معادلة كارديويد



⑫ $r = 3 + 3\cos\theta = 3(1 + \cos\theta)$

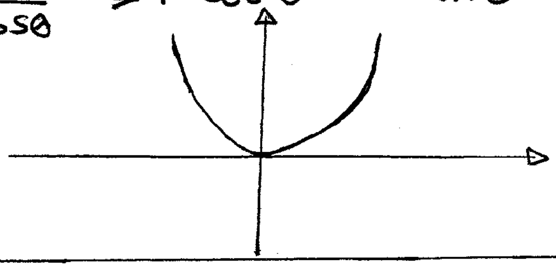
وهي معادلة كارديويد



(13) $r = \tan\theta \sec\theta \Rightarrow r = \tan\theta \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = \tan\theta$

$\therefore x = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x^2$

وهي مُعادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ومحوره Y واتجاهه إلى أعلى

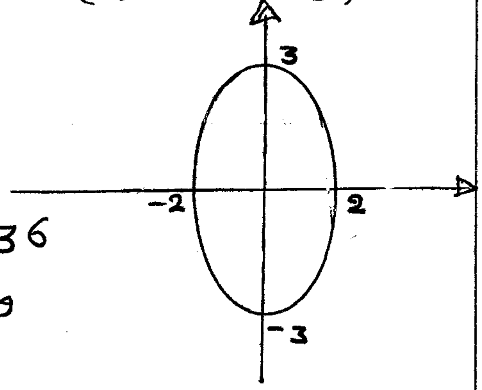


(14) $r = \frac{6}{\sqrt{9-5\sin^2\theta}} \Rightarrow r^2 = \frac{36}{9-5\sin^2\theta} \Rightarrow r^2(9-5\sin^2\theta) = 36$

$\therefore r^2\left(9 - 5\frac{y^2}{r^2}\right) = 36 \Rightarrow 9r^2 - 5y^2 = 36$

$\therefore 9(x^2+y^2) - 5y^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36$

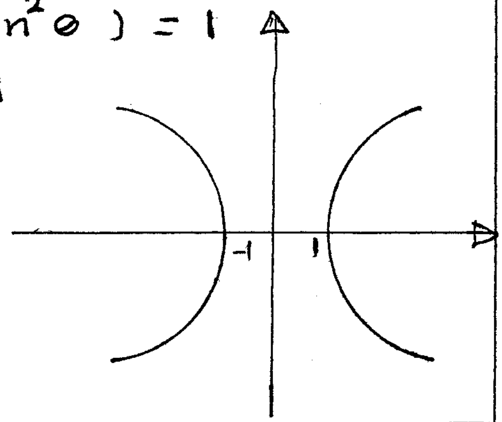
$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل . ومحوره الكبير على Y .



(15) $r^2\cos 2\theta = 1 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$

$\therefore r^2\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$

وهي معادلة قطع زائد مركزه (٠،٠) محوره القاطع على المحور X



EXERCISES (1-2)

In exercises 1 - 15, plot the given polar points (r, θ) and find their rectangular representations.

(1) $(3, 0)$ (2) $(5, \pi)$ (3) $(-2, 0)$
(4) $(-2, \pi)$ (5) $(1, \frac{\pi}{2})$ (6) $(3, \frac{3\pi}{2})$
(7) $(-2, \frac{3\pi}{2})$ (8) $(7, -\pi)$ (9) $(5, -\frac{\pi}{2})$
(10) $(4, \frac{7\pi}{6})$ (11) $(2, \frac{3\pi}{4})$ (12) $(-3, \frac{2\pi}{3})$
(13) $(1, \frac{\pi}{3})$ (14) $(-1, \frac{\pi}{3})$ (15) $(2, \frac{7\pi}{4})$

In exercises 16 - 30, find all polar cordinates representations of the given rectangular point:

(16) $(2, 2)$ (17) $(-3, 3)$ (18) $(-1, -1)$
(19) $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ (20) $(0, 5)$ (21) $(0, -3)$
(22) $(-2, 0)$ (23) $(3, 0)$ (24) $(\sqrt{3}, -1)$
(25) $(-\sqrt{3}, 1)$ (26) $(1, \sqrt{3})$ (27) $(3, 4)$
(28) $(-2, -3)$ (29) $(3, -2)$ (30) $(-3, 1)$

In exercises 31 - 46, sketch the graph of the polar equation and find a corresponding x-y equation:

(31) $r = 5$ (32) $r = -\sqrt{2}$ (33) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(34) $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (35) $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ (36) $r = 3\cos\theta$

(37) $r = -\cos\theta$ (38) $r = 2\sin\theta$ (39) $r = \cos\theta + \sin\theta$
(40) $r = 5 + 5\sin\theta$ (41) $r = 1 - \cos\theta$ (42) $r^2 = 4\sec 2\theta$
(43) $r = 6\cos\theta + 3\sin\theta$ (44) $r = 4\csc\theta$ (45) $r = -3\sec\theta$
(46) $r = 6\sin^2\frac{1}{2}\theta$.

In exercises 47 - 58, find a polar equation:

(47) $x = -2$ (48) $y = 4$ (49) $x^2 + y^2 = 25$
(50) $x^2 = 10y$ (51) $y = 6x$ (52) $x^2 - y^2 = 4$

(53) $9x^2+4y^2=36$ (54) $y^2=1-2x$ (55) $x^2+y^2=2xy$

(56) $x^4+y^4+2x^2y^2-2x^3-y^2-2xy^2=0$ (57) $y^2=x^2-2x$

(58) $x^2+y^2=3\sqrt{x^2+y^2}-3x$.

In exercises 59 – 74, Find a cartesian equation

(59) $r\cos\theta=7$ (60) $r\sin\theta=7$ (61) $r-6\sin\theta=0$

(62) $r=6\cot\theta$ (63) $r=2$ (64) $r=\frac{\pi}{6}$

(65) $r=4\sec\theta$ (66) $r^2(4\sin^2\theta-9\cos^2\theta)=72$

(67) $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$ (68) $r=\sec^2\theta\sin\theta$

(69) $r^2\cos 2\theta=4$ (70) $r^2=9\csc 2\theta$

(71) $r=\frac{4}{2+\sin\theta}$ (72) $r=\frac{4}{2+\cos\theta}$

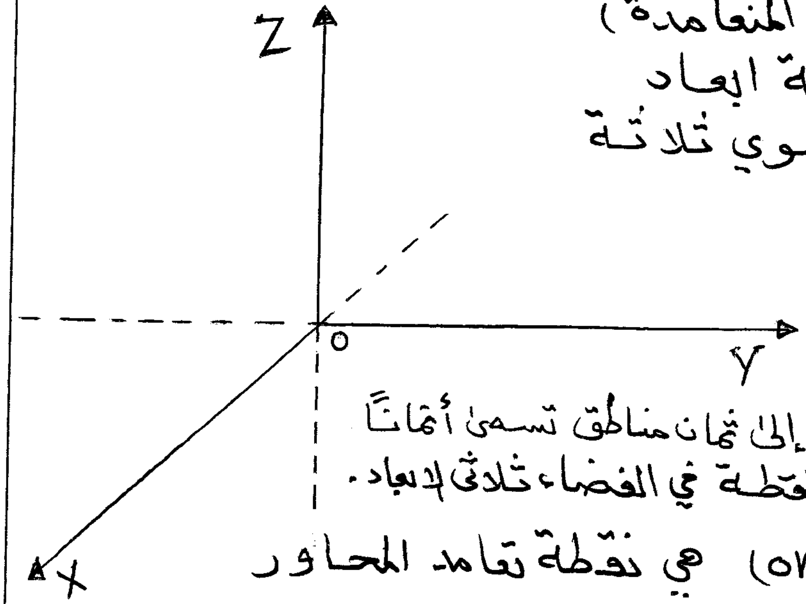
(73) $r=\csc\theta\cot\theta$ (74) $r=2\cos^2(\theta/2)$.

2 ـ نظم الإحداثيات الفضائية.

2-1 الاحداثيات الديكارتية في ثلاثة أبعاد.

The cartesian Coordinates in three dimensions.

لتكن o نقطة اختيارية في الفضاء و لننشئ منها (3) أعمدة تسمى بالمحاور الاحداثية X و Y و Z كما ندعو النقطة o نقطة الاصل (origin) (مبدأ الاحداثيات المتعامدة)



نحصل على نظاماً احداثياً بثلاثة ابعاد هو النظام oXYZ والذي يحوي ثلاثة مستويات هي:

- المستوي (XY)
- المستوي (XZ)
- المستوي (YZ)

تُقسم هذه المستويات الفضاء ثلاثي البعد إلى ثمان مناطق تسمى أثماناً

ونلاحظ: 1- النقطة $p(x,y,z)$ نقطة في الفضاء ثلاثي الابعاد.

2- نقطة الأصل $O(0,0,0)$ (origin) هي نقطة تعامد المحاور الثلاثة مثنى مثنى.

3. أي نقطة واقعة على المحور X (X-axis) يكون فيها الاحداثيات y و z يساويان الصفر. أي من الشكل: $(x,0,0)$.

4. أي نقطة واقعة على المحور Y (Y-axis) يكون فيها الاحداثيات x و z يساويان الصفر. أي من الشكل: $(0,y,0)$.

5. أي نقطة واقعة على المحور Z (Z-axis) يكون فيها الاحداثيات x و y يساويان الصفر. أي من الشكل: $(0,0,z)$.

6. جميع النقاط في المستوي (XY) يكون فيها $(z=0)$ من الشكل $(x,y,0)$

7. جميع النقاط في المستوي (XZ) يكون فيها $(y=0)$ من الشكل $(x,0,z)$

8. جميع النقاط في المستوي (YZ) يكون فيها $(x=0)$ من الشكل $(0,y,z)$

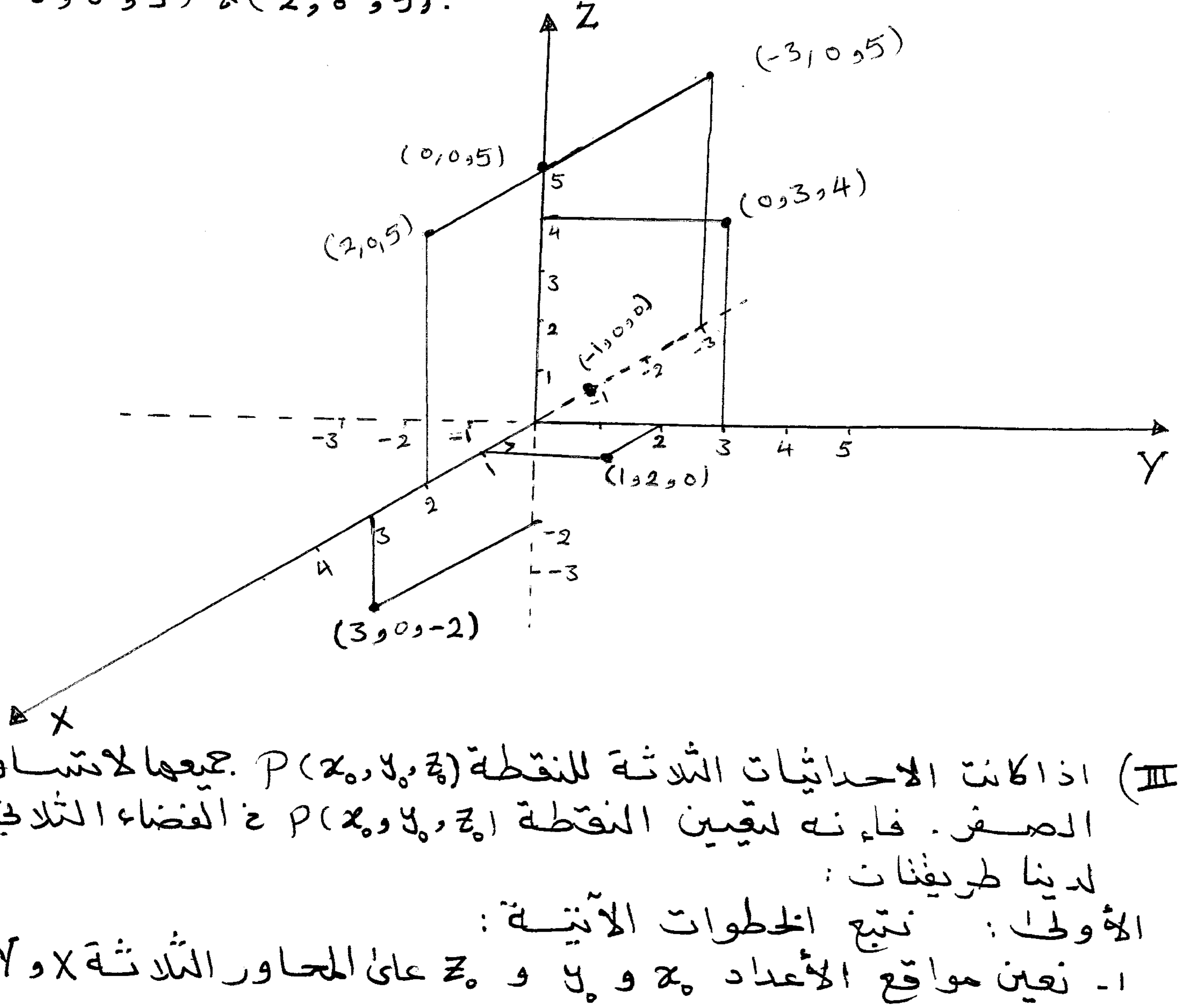
تعيين موقع نقطة $p(x,y,z)$ في الفضاء الثلاثي.

لتحديد موقع النقطة $p(x_0,y_0,z_0)$ في الفضاء الثلاثي نميز 3 حالات:

I) اذا كان واحد فقط من الاحداثيات الثلاثة للنقطة $p(x,y,z)$ لا يساوي الصفر (الاحداثيين الآخرين كل منهما يساوي الصفر) فإن النقطة p تقع على واحد من المحاور الاحداثية الثلاثة هو المحور الذي له الاحداثي لا يساوي الصفر.

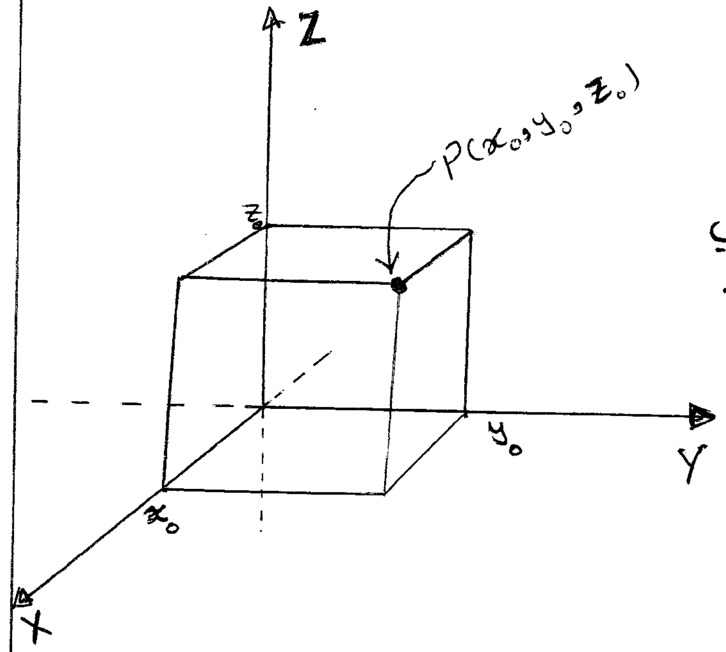
II) اذا كان واحد فقط من الاحداثيات الثلاثة للنقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ يساوي الصفر (الاحداثيين الآخرين كل منهما لا يساوي الصفر)
فإن النقطة P تقع في واحد من المستويات الثلاثة
فمثلاً: اذا كانت $x=0$ وكلاً من $y\neq 0$ ، $z\neq 0$ فالنقطة $P(0,y,z)$ تقع في المستوي yz .
وهكذا . . . .
في هذه الحالة تعين النقطة في المستوي المناسب باستخدام الطريقة المألوفة لتعيين نقطة في مستوي (الاحداثيات في بعدين)

مثال: نعين مواقع النقاط التالية في الفضاء الثلاثي:
$(0,0,5)$ & $(-1,0,0)$ & $(1,2,0)$ & $(0,3,\ )$ & $(3,0,-2)$ & $(-3,0,5)$ & $(2,0,5)$.



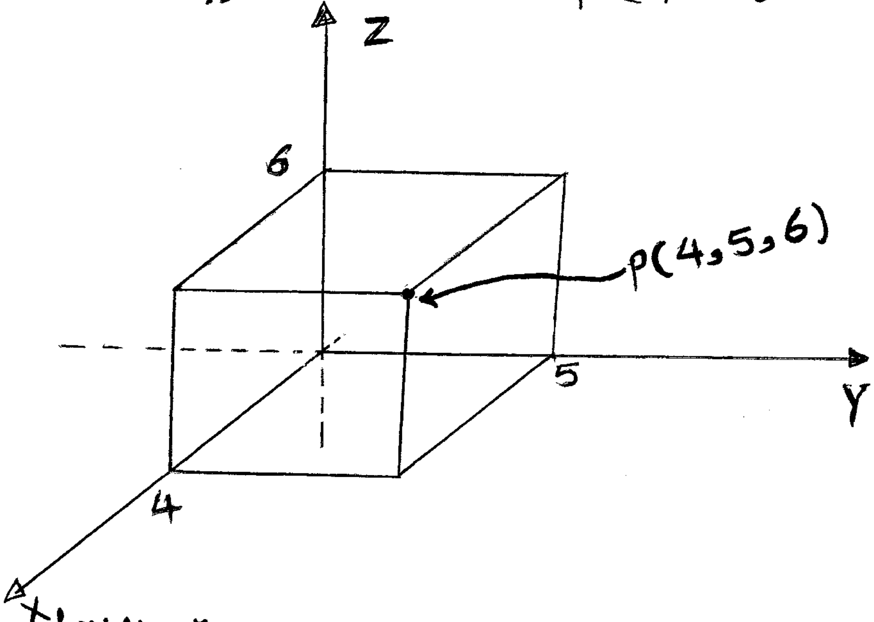
III) اذا كانت الاحداثيات الثلاثة للنقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ جميعها لا تساوي الصفر. فإنه لتعيين النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ في الفضاء الثلاثي لدينا طريقتان:
الأولى: نتبع الخطوات الآتية:
١- نعين مواقع الأعداد x_0 و y_0 و z_0 على المحاور الثلاثة X و Y و Z بالترتيب.
٢- نرسم من النقطة x_0 على المحور X مستوياً موازياً للمستوي (YZ).
٣. نرسم من النقطة y_0 على المحور Y مستوياً

4- نرسم من النقطة z_0 على المحور Z مستويًا موازيًا للمستوي (XY)

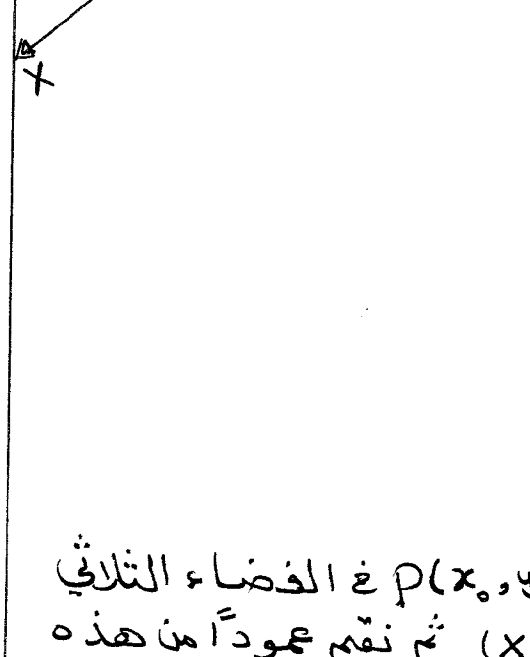


5- نقطة تقاطع المستويات الثلاثة هي النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ المطلوبة.

مثال: نعين موقع النقطة $P(4, 5, 6)$ في الفضاء الثلاثي:



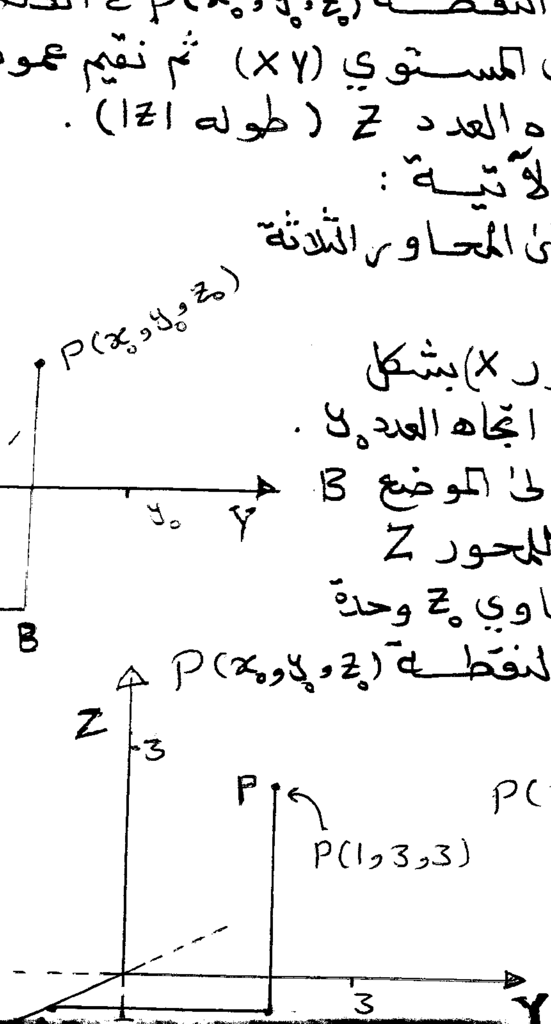
الطريقة الثانية: لتعيين موقع النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ في الفضاء الثلاثي نعين موقع النقطة (x_0, y_0) في المستوي (XY) ثم نقيم عمودًا من هذه النقطة موازيًا للمحور Z في اتجاه العدد Z (طوله $|Z|$).



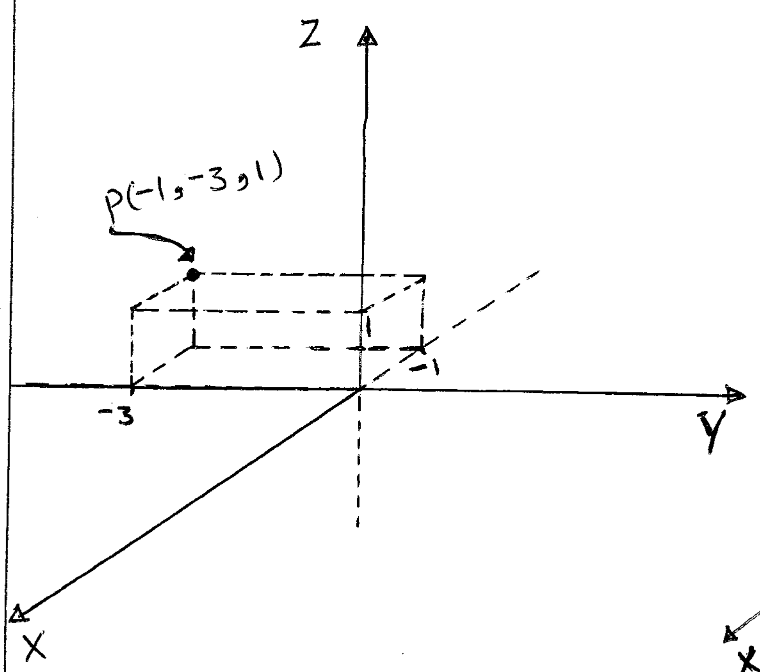
ومن أجل ذلك نتبع الخطوات الآتية:

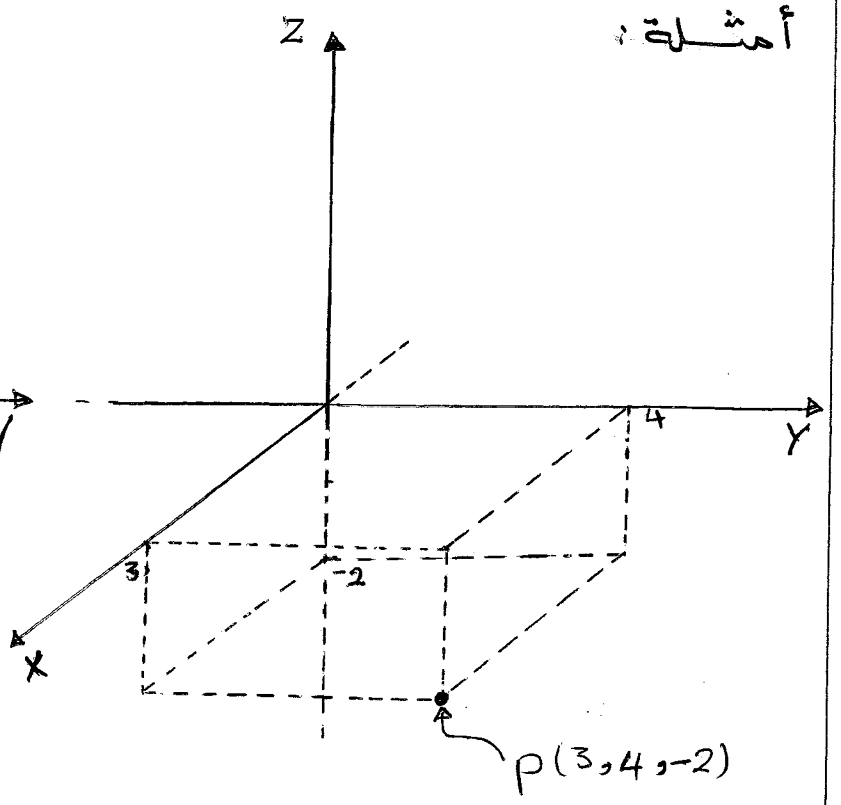
1. نعين الأعداد x_0 و y_0 و z_0 على المحاور الثلاثة X و Y و Z بالترتيب.
2. نتحرك من النقطة x_0 (على المحور X) بشكل موازٍ للمحور Y (عموديًا على X) في اتجاه العدد y_0 عددًا من الوحدات يساوي y_0 لنصل إلى الموضع B
3. نتحرك من الموضع B بشكل موازٍ للمحور Z وفي اتجاه العدد z_0 مسافة تساوي z_0 وحدة لنصل إلى الموضع P وهو موقع النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$

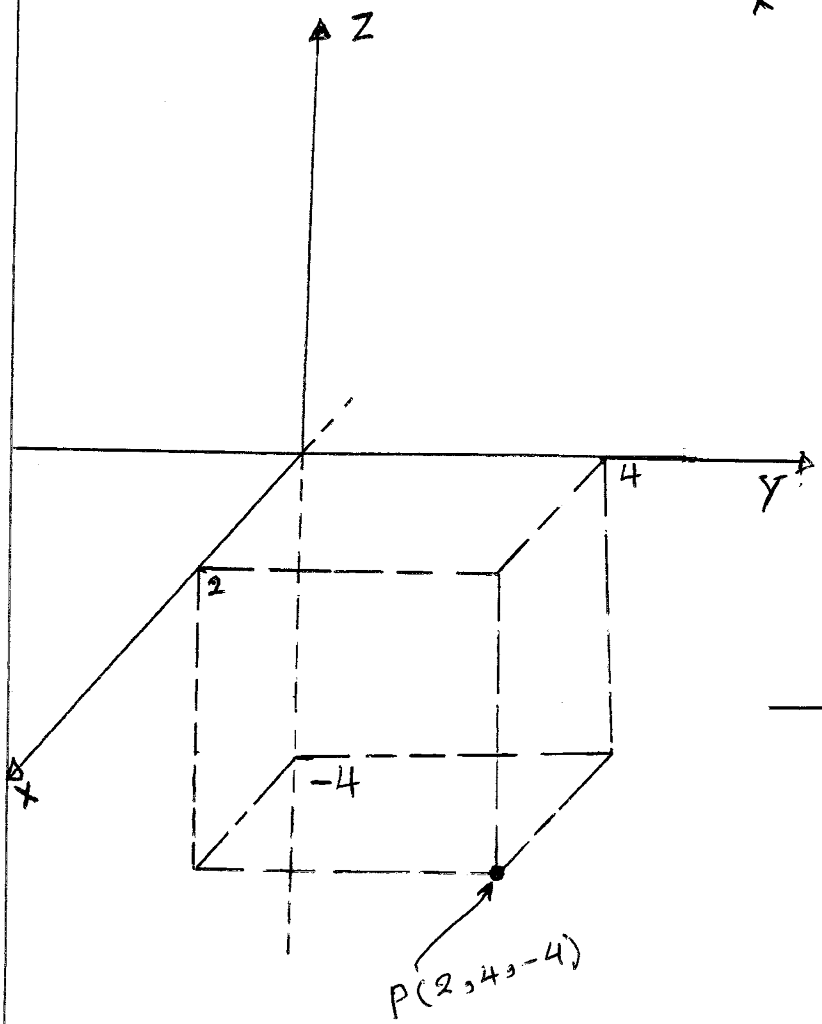
مثال: نعين موقع النقطة $P(1, 3, 3)$

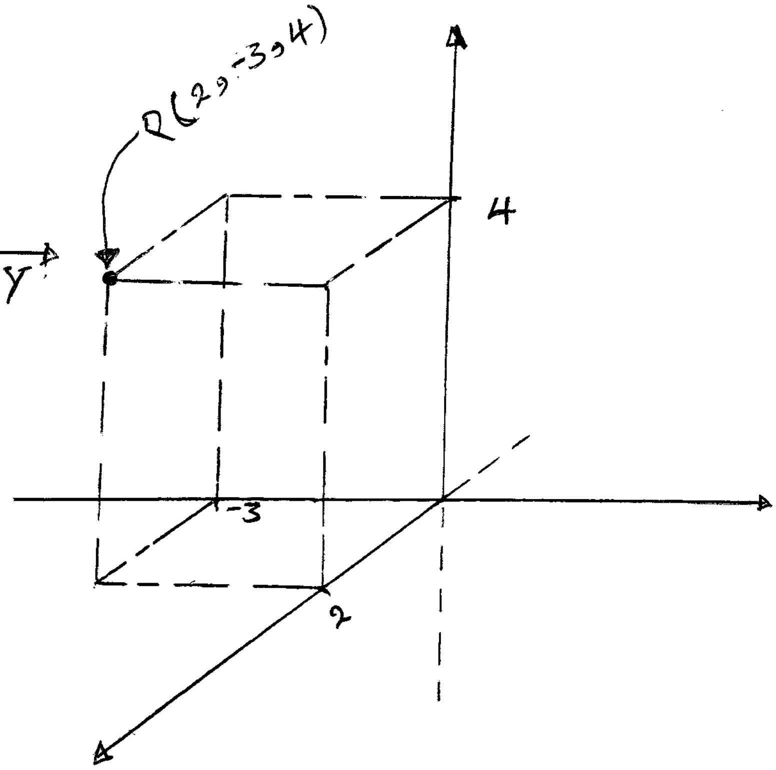


أمثلة :









2-2: مفاهيم أساسية في الهندسة التحليلية بثلاثة أبعاد.

1- البُعد بين النقطتين : $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ في الفضاء ثلاثي الأبعاد :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Example:
Find the distance between the points : $(1, 2, -2)$ and $(2, -1, 3)$

solu:

$$d = \sqrt{(1-2)^2 + (2+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

ملاحظة : البُعد بين أي نقطة $P(x, y, z)$ في الفضاء الثلاثي ونقطة الأصل

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ex: Find the distance between $(2, -1, 4)$ and the origin.

solu:

$$d = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$$

2- احداثيات النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين النقطتين: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ هي :

$$P_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Ex: Find the midpoint of the Line segment Connecting the points: $(4, 3, 1)$ and $(-2, 5, 7)$

solu:

$$P_0\left(\frac{4-2}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = P_0(1, 4, 4)$$

3- الصورة العامة لمعادلة الكرة التي مركزها (a, b, c) ونصف قطرها r هي :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

وفي الحالة الخاصة عندما مركز الكرة نقطة الأصل $O(0,0,0)$ فإن معادلة الكرة تأخذ الشكل :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

- معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرات: x و y و z .
- معامل x^2 = معامل y^2 = معامل z^2 كل منها لا تساوي الصفر .
- خالية من الحدود: xy و xz و yz .

Examples:

[1] Find the equation of the sphere with radius (5) and center (2, -1, 3).

solu:

$$\because (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$$\& \ r=5 \quad \& \quad (a,b,c)=(2,-1,3)$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-6z+9=25$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-11=0$$

[2] Describe the graph of the equation:

$$x^2+y^2+z^2+4x-8z=29$$

solu:

$$\because x^2+y^2+z^2+4x-8z=29$$

$$x^2+4x+y^2+z^2-8z=29$$

$$x^2+4x+4-4+y^2+z^2-8z+16-16=29$$

$$\therefore (x+2)^2+y^2+(z-4)^2=49$$

$r=7$ وهي معادلة كرة مركزها $(-2,0,4)$ ونصف قطرها

[3] Find an equation of the sphere with the points $p(7,-1,2)$ and $Q(3,4,6)$ as the ends of adiameter.

Solu: $\because$ P and Q are the ends of adiameter

$$\therefore 2r=d=\sqrt{(7-3)^2+(-1-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{16+25+16}=\sqrt{57}$$

$$\therefore 2r=\sqrt{57} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{57}}{2} \Rightarrow r^2=\frac{57}{4}$$

& Center is: $c\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{2+6}{2}\right)=c\left(5, \frac{3}{2}, 4\right)$

$\therefore$ equation of the sphere is:

$$(x-5)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-4)^2=\frac{57}{4}$$

4. الصورة العامة لمعادلة المستوي في الفضاء الثلاثي هي :

$$ax + by + cz + d = 0$$

حيث a ، b ، c ، d ثوابت حقيقية . و a ، b ، c لا تنعدم في وقت واحد .

Ex:

[1] Find an equation for the plane through the points: $(2,0,0)$, $(0,-1,0)$ and: $(0,0,3)$

solu: $\because$ equation for the plane is:

$$ax + by + cz + d = 0$$

at: $(2,0,0)$: $2a + d = 0 \Rightarrow a = -\frac{d}{2} \rightarrow (1)$

at: $(0,-1,0)$: $-b + d = 0 \Rightarrow b = d \longrightarrow (2)$

at: $(0,0,3)$: $3c + d = 0 \Rightarrow c = -\frac{d}{3} \longrightarrow (3)$

$\therefore$ the equation is:

$$-\frac{d}{2}x + dy - \frac{d}{3}z + d = 0$$

$$\therefore d\left(-\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{3}z + 1\right) = 0$$

$\because d \neq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{3}z + 1 = 0$

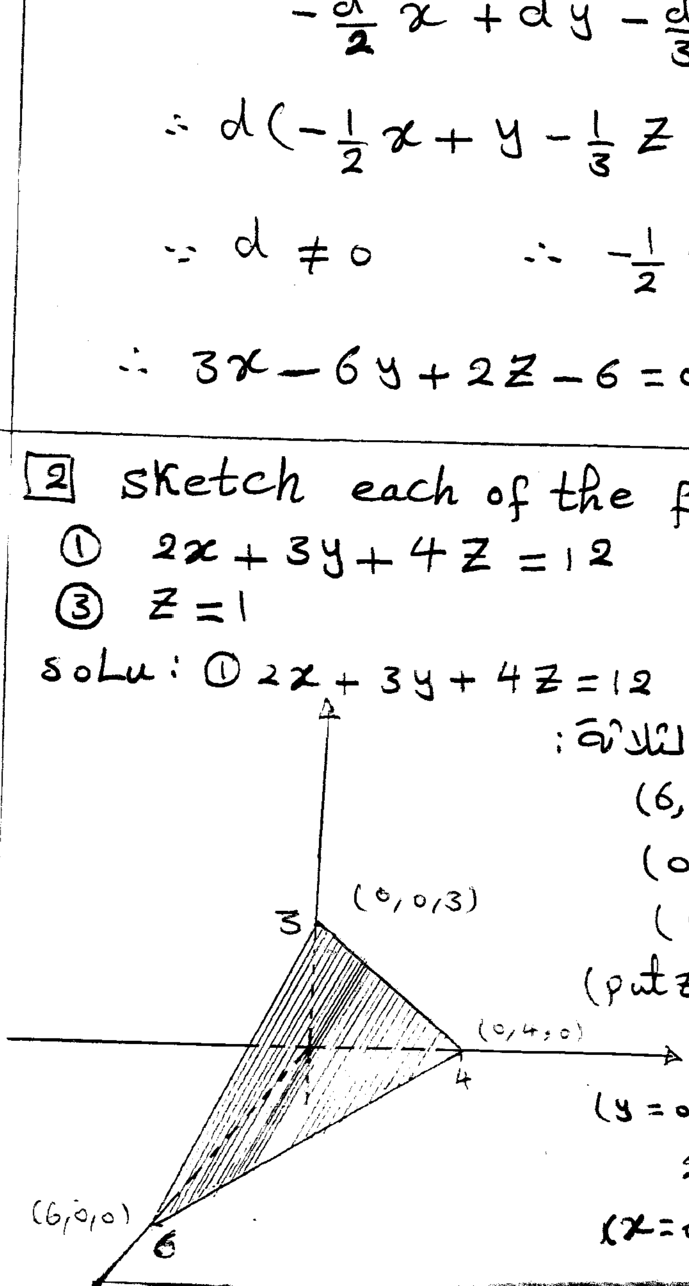
$$\therefore 3x - 6y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow 3x - 6y + 2z = 6$$

[2] sketch each of the following planes:

(1) $2x + 3y + 4z = 12$ (2) $3x + 5z = 10$

(3) $z = 1$

solu: (1) $2x + 3y + 4z = 12$



- نوجد نقاط تقاطع المستوى مع المحاور الثلاثة :
  - مع محور x (put: $y = z = 0$) هي: $(6,0,0)$
  - مع محور y ($x = z = 0$) هي : $(0,4,0)$
  - مع محور z ($x = y = 0$) هي : $(0,0,3)$
- نرسم تقاطع المستوى مع مستوى XY : (put $z=0$)

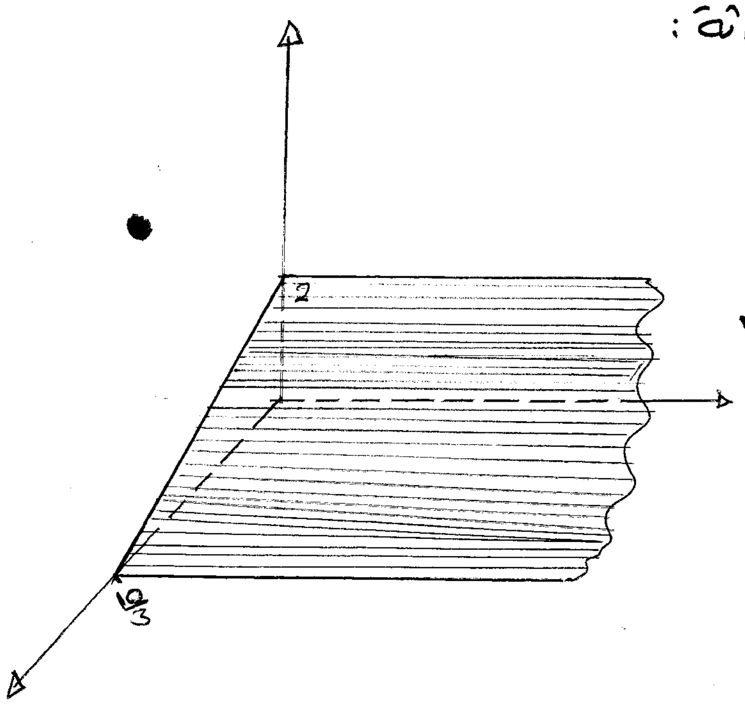
وهو المستقيم $2x + 3y = 12$

- نرسم تقاطع المستوى مع مستوى XZ : ($y = 0$)

وهو المستقيم : $2x + 4z = 12$

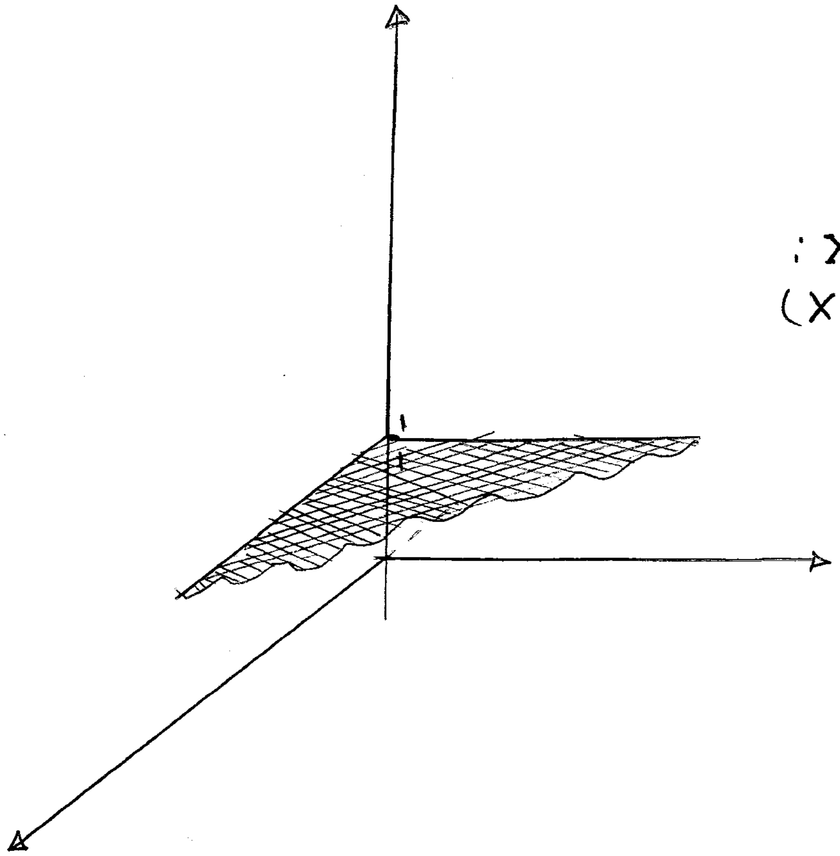
- نرسم تقاطع المستوى مع مستوى YZ : ($x = 0$)

② $3x + 5z = 10$



- نقاط تقاطع المستوي مع المحاور الثلاثة :
  - مع محور X : $(\frac{10}{3}, 0, 0)$
  - مع محور Y : لا يوجد تقاطع .
  - مع محور Z : $(0, 0, 2)$
- تقاطع المستوي مع مستوي XY :
وهو المستقيم : $x = \frac{10}{3}$ يوازي Y
- تقاطع المستوي مع مستوي XZ :
وهو المستقيم : $3x + 5z = 10$
- تقاطع المستوي مع مستوي YZ :
وهو المستقيم $z = 2$ يوازي Y :

③ $z = 1$

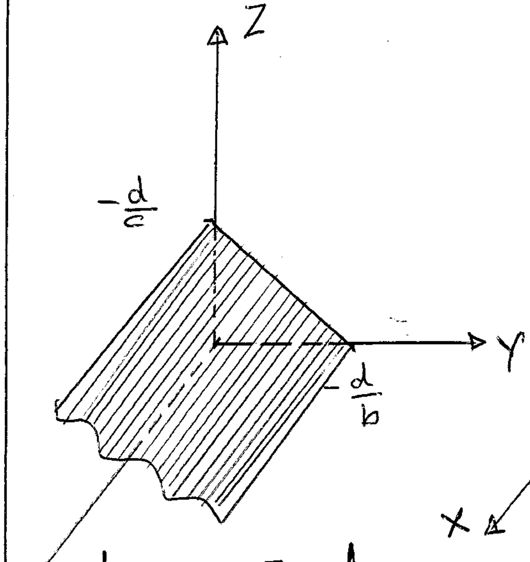


- التقاطع مع المحاور :
  - مع محور X : لا يوجد
  - مع محور Y : لا يوجد
  - مع محور Z : $(0, 0, 1)$
- تقاطع المستوي مع مستوي XY :
لا يوجد (المستوي يوازي XY)
- تقاطع المستوي مع XZ :
هو المستقيم $z = 1$ يوازي X
- تقاطع المستوي مع ZY :
هو المستقيم $z = 1$ يوازي Y .

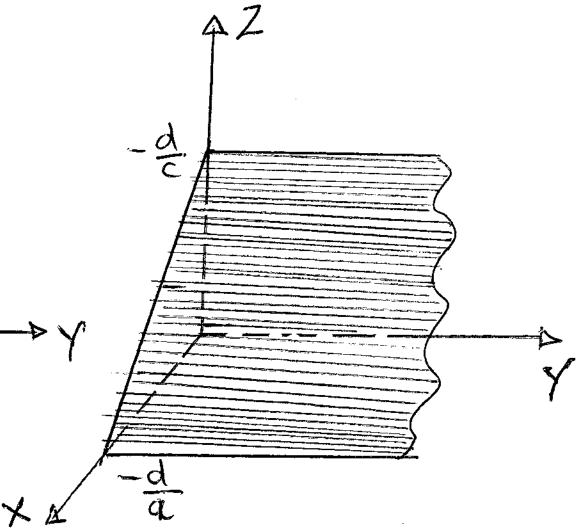
ملاحظات :

1- المستوى الذي معادلته : $ax+by+cz=0$ يمر بنقطة الأصل.

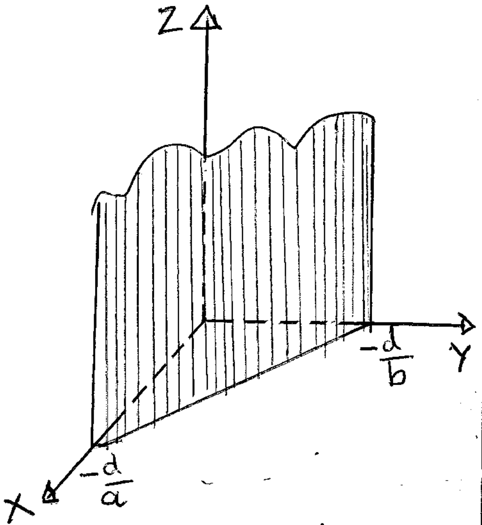
2. المستوي الذي معادلته خالية من واحد فقط من المتغيرات وتحتوي على المتغيرين الآخرين يوازي المحور المفقود متغيره.



$by+cz+d=0$
يوازي المحور X

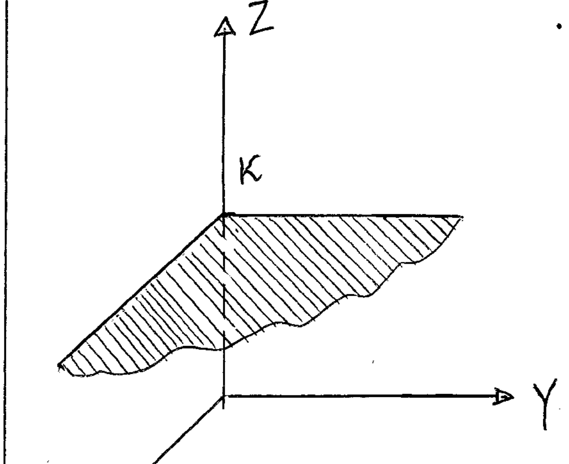


$ax+cz+d=0$
يوازي المحور Y

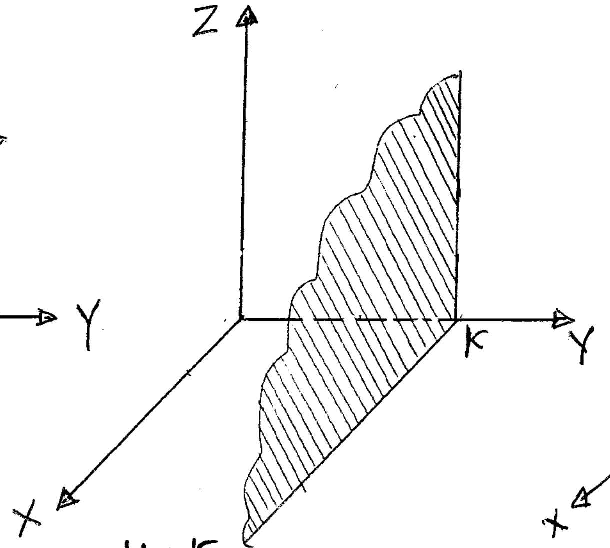


$ax+by+d=0$
يوازي المحور Z

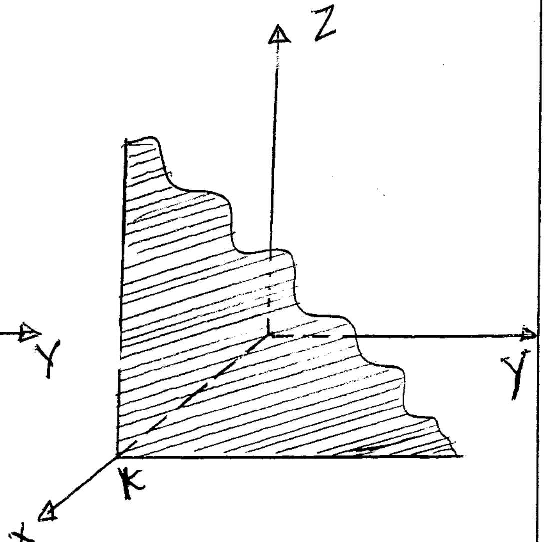
3. المستوي الذي معادلته تحتوي على متغير واحد فقط يوازي المستوي المكون من المحورين المفقودين في المعادلة.



$z=k$
يوازي المستوي (XY)



$y=k$
يوازي المستوي (XZ)



$x=k$
يوازي المستوي (ZY)

Exercises (1)

[1] Find the distance between the points: $(3, 5, -2)$ and $(-1, 3, 4)$

[2] Find the distance between $(3, -5, 2)$ and the origin.

[3] Find the equation of the sphere with radius (3) and center $(3, -2, 1)$

[4] Describe the graph of the following equations:

① $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z = 20$

② $2x^2 - 4x + 2y^2 + 2z^2 + 2y + 5 = 0$

③ $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6y - 7 = 0$

[5] Find an equation of the sphere with the points $(4, -1, 3)$ and $(2, 0, 5)$ as the ends of adiameter.

[6] Find the equation of the plane passing through the points: $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(3, 0, 0)$

[7] sketch each of the following planes:

① $3x + 2y + 6z = 12$

② $2x + y - 3z = 6$

③ $5x + 3y = 15$

④ $x - 2z = 6$

⑤ $5y - 3z = 2$

⑥ $5x - 3 = 2$

⑦ $3y - 1 = 0$

⑧ $3z - 2 = 5$

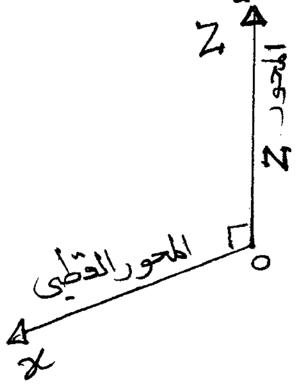
⑨ $6x + 7 = 3$

⑩ $3 + 2z = 1$

2-3 الإحداثيات الإسطوانية
cylindrical coordinates.

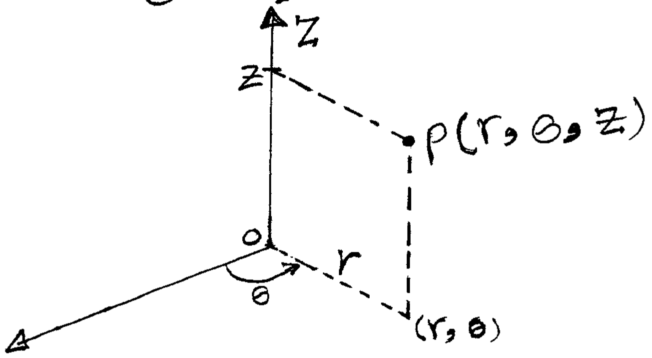
تعرفنا على الإحداثيات الديكارتية في الفضاء لكن هذه الإحداثيات ليست التمثيل الوحيد لنقطة في الفضاء ثلاثي الأبعاد.
ومن الإحداثيات الفضائية الإحداثيات الإسطوانية.

يتكون النظام الإحداثي الإسطواني من نظام الإحداثيات القطبية (القطب o والمحور القطبي) مضافاً عليه المحور Z عمودياً على مستويه عند القطب o.
وهو فضاء ثلاثي الأبعاد.



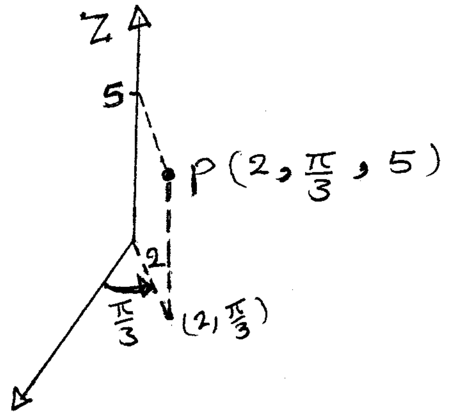
وعليه فإنه في هذا النظام تمثل أي نقطة فضائية بثلاثية مرتبة (r, θ, z) حيث (r, θ) هي نفس الإحداثيات القطبية المقابلة للمستوي X-Y أما الإحداثي z فهو نفس الاحداثي z في الإحداثيات الديكارتية في الفضاء ثلاثي الأبعاد، ويقع على المحور Z العمودي على المستوي القطبي.
ولتعيين موقع النقطة p التي احداثياتها الإسطوانية (r, θ, z) في نظام الإحداثيات الإسطوانية نتبع ما يأتي:

1. تعين موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية (ثنائي الأبعاد).
2. من موقع النقطة (r, θ) في المستوي نتحرك عمودياً باتجاه مقابل للمحور Z مسافة مقدارها z وحدة فنصل إلى موقع النقطة المطلوبة.

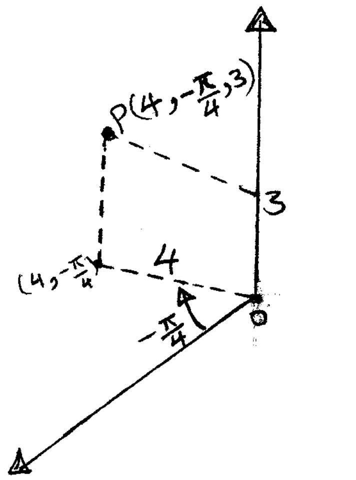


أمثلة: الأشكال التالية تعين مواقع نقاط في النظام الإسطواني:

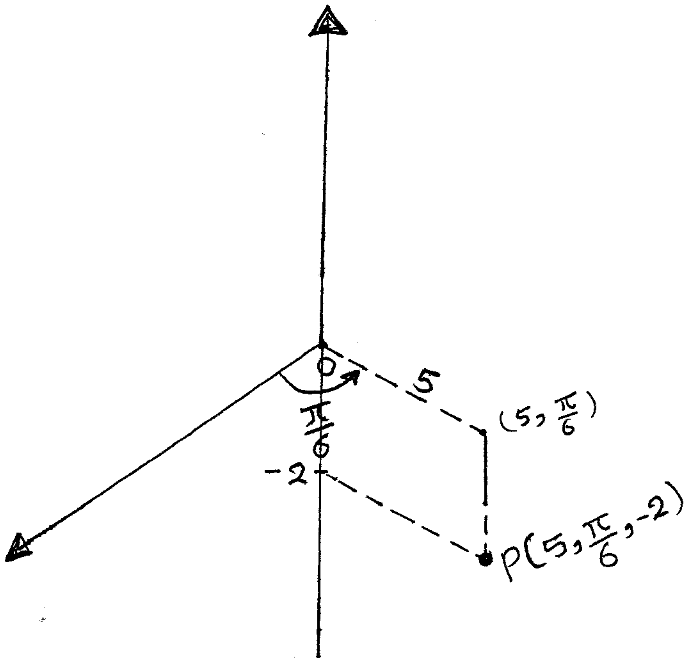
① $P(2, \frac{\pi}{3}, 5)$



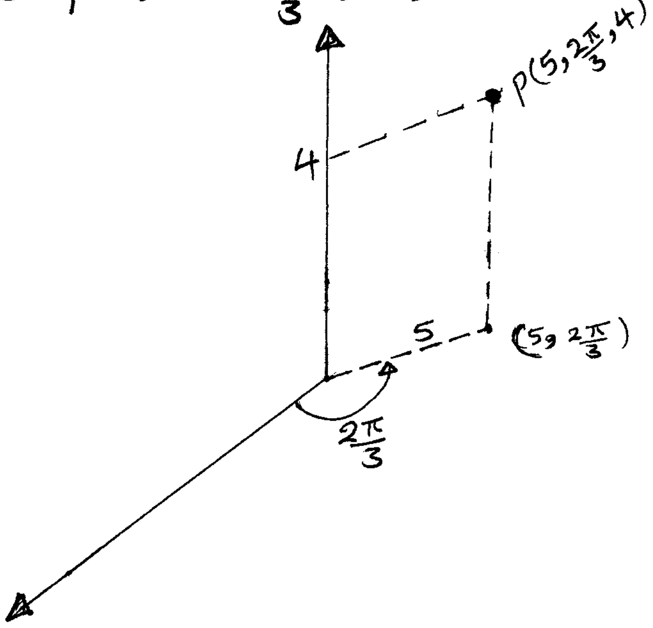
② $P(4, -\frac{\pi}{4}, 3)$



③ $P(5, \frac{\pi}{6}, -2)$



④ $P(5, \frac{2\pi}{3}, 4)$



العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات الاسطوانية :

نطابق النظام الإسطواني مع النظام الإحداثي XYZ بحيث ينطبق المحور القطبي على المحور X والقطب على نقطة الأصل ويتطابق محوري Z في النظامين كما بالشكل :

ومنه نجد :

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

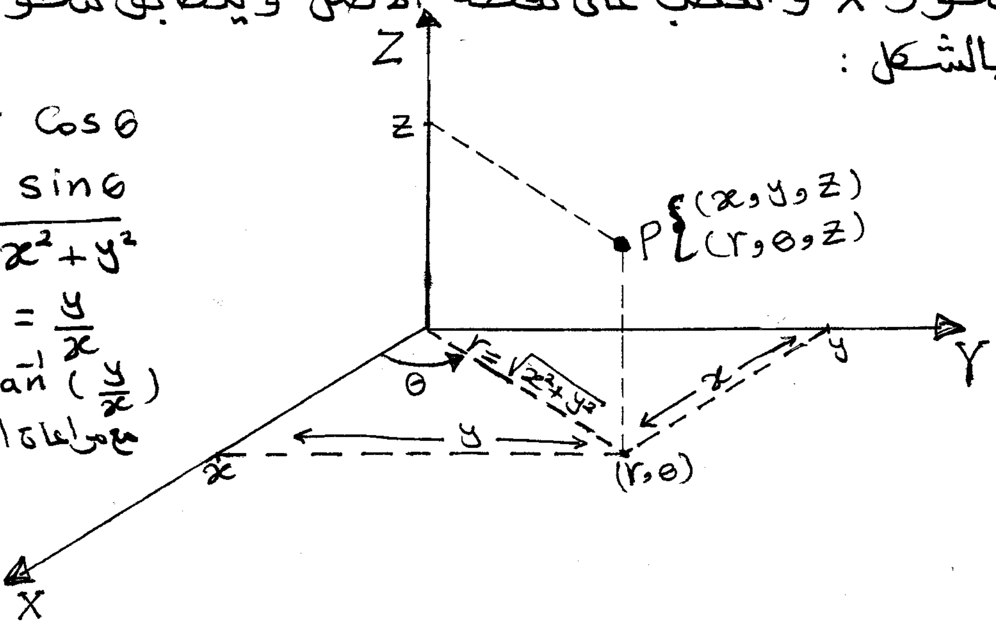
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

مع مراعاة اشارتي x, y

$z = z$



1- لتحويل إحداثيات نقطة في النظام الإسطواني إلى النظام الديكارتي : نستخدم :

$x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و $z = z$

2- لتحويل إحداثيات نقطة في النظام الديكارتي إلى النظام الإسطواني : نستخدم :

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ (حيث موقع θ يعتمد على اشارتي x و y)

$z = z$

Examples:

1. Convert from rectangular to cylindrical Coordinates:

① $(4, 4, -3)$ ② $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ ③ $(-2, -1, -3)$

④ $(0, 2, 0)$ ⑤ $(0, 0, 1)$ ⑥ $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$

solu: ① $p(4, 4, -3)$

$\because r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(4)^2+(4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(1)$ (θ في الربع الأول)

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

and: $z = -3$.

Thus, in cylindrical coordinates, the point is:

$p(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -3)$.

---

② $p(-2, 2\sqrt{3}, 4)$

$\because r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$

& $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{-2}) = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

وحيث θ واقعة في الربع الثاني

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

and: $z = 4$

Thus, in cylindrical coordinates, the point is: $p(4, \frac{2\pi}{3}, 4)$

---

③ $p(-2, -1, -3)$

$\because r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$

& $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{-1}{-2}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$ (و θ في الربع الثالث)

$\therefore \theta = \pi + \tan^{-1}(\frac{1}{2})$

and: $z = -3$

Thus, in cylindrical Coordinates, the point is:

$p(\sqrt{5}, \pi+\tan^{-1}(\frac{1}{2}), -3)$

④ $p(0,2,0)$

The point in cylindrical coordinates is:
$p(2,\frac{\pi}{2},0)$

---

⑤ $p(0,0,1)$
The point in cylindrical coordinates is: $p(0,0,1)$

---

⑥ $p(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$
$\because r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$
& $\theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})=\tan^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})=\tan^{-1}(-1)$ (حيث θ في الربع الرابع)
$\therefore \theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$
and: $z=1$
Thus, in cylindrical Coordinates, the point is:
$p(2,\frac{7\pi}{4},1)$.

---

2 Convert from cylindrical to rectangular Coordinates:

① $(3,\pi,-2)$ ② $(-2,\frac{3\pi}{2},5)$ ③ $(1,\frac{\pi}{3},3)$
④ $(5,-\frac{\pi}{3},4)$ ⑤ $(2,\frac{3\pi}{4},-6)$

solu: ① $p(3,\pi,-2)$
The point in Cartesian Coordinates is: $p(-3,0,-2)$

---

② $p(-2,\frac{3\pi}{2},5)$
The point in Cartesian Coordinates is: $p(0,2,5)$

---

③ $p(1,\frac{\pi}{3},3)$
$\because x=r\cos\theta=(1)\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
& $y=r\sin\theta=(1)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
and $z=3$
Thus, in Cartesian Coordinates is: $p(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3)$

④ $p(5, -\frac{\pi}{3}, 4)$

$\because x = r\cos\theta = 5\cos(-\frac{\pi}{3}) = 5(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$

& $y = r\sin\theta = 5\sin(-\frac{\pi}{3}) = 5(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$

and: $z = 4$

Thus, in Cartesian Coordinates is: $p(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, 4)$

---

⑤ $p(2, \frac{3\pi}{4}, -6)$

$\because x = r\cos\theta = 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$

& $y = r\sin\theta = 2\sin\frac{3\pi}{4} = 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$

and: $z = -6$

Thus, in Cartesian Coordinates is: $p(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -6)$.

$\boxed{3}$ In exercises 1 – 10 write the given equation in cylindrical coordinates:

① $2x^2 + 2y^2 - 3z - 8 = 0$ ② $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

③ $z = x^2 + y^2 - 2x + y$ ④ $z^2 = x^2 - y^2$

⑤ $x^2 + y^2 = 16$ ⑥ $(x-2)^2 + y^2 = 4$

⑦ $z = x^2 + y^2$ ⑧ $z = \cos(x^2 + y^2)$

⑨ $y = x$ ⑩ $3x - 2y + 5z = 7$

solu: ① $2x^2 + 2y^2 - 3z - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 3z - 8 = 0$

$\therefore 2r^2 - 3z - 8 = 0 \Rightarrow 2r^2 = 3z + 8$

---

② $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow r^2 + z^2 = 16$

---

③ $z = x^2 + y^2 - 2x + y \Rightarrow z = r^2 - 2r\cos\theta + r\sin\theta$.

---

④ $z^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow z^2 = (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2$

$\therefore z^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta \Rightarrow z^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\therefore z^2 = r^2\cos 2\theta$

⑤ $x^2+y^2=16 \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow r=4 \quad$ or: $r=-4$

⑥ $(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2=4$

$\therefore x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow r^2-4r\cos\theta \Rightarrow r^2=4r\cos\theta$

Then: $\quad r=4\cos\theta \quad$ or: $r=0$

وحيث أن $r=0$ تمثل نقطة الأصل وهذه النقطة تقع على المنحنى $r=4\cos\theta$ فتكون المعادلة هي $r=4\cos\theta$

⑦ $z=x^2+y^2 \Rightarrow z=r^2$

⑧ $z=\cos(x^2+y^2) \Rightarrow z=\cos r^2$

⑨ $y=x \Rightarrow \frac{y}{x}=1 \Rightarrow \tan\theta=1 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}. \quad$ or: $\theta=\frac{5\pi}{4}.$

⑩ $3x-2y+5z=7 \Rightarrow 3r\cos\theta-2r\sin\theta+5z=7$

$\boxed{4}$ In exercises 1 – 8, an equation is given in cylindrical coordinates. Express the equation in rectangular:

① $z=r$ ② $z=4-r^2$ ③ $r=2\sec\theta$

④ $\theta=\frac{7\pi}{4}$ ⑤ $r=3$ ⑥ $z=r^2$

⑦ $r=8\cos\theta$ ⑧ $r^2+z^2=1$

soln: ① $z=r \Rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow z^2=x^2+y^2.$

② $z=4-r^2 \Rightarrow z=4-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z=4$

③ $r = 2\sec\theta \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = 2 \Rightarrow x = 2$

---

④ $\theta = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow y = -x.$

---

⑤ $r = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

---

⑥ $z = r^2 \Rightarrow z = x^2 + y^2$

---

⑦ $r = 8\cos\theta \Rightarrow r^2 = 8r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2 = 8x$

$\Rightarrow x^2 - 8x + y^2 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = 16$

---

⑧ $r^2 + z^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$

EXERCISES (2 - 2)

[1] In exercises 1 - 6, Convert from rectangular to cylindrical coordinates:

① $(0, 3, 0)$ ② $(5, 5, 0)$ ③ $(-4, 4, 7)$
④ $(4, -4, -2)$ ⑤ $(-4\sqrt{3}, -4, 2)$ ⑥ $(\sqrt{3}, -1, 3)$

[2] In exercises 1 - 6, Convert from cylindrical to Cartesian coordinates:

① $(4, \frac{3\pi}{4}, -1)$ ② $(6, \frac{3\pi}{2}, 7)$ ③ $(5, \pi, 0)$
④ $(1, \frac{\pi}{6}, -3)$ ⑤ $(3, 0, 4)$ ⑥ $(4, -\frac{\pi}{6}, 3)$

[3] In exercises 1 - 6, Convert the equation into cylindrical coordinates:

① $x^2 + y^2 = 1$ ② $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
③ $y = 3x + z$ ④ $z^2 = x^2 + y^2$
⑤ $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$ ⑥ $y^2 - z^2 = 9yx$

[4] In exercises 1 - 6, Convert the equation into rectangular coordinates:

① $z + r^2 = 3$ ② $r = 5$
③ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ④ $z + r = 2$
⑤ $z = r^2\cos 2\theta$ ⑥ $2z - r^2\sin 2\theta = 0$

2.4 : الإحداثيات الكروية.
spherical coordinates.

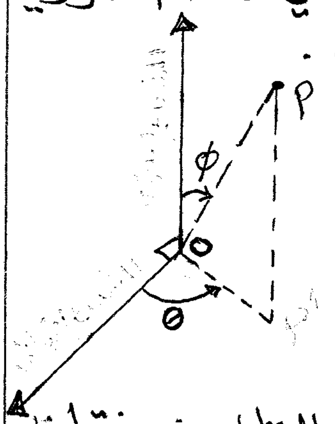
يتكون النظام الكروي من نقطة o «نقطة الأصل» وشعاع ينبعث منها نطلق عليه بالشعاع الابتدائي ومحور Z عمودي على المستوي الواقع فيه هذا الشعاع عند النقطة o.

وفي هذا النظام يوجد لكل نقطة p في الفضاء ثلاثة احداثيات هي: $p(\rho, \theta, \phi)$ حيث:

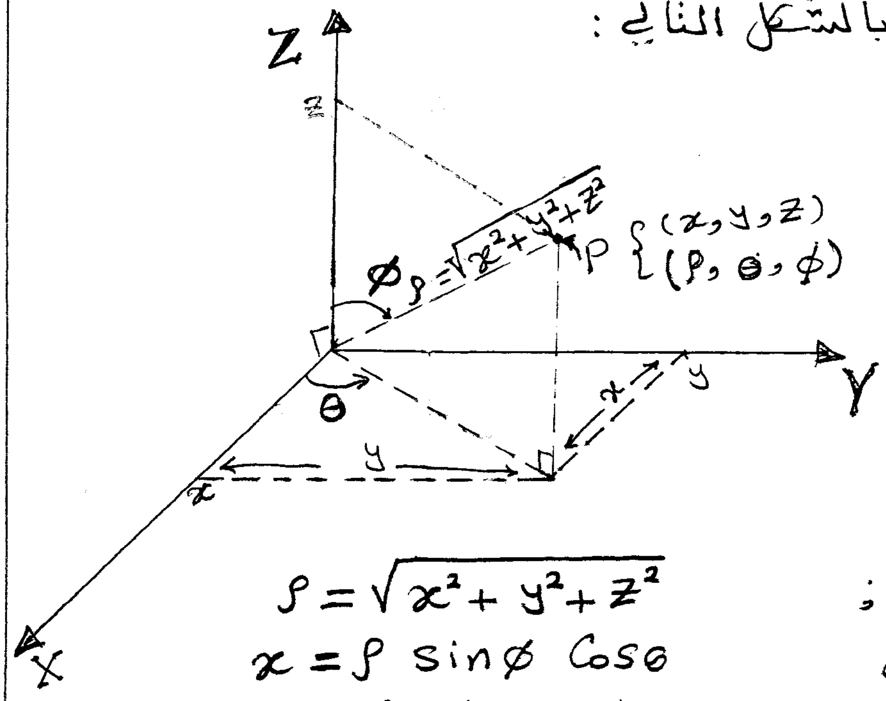
ρ : هو بُعد النقطة p عن نقطة الأصل.

θ : هي الزاوية المحصورة بين الشعاع الابتدائي في النظام الكروي ومسقط النقطة في مستوي الشعاع الابتدائي.

ϕ : هي الزاوية المحصورة بين الخط الواصل بين النقطة p ونقطة الأصل وبين المحور Z.



وإذا ما طبقنا هذا النظام على نظام الاحداثيات الديكارتية (ثلاثي الأبعاد) XYZ بحيث ينطبق الشعاع الابتدائي على المحور X ويتطابق في النظامين نقطتا الأصل ومحورا Z. كما بالشكل التالي:



ومنه نجد:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad ; \quad \rho \geq 0$$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \& \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

and : $$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad \& \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right).$$

1- لتحويل إحداثيات نقطة في النظام الكروي إلى النظام الديكارتي نستخدم :

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

2- لتحويل إحداثيات نقطة في النظام الديكارتي إلى النظام الكروي نستخدم :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$ (موقع θ يعتمد على اشارة كل من x و y ، $0 \leq \theta < 2\pi$)

and:
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$ ، $0 \leq \phi \leq \pi$

حيث موقع ϕ يعتمد على اشارة z .

Examples:

[1] Convert from spherical to rectangular Coordinates:

① $(3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ② $(2, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ ③ $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$

④ $(4, 0, \pi)$ ⑤ $(4, \frac{\pi}{2}, 0)$ ⑥ $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

soLu: ① $p(3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 3 \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{2} = 3(\frac{1}{\sqrt{2}})(0) = 0$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 3 \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{2} = 3(\frac{1}{\sqrt{2}})(1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$z = \rho \cos\phi = 3 \cos\frac{\pi}{4} = 3(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Thus, in cartesian Coordinates, the point is:
$p(0, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$

---

② $p(2, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 2 \sin(\frac{5\pi}{6}) \cos(-\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 2 \sin(\frac{5\pi}{6}) \sin(-\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z = \rho \cos\phi = 2 \cos(\frac{5\pi}{6}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$$

Thus, in cartesian Coordinates, the point is:
$p(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3})$.

---

③ $p(2, \frac{\pi}{4}, 0)$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 2 \sin(0) \cos\frac{\pi}{4} = 2(0)(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 2 \sin(0) \sin(\frac{\pi}{4}) = 2(0)(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$

$z = \rho \cos\phi = 2\cos(0) = 2(1) = 2(1) = 2$

Thus, in cartesian coordinates, the point is:
$p(0, 0, 2)$

---

④ $p(4, 0, \pi)$

$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 4\sin(\pi)\cos(0) = 4(0)(1) = 0$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 4\sin(\pi)\sin(0) = 4(0)(0) = 0$

$z = \rho \cos\phi = 4\cos(\pi) = 4(-1) = -4$

Thus, in cartesian coordinates, the point is:
$p(0, 0, -4)$.

---

⑤ $p(4, \frac{\pi}{2}, 0)$

$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 4\sin(0)\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 4\sin(0)\sin(\frac{\pi}{2}) = 0$

$z = \rho \cos\phi = 4\cos(0) = 4$

Thus, in cartesian coordinates, the point is:
$p(0, 0, 4)$

---

⑥ $p(\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

$x = \rho \sin\phi \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})\cos(3\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = \rho \sin\phi \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$z = \rho \cos\phi = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$

Thus, in cartesian coordinates, the point is:
$p(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

[2] Convert from rectangular to spherical Coordinates:

(1) $(2, 2, 2)$ (2) $(3, 0, -3)$ (3) $(1, \sqrt{3}, -2)$

(4) $(1, -1, \sqrt{2})$ (5) $(-5\sqrt{3}, 5, 0)$ (6) $(-1, -\sqrt{3}, -2)$

solu: (1) $p(2, 2, 2)$

$\because \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2+(2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ (θ ∈ الربع الأول)

and:

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4+4}}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{2})$

حيث ϕ ∈ الربع الأول.

Thus, in spherical coordinates, the point is:

$p\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \tan^{-1}(\sqrt{2})\right)$

---

(2) $p(3, 0, -3)$

$\because \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{9+0+9} = 3\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(0) = 0$ (θ ∈ الربع الأول)

and:

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-3}\right) = \tan^{-1}(-1)$

وحيث أنه ϕ ∈ الربع الثاني

$\therefore \phi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Thus, in spherical coordinates, the point is:

$p\left(3\sqrt{2}, 0, \frac{3\pi}{4}\right)$.

---

(3) $p(1, \sqrt{3}, -2)$

$\because \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3})$ (θ ∈ الربع الأول)

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

and:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+3}}{-2}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

وحيث ϕ في الربع الثاني .

$$\therefore \phi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} .$$

Thus, in spherical Coordinates, the point is:

$P\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

---

④ $P(1, -1, \sqrt{2})$

$$\because \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\& \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

وحيث θ في الربع الرابع

$$\therefore \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

and:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}(1)$$

وحيث ϕ في الربع الأول فتكون : $\phi = \frac{\pi}{4}$

Thus, in spherical coordinates, the point is:

$P\left(2, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$

---

⑤ $P(-5\sqrt{3}, 5, 0)$

$$\because \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2+(5)^2+(0)^2} = 10$$

$$\& \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وحيث θ في الربع الثاني

$$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} .$$

and:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

وحيث أن: $z=0$ فإن : $\phi = \frac{\pi}{2}$

Thus, in spherical coordinates, the point is:
$p(10, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

---

⑥ $p(-1, -\sqrt{3}, -2)$

$\because \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{-1}) = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

وحيث أن θ في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

and:

$\phi = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}) = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}}{-2}) = \tan^{-1}(-1)$

وحيث أن ϕ في الربع الثاني

$\therefore \phi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Thus, in spherical coordinates, the point is:
$p(2\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$

---

3 In exercises 1 – 6, Convert the equation into spherical coordinates:

① $x^2+y^2+z^2=9$ ② $x=y$ ③ $z=2$

④ $z^2=x^2-y^2$ ⑤ $z^2=x^2+y^2$ ⑥ $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

sol: ① $\because x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho=3$ (or: $\rho=-3$)

---

② $x=y \Rightarrow \rho\sin\phi\cos\theta = \rho\sin\phi\sin\theta \Rightarrow \cos\theta=\sin\theta$

$\therefore \cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}-\theta \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

حيث $\rho=0$ أو $\phi=0$ تقع ضمن المعادلة $\theta=\frac{\pi}{4}$.

---

③ $z=2 \Rightarrow \rho\cos\phi = 2 \Rightarrow \rho = 2\sec\phi$.

---

④ $z^2=x^2-y^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta$

$\therefore \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$\therefore \cot^2\phi = \cos 2\theta \Rightarrow \cot^2\phi - \cos 2\theta = 0.$

حيث $\rho = 0$ تمثل نقطة الأصل وهي واقعة على المنحنى $\cot^2\phi - \cos 2\theta = 0$

⑤ $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta$

$\therefore \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\therefore \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi \Rightarrow \cos^2\phi = \sin^2\phi \quad or: \rho = 0$

$\therefore \cos^2\phi - \sin^2\phi = 0 \Rightarrow \cos 2\phi = 0 \Rightarrow 2\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

حيث $\rho = 0$ يقع على منحنى المعادلة — فتكون المعادلة هي

⑥ $z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \Rightarrow \rho\cos\phi = \sqrt{3\rho^2\sin^2\phi[\cos^2\theta + \sin^2\theta]}$

$\therefore \rho\cos\phi = \sqrt{3\rho^2\sin^2\phi} \Rightarrow \rho\cos\phi = \sqrt{3}\rho\sin\phi$

$\rho[\cos\phi - \sqrt{3}\sin\phi] = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad or \quad \cos\phi - \sqrt{3}\sin\phi = 0$

$\therefore \cos\phi - \tan\frac{\pi}{3}.\sin\phi = 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos\phi - \sin\frac{\pi}{3}\sin\phi = 0 \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3}+\phi) = 0$

$\therefore \cos(\frac{\pi}{3}+\phi) = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}$

وحيث أن $\rho = 0$ تمثل نقطة الأصل وتقع على المعادلة $\phi = \frac{\pi}{6}$

فتكون المعادلة هي : $\phi = \frac{\pi}{6}$

$\boxed{4}$ In exercises 1-4, convert the equation into rectangular coordinates:

① $\rho^2\sin^2\phi\cos 2\theta = 4$ ② $\rho = 5$

③ $\phi = \frac{\pi}{4}$ ④ $\rho = 4\cos\phi$

solu: ① $\because \rho^2\sin^2\phi\cos 2\theta = 4 \Rightarrow \rho^2\sin^2\phi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 4$

$\therefore \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta = 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4.$

② $\rho = 5 \Rightarrow \rho^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25$

③ $\phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = 1 \Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}.$

④ $\rho = 4\cos\phi \Rightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\phi \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

EXERCISES (2-3)

[1] In exercises 1-6, convert the spherical point (ρ, θ, ϕ) into rectangular coordinates:

1. $(3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$
2. $(4, \frac{\pi}{2}, \pi)$
3. $(6, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$
4. $(1, -\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$
5. $(2, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$
6. $(5, \frac{3\pi}{2}, 0)$

[2] In exercises 1-9, Convert the rectangular point (x, y, z) into spherical coordinates:

1. $(1, 1, \sqrt{2})$
2. $(1, -1, \sqrt{2})$
3. $(1, 1, -\sqrt{2})$
4. $(-1, 1, \sqrt{2})$
5. $(-1, -1, \sqrt{2})$
6. $(-1, 1, -\sqrt{2})$
7. $(1, -1, -\sqrt{2})$
8. $(1, \sqrt{3}, 0)$
9. $(0, 4, 0)$

[3] In exercises 1-6, convert the equation into spherical coordinates:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 8$
2. $x + y + z = 0$
3. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$
4. $z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$
5. $x^2 + y^2 = 9$
6. $z = 0$

[4] In exercises 1-8, Convert the equation into rectangular coordinates:

1. $\phi = \frac{2\pi}{3}$
2. $\rho = 4$
3. $\rho^2 + 8\rho^2 \cos^2\phi = 9$
4. $\cos 2\phi = 0$
5. $\rho \sin\phi = 2\cos\theta$
6. $\rho = 5 \sec\phi$.
7. $\theta = \frac{\pi}{4}$
8. $\rho \tan\phi = \csc\phi$.

3: الدوال متعددة المتغيرات
functions of several variables.

توجد الكثير من الكميات التي تعتمد في قيمها على كمية أو كميات أخرى مثل تلك الكميات تسمى متغيرات تابعة بينما الكميات التي تعتمد عليها تسمى متغيرات مستقلة.
و يكون المتغير التابع دالة اذا كان وحيد القيمة.
و بحسب عدد المتغيرات المستقلة في الدالة تسمى الدالة بمتغير واحد أو دالة بمتغيرين أو ثلاثة متغيرات الخ ...... وهكذا.

أمثلة :

١- مساحة المربع (A) كمية تعتمد على طول ضلعه x.
وحيث أن لكل قيمة لـ x توجد قيمة وحيدة لـ A فإن A دالة متغيرها المستقل x و نكتب : $A = f(x) = x^2$

2- مساحة الدائرة (A) هي متغير تابع (دالة) في المتغير المستقل r (r هو نصف قطر الدائرة).

$$\therefore A = f(r) = \pi r^2$$

3- مساحة المستطيل (A) هي دالة بمتغيرين مستقلين x و y (بعدي المستطيل) حيث $A = f(x, y) = xy$
أي أن A متغير تابع وحيد القيمة في المتغيرين المستقلين x و y.

4- حجم متوازي المستطيلات (v) هو دالة (متغير تابع وحيد القيمة) في ثلاثة متغيرات مستقلة هي أبعاد متوازي المستطيلات: الطول x والعرض y و الارتفاع z.

$$\therefore v = f(x, y, z) = xyz.$$

5- حجم الغاز (v) يتناسب طردياً مع درجة حرارته المطلقة (t) وعكسياً مع ضغطه (p).
أي أن (v) دالة في المتغيرين المستقلين t و p :

$$\therefore v = K\frac{t}{p} \quad ; K \text{ is Const.}$$

و سوف نهتم في هذا الفصل بدراسة مجال الدوال بمتغيرين مستقلين مع التعرض وبشكل طفيف لمدى هذه الدوال وأشكالها البيانية.

1-3 : الدوال بمتغيرين. functions of two variables.

تعريف(1): يُقال أن z دالة بالمتغيرين المستقلين x و y اذا كان لكل زوج (x,y) من قيم المتغيرين x و y الحقيقية توجد قيمة حقيقية وحيدة لـ z.

ونكتب : $z = f(x,y)$

تعريف(2): مجال الدالة $z = f(x,y)$: Domain of $f(x,y)$

هي مجموعة كل النقاط (x,y) التي تجعل للدالة $z=f(x,y)$ قيمة حقيقية.

$$\therefore D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} ; z = f(x,y) \in \mathbb{R}\}$$

ملاحظة: ① $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ② $D \subseteq \mathbb{R}^2$

تعريف(3): مدى الدالة $z = f(x,y)$ Range of $f(x,y)$

هي مجموعة جميع قيم z الحقيقية المقابلة لجميع النقاط (x,y) من المجال D_f.

$$\therefore R = \{z : z \in \mathbb{R} ; z = f(x,y) \in D_f\}.$$

Examples:

(I) If: $f(x,y) = z = 2x^2 + y^2 + 7$

(i) Find the domain of $f(x,y)$

(ii) Find the range of z

(iii) Compute: $f(0,0)$ & $f(-1,2)$ & $f(3,5)$, $f(0,-1)$

solu(i) الدالة مُعرفة لجميع النقاط (x,y) من $\mathbb{R}^2$ (أي المستوى xy)

$$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

(ii) $\because x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

and $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$,

$\therefore 2x^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\therefore 2x^2 + y^2 + 7 \geq 7 \Rightarrow z \geq 7$

$\therefore R = \{z : z \in \mathbb{R} ; z \geq 7\} = [7, \infty[$

(iii) $f(0,0) = 2(0) + 0 + 7 = 7$

$f(-1,2) = 2(-1)^2 + (2)^2 + 7 = 13$

$f(3,5) = 2(3)^2 + (5)^2 + 7 = 50$

$f(0,-1) = 2(0) + (-1)^2 + 7 = 8$

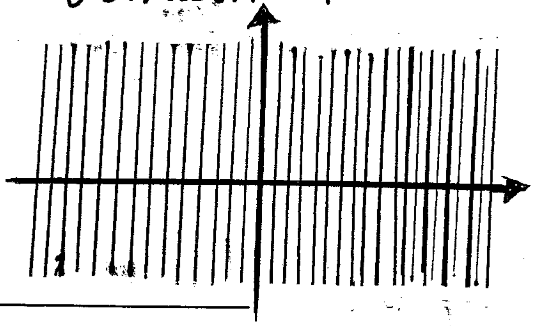
---

2 In problems (1 – 28) Find the domain :

① $f(x,y) = y^2 - x^2 - 2xy + 3$

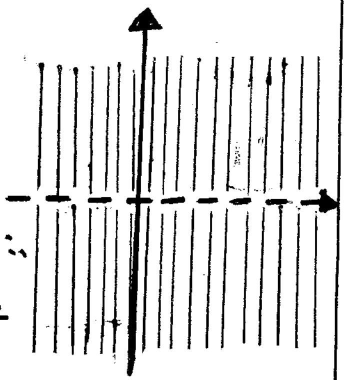
solu:

$D = \mathbb{R}^2$



---

② $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$



solu: الدالة مُعرفة لجميع النقاط (x,y) حيث: $y \neq 0$

وحيث أن $y = 0$ هي معادلة المحور X.

∴ مجال الدالة هو جميع النقاط (x,y) في المستوى XY

عدا تلك النقاط الواقعة على المحور X

(المجال هو المنطقة المظللة في الشكل).

$\therefore D = \{ (x,y) : (x,y) \in \mathbb{R} \;;\; y \neq 0 \}$

---

③ $f(x,y) = \dfrac{5x + y^2 - 3}{x - y}$

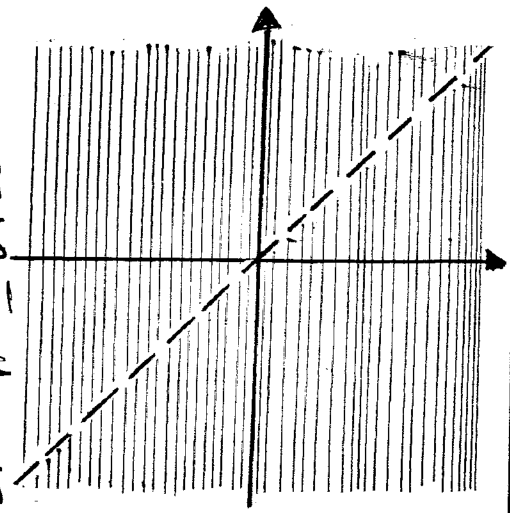
solu: الدالة مُعرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوي XY بحيث:

$x - y \neq 0$

وحيث أن: $x - y = 0$

هي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل منصفاً للربعين الأول والثالث.

فيكون مجال الدالة هو جميع النقاط (x,y) في المستوي XY باستثناء تلك النقاط الواقعة على المستقيم: $x - y = 0$ (انظر الشكل)



$\therefore D = \{ (x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x - y \neq 0 \}$

---

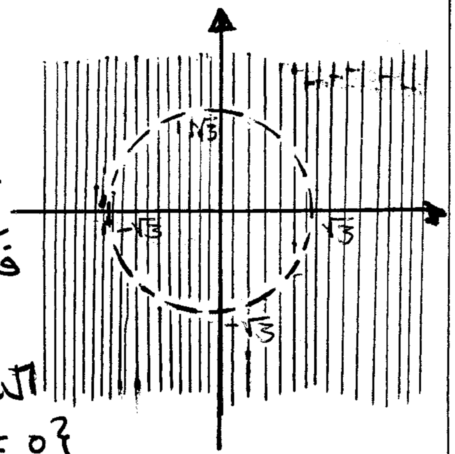
④ $f(x,y) = \dfrac{5x + y}{x^2 + y^2 - 3}$

الدالة f مُعرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوي XY بحيث: solu:

$$x^2+y^2-3\neq 0$$

وحيث أن: $x^2+y^2-3=0 \Rightarrow x^2+y^2=3$

هي مُعادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$.



فيكون مجال الدالة هو جميع النقاط (x,y) في المستوي XY باستثناء تلك النقاط الواقعة على محيط الدائرة $x^2+y^2=3$ (انظر الشكل)

$$\therefore D=\{(x,y): (x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2+y^2-3\neq 0\}$$

---

⑤ $f(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+y^2+3}$

solu: $\because x^2+y^2+3\neq 0 \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\therefore$ الدالة مُعرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوي XY.

i.e: $D=\mathbb{R}^2$.

---

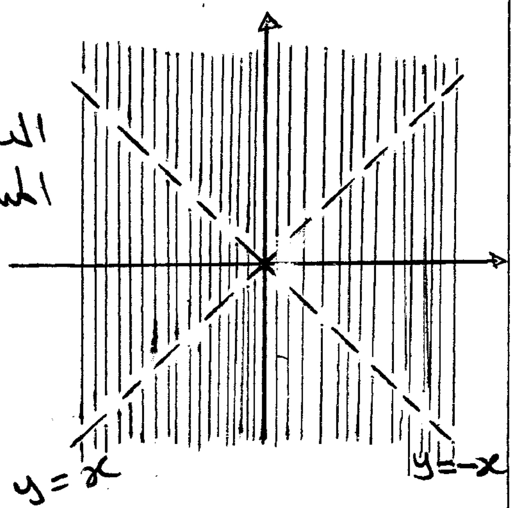
⑥ $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

solu: الدالة f مُعرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوي XY بحيث $x^2-y^2\neq 0$

وحيث أن: $x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2=y^2$

$\therefore y=\pm x$

مُعادلتي مستقيمين مُتقاطعين عند نقطة الأصل (كما بالشكل)



فإن مجال الدالة هو جميع النقاط (x,y) في المستوي ماعدا تلك النقاط الواقعة على المستقيمين $y=\pm x$

$$\therefore D=\{(x,y): (x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x\neq\pm y\}.$$

---

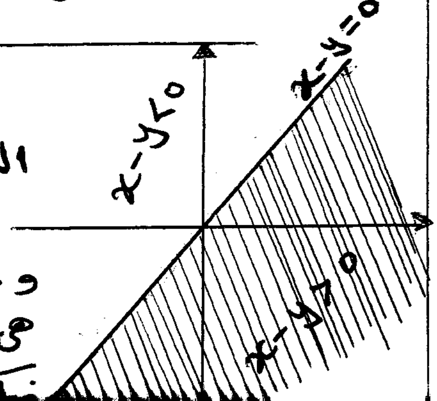
⑦ $f(x,y)=\sqrt{x-y}$

solu: الدالة مُعرفة لجميع النقاط (x,y) التي تحقق:

$$x-y\geq 0$$

وحيث أن: $x-y=0 \Rightarrow x=y$

هي معادلة مُنصف الربعين الأول والثالث



الواقعة على وتحت المستقيم $x=y$.

$$\therefore D=\{(x,y):\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x-y\geq 0\}.$$

---

⑧ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

solu: الدالة f معرفة لجميع النقاط (x,y) من $\mathbb{R}^2$ التي تحقق

$x^2+y^2\geq 0$

وحيث أن: $x^2+y^2\geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

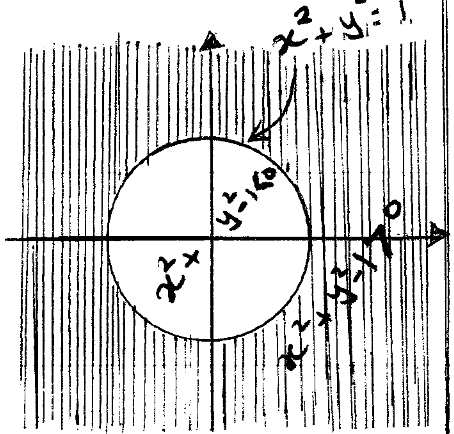
فيكون مجال الدالة f هو $\mathbb{R}^2$

$$\therefore D=\mathbb{R}^2.$$

---

⑨ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

solu:



الدالة f معرفة لجميع النقاط (x,y) من المستوى XY

التي تحقق: $x^2+y^2-1\geq 0$

وحيث أن: $x^2+y^2-1=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$

هي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها

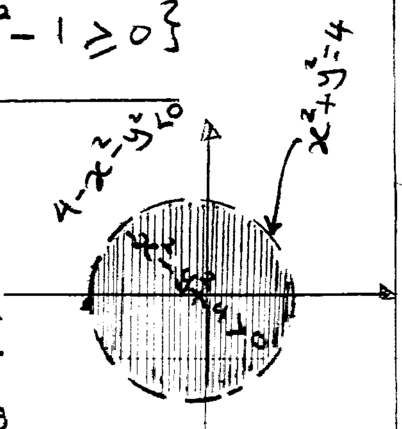
$r=1$

فيكون مجال الدالة هو جميع النقاط (x,y) من $\mathbb{R}^2$ الواقعة على محيط وخارج الدائرة $x^2+y^2=1$ (المنطقة المظللة في الشكل).

$$\therefore D=\{(x,y):\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2-1\geq 0\}$$

---

⑩ $f(x,y)=\dfrac{3x-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$



الدالة f معرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوى XY التي تحقق: $4-x^2-y^2>0$

وحيث أن: $4-x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$

هي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$

فيكون مجال الدالة جميع النقاط (x,y) في المستوى XY الواقعة داخل الدائرة $x^2+y^2=4$ (المنطقة المظللة بالشكل)

$$\therefore D=\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4-x^2-y^2>0\}$$

⑪ $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$

solu: مجال البسط = $\mathbb{R}^2$

مجال المقام ($\sqrt{4+x^2+y^2}$):

معرفة لجميع النقاط (x,y) التي تحقق $4+x^2+y^2 > 0$

وحيث أن: $4+x^2+y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(لاحظ أن: $4+x^2+y^2 \neq 0$)

$\therefore$ مجال الدالة: $D = \mathbb{R}^2$.

---

⑫ $f(x,y) = e^{5x-y^2+1}$

solu: $D = \mathbb{R}^2$ (لماذا؟)

---

⑬ $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3x^2+4y^2-12}}{x+y}$

solu: $\because$ مجال المقام: $\mathbb{R}^2$

ومجال البسط: جميع النقاط (x,y) في المستوى XY

التي تحقق: $3x^2+4y^2-12 \geq 0$

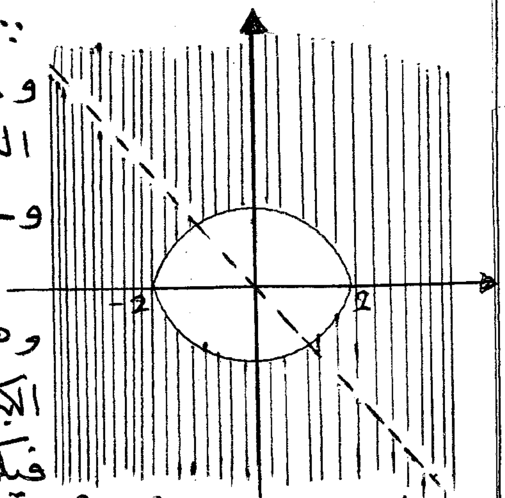
وحيث أن: $3x^2+4y^2-12 = 0$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ ومحوره

الكبير على المحور x رأسيه عند النقطتين $(\pm 2, 0)$

فيكون مجال البسط جميع النقاط الواقعة على وخارج



القطع الناقص $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

أصفار المقام: $\because x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

هي معادلة منصف الربعين الثاني والرابع.

فيكون مجال الدالة جميع النقاط (x,y) من المستوي الواقعة على وخارج

القطع الناقص $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ باستثناء النقاط الواقعة على المستقيم $y=-x$

(انظر الشكل)

$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 3x^2+4y^2-12 \geq 0 ;\ y \neq -x\}$

(14) $f(x,y) = e^{xy} + \ln xy$

solu:

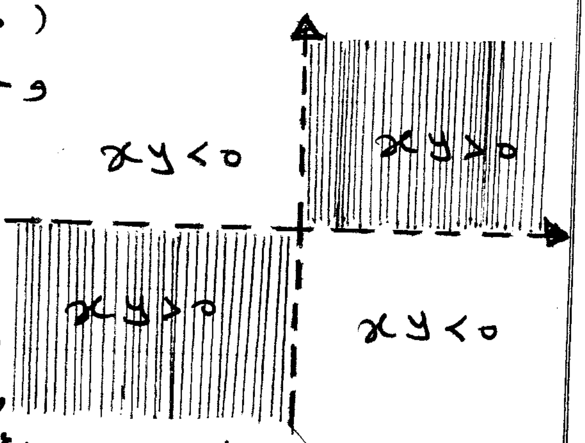
$\because$ مجال الدالة e^{xy} هو $\mathbb{R}^2$

ومجال الدالة $\ln xy$ جميع النقاط (x,y) في المستوي XY التي تحقق: $xy > 0$ (محققة في الربعين الأول والثالث)

وحيث أن: $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ (Y-axis)

or: $y = 0$ (X-axis)

$\therefore$ مجال هذه الدالة جميع النقاط الواقعة في الربعين الثالث والأول باستثناء النقاط على المحورين وبالتالي مجال الدالة f هو تقاطع مجالي الدالتين وعليه فإن مجال f. جميع النقاط (x,y) من المستوي XY الواقعة في الربعين الأول والثالث باستثناء النقاط الواقعة على المحورين الاحداثيين.



$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; xy > 0\}$

---

(15) $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{x-5}$

solu:

$\because$ مجال الدالة f = مجال دالة البسط $\cap$ مجال دالة المقام $-$ {أصفار المقام}.

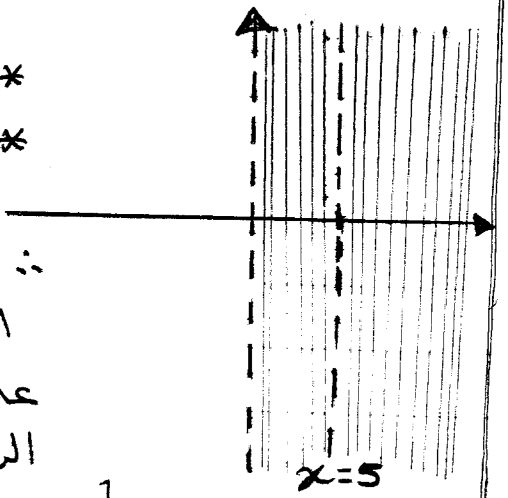
* أصفار المقام: $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

جميع النقاط الواقعة على المستقيم $x = 5$

* مجال المقام: $\mathbb{R}^2$

* مجال البسط: جميع النقاط (x,y) التي تحقق: $x > 0$ (جميع النقاط على يمين المحور Y)

$\therefore$ مجال الدالة جميع النقاط (x,y) في المستوي XY الواقعة (على يمين محور Y) في الربعين الأول والرابع عدا تلك النقاط الواقعة على المحور Y وعلى المستقيم الرأسي $x=5$



$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 , x > 0 \ \& \ x \neq \}$

---

(16) $f(x,y) = \dfrac{x}{\ln y}$

(19) $f(x,y) = \dfrac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

solu: مجال الدالة هو جميع النقاط (x,y) التي تحقق :

$9-x^2-y^2>0$ and $x^2+y^2-4>0$

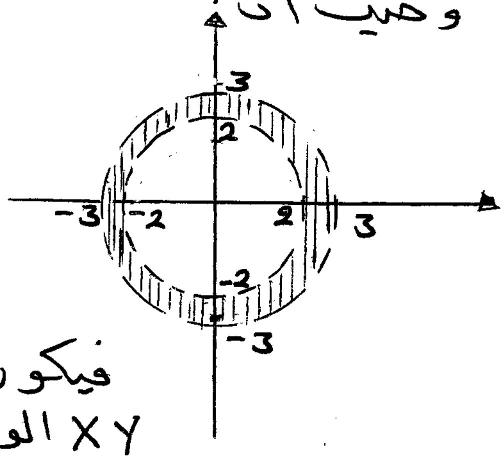
وحيث أن

$9-x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=9$

هي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=3$.

والمعادلة : $x^2+y^2-4=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$

هي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$.



فيكون مجال الدالة f جميع النقاط (x,y) في المستوى XY الواقعة في القرص الدائري المحصور بين الدائرتين $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=9$ (المنطقة المظللة في الشكل)

$$\therefore D = \{(x,y) : (x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2+y^2-4>0 \wedge 9-x^2-y^2>0\}$$

---

(20) $f(x,y) = \cos xy$

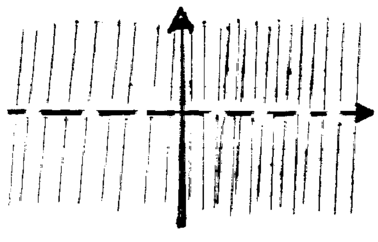
solu: $D = \mathbb{R}^2$

---

(21) $f(x,y) = \sinh\dfrac{x}{y}$

solu: الدالة معرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوى XY حيث $y \neq 0$

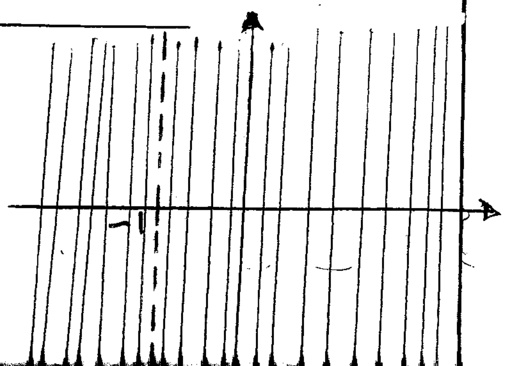
وحيث أن $y=0$ هي معادلة محور X فإن مجال الدالة جميع النقاط (x,y) في المستوي باستثناء النقاط الواقعة على المحور X .



$$\therefore D = \{(x,y) : (x,y)\in\mathbb{R}^2 , y\neq 0\}$$

---

(22) $f(x,y) = \sinh^{-1}\left(\dfrac{y}{x+1}\right)$



solu: الدالة معرفة لجميع النقاط (x,y) في المستوي باستثناء النقاط الواقعة على المستقيم $x=-1$

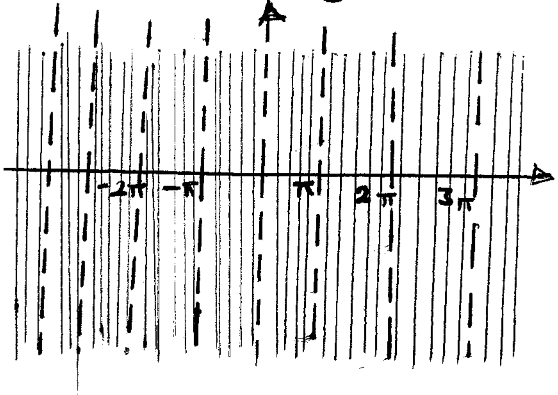
$$\therefore D = \{(x,y) : (x,y)\in\mathbb{R}^2 , x \neq -1\}$$

(23) $f(x,y) = \dfrac{\cosh(x+y)}{\sin x}$

solu: مجال الدالة جميع النقاط (x,y) في المستوي XY باستثناء النقاط الواقعة على مجموعة المستقيمات المتوازية:

$x : x = k\pi \quad ; k \in I$

$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \neq k\pi \,;\, k \in I\}$

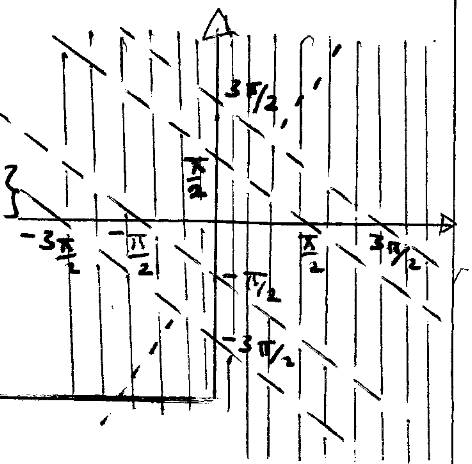


(24) $f(x,y) = \tan(x+y)$

مجال الدالة جميع النقاط (x,y) في المستوي XY باستثناء النقاط الواقعة على مجموعة المستقيمات المتوازية

$x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; k \in I$

$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in I\}$



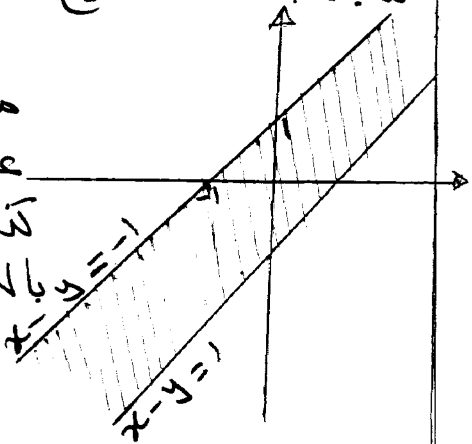
(25) $f(x,y) = \cos^{-1}(x-y)$

solu: مجال الدالة جميع النقاط (x,y) في المستوي XY التي تحقق

$-1 \leq x - y \leq 1$

$\therefore x - y = -1$ معادلة مستقيم يقطع المحورين عند $(-1,0)$ و $(0,1)$.

كذلك المعادلة $x - y = 1$ هي معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $(0,-1)$ و $(1,0)$



$\therefore$ مجال الدالة جميع النقاط الواقعة في المستوي بين المستقيمين المتوازيين $x-y=\pm 1$ وعليهما.

$\therefore D = \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\, -1 \leq x - y \leq 1\}$

(26) $f(x,y) = \ln(1-xy)$

2-3 : الصورة الهندسية لدالة بمتغيرين

الصورة الهندسية لدالة بمتغيرين $Z=f(x,y)$ هو سطح يتكون من مجموعة كل النقاط (x,y,z) في R^3 التي تحقق المعادلة : $Z-f(x,y)=0$

Examples:

In problems (1 to 7) sketch the graph of the given function:

① $Z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$

solu:

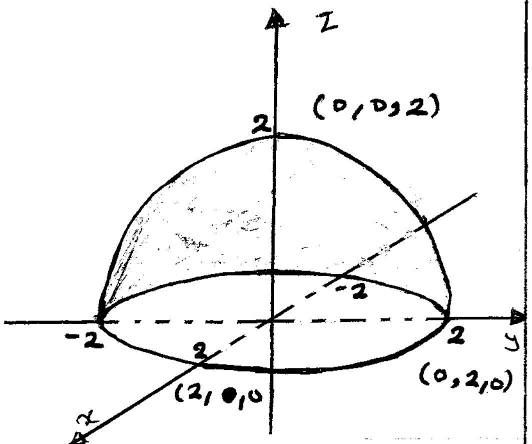
$\because Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ $(Z\geq 0)$

وحيث أن : المعادلة : $Z^2=4-x^2-y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+Z^2=4$

هي معادلة كرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$

وحيث أن $Z\geq 0$ فإن الصورة الهندسية للدالة $Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ هو النصف العلوي للكرة $Z^2+x^2+y^2=4$



② $Z=x^2+y^2$

solu: $\because Z=x^2+y^2\Rightarrow Z-x^2-y^2=0$

لاحظ أن :

. نقاط تقاطع السطح مع المحاور :

$(0,0,0)$

. تقاطع السطح مع المستوي XY : $(Z=0)$

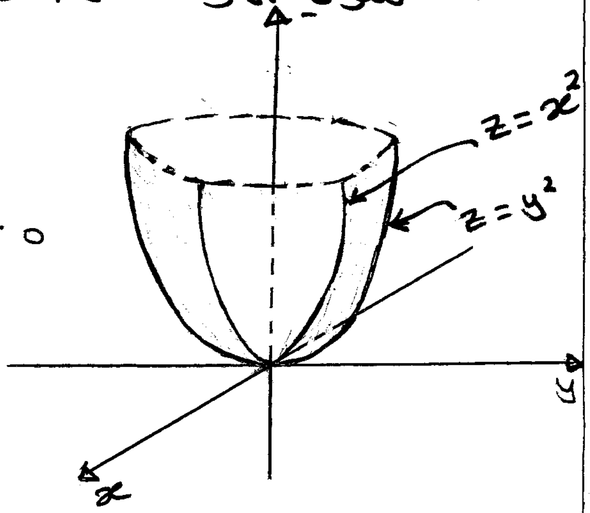
$x^2+y^2=0$ [النقطة $(0,0)$]

. تقاطع السطح مع المستوي XZ : $(y=0)$

هو القطع المكافئ : $Z=x^2$

. تقاطع السطح مع المستوي ZY : $(x=0)$

هو القطع المكافئ : $Z=y^2$



③ $z = 6 - 2x - 3y$

solu: $\because z = 6 - 2x - 3y \Rightarrow z + 2x + 3y - 6 = 0$

هي سطح مستوي في $\mathbb{R}^3$ " المعادلة معادلة مستوي في الفضاء الثلاثي)

ونلاحظ:

. التقاطع مع المحاور الثلاثة:

$(3, 0, 0)$ و $(0, 2, 0)$ و $(0, 0, 6)$

. تقاطع السطح مع المستوى XY $(z = 0)$

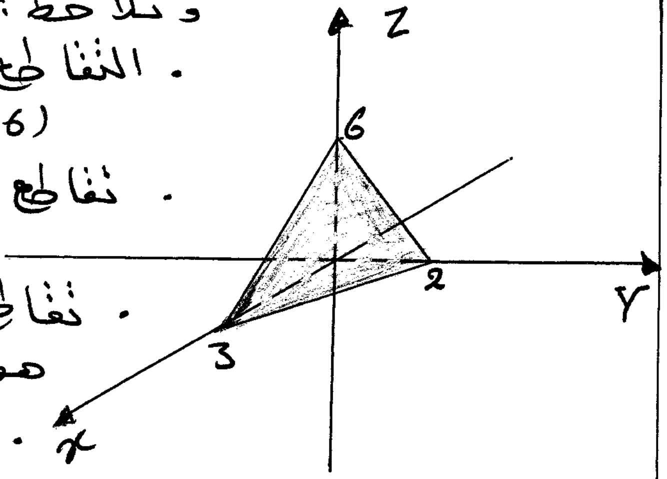
هو المستقيم: $2x + 3y - 6 = 0$

. تقاطع السطح مع المستوى XZ: $(y = 0)$

هو المستقيم: $z + 2x - 6 = 0$

. تقاطع السطح مع المستوى YZ: $(x = 0)$

هو المستقيم: $z + 3y - 6$



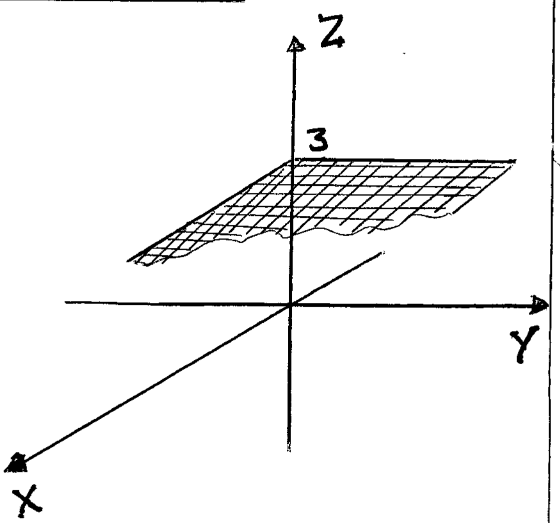
---

④ $f(x, y) = 3$

solu: $\therefore z = 3$

هي معادلة سطح مستوي يوازي المستوي

XY ويقطع المحور z عند: $(0, 0, 3)$



---

⑤ $f(x, y) = 3$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \le x \le 1 \text{ and } 0 \le y \le 1\}$

solu: $\because z = 3$; $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

هي معادلة سطح مستوي يوازي المستوي

XY

وحيث أن D هي منطقة مستطيلة الشكل في

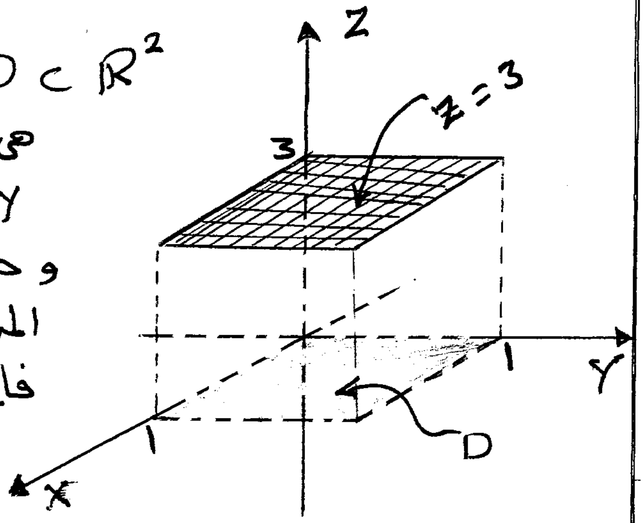
المستوى XY طولها (1) وعرضها (1)

فإن سطح الدالة $z = 3$ والتي مجالها D

هو سطح (السطح العلوي) لمتوازي

المستطيلات الذي طوله (1) وعرضه (1)

وارتفاعه (3) .

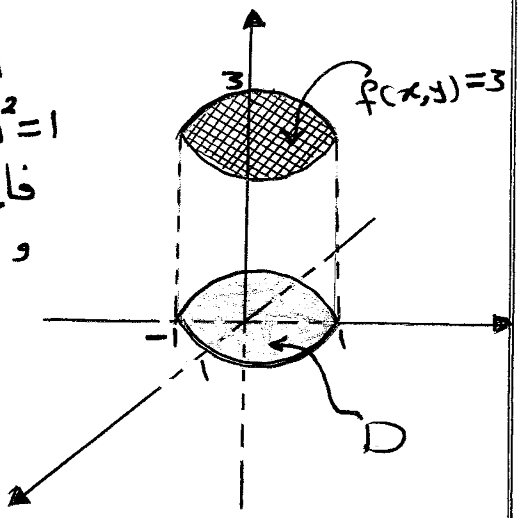


(6) $f(x,y) = 3 \quad ; \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

solu: $\because z = 3 \ ; \ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$\because$ المجال D هو مجموعة جميع النقاط (x,y) في المستوي XY الواقعه داخل وعلى محيط الدائرة $x^2+y^2=1$

فإن الدالة تمثل جزء سطح المستوي $z = 3$ والممثل للسطح العلوي لإسطوانه نصف قطرها (1) وارتفاعها (3).



Exercises (3-1)

[1] In problems (1 – 10) Find the domain and the range:

(1) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 5$

(2) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(3) $f(x, y) = \sqrt{5 - x - y}$

(4) $f(x, y) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 8}}$

(5) $f(x, y) = e^{3x + 2y - 5}$

(6) $f(x, y) = \sin^{-1}(x - y)$

(7) $f(x, y) = \cos(x - 3y^2 + 5)$

(8) $z = -5$

(9) $f(x, y) = xy$

(10) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1}$

[2] In problems (1 –) find the domain:

(1) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$

(2) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

(3) $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

(4) $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$

(5) $f(x, y) = \dfrac{5x}{x^2 + y^2 - 1}$

(6) $f(x, y) = \dfrac{6y - 1}{x^2 + y^2 + 1}$

(7) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

(8) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(9) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$

(10) $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$

(11) $f(x, y) = \dfrac{7xy}{\sqrt[3]{xy}}$

(12) $f(x, y) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y - 1}}$

(13) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}{x - 5}$

(14) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x - y}}{x + y}$

(15) $f(x, y) = \sin^2(x - y - 1)$

(16) $f(x, y) = \sinh\left(\dfrac{x}{x - y}\right)$

(17) $f(x, y) = \sin^{-1}(x^2 + y^2 - 2)$

(18) $f(x, y) = 3^{x^2 + y^2 - 5}$

(19) $f(x, y) = e^{x/y}$

(20) $f(x, y) = 5^{\sqrt{xy}}$

(21) $f(x, y) = (\;)^{\ln x}$

(22) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$

Exercises (3–1)

[1] In problems (1 – 10) Find the domain and the range:

(1) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 5$

(2) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{5 - x - y}$

(4) $f(x,y) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 8}}$

(5) $f(x,y) = e^{3x + 2y - 5}$

(6) $f(x,y) = \sin^{-1}(x - y)$

(7) $f(x,y) = \cos(x - 3y^2 + 5)$

(8) $z = -5$

(9) $f(x,y) = xy$

(10) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1}$

[2] In problems (1 –) find the domain:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

(4) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$

(5) $f(x,y) = \dfrac{5x}{x^2 + y^2 - 1}$

(6) $f(x,y) = \dfrac{6y - 1}{x^2 + y^2 + 1}$

(7) $f(x,y) = \sqrt{x + y}$

(8) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(9) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$

(10) $f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$

(11) $f(x,y) = \dfrac{7xy}{\sqrt[3]{xy}}$

(12) $f(x,y) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y - 1}}$

(13) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}{x - 5}$

(14) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x - y}}{x + y}$

(15) $f(x,y) = \sin^2(x - y - 1)$

(16) $f(x,y) = \sinh\left(\dfrac{x}{x - y}\right)$

(17) $f(x,y) = \sin^{-1}(x^2 + y^2 - 2)$

(18) $f(x,y) = 3^{x^2 + y^2 - 5}$

(19) $f(x,y) = e^{x/y}$

(20) $f(x,y) = 5^{\sqrt{xy}}$

(21) $f(x,y) = (\;)^{\ln x}$

(22) $f(x,y) = \ln(x^2 y^2)$

(23) $f(x,y)=\dfrac{-3}{\ln(x-y)}$

(24) $f(x,y)=\sqrt{4-y^2}$

(25) $f(x,y)=\dfrac{xy}{\ln(4-x^2)}$

(26) $f(x,y)=\dfrac{\ln(9-x^2-y^2)}{x^2+y^2-2}$

(27) $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)-\sqrt{x-y}$

(28) $f(x,y)=xy+e^{x-y}-x\sin^{-1}y$.

(29) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{\ln(4-x^2)}$

(30) $f(x,y)=y\sqrt{\sin x}$

(31) $f(x,y)=\sqrt{e^{x}+e^{-y}}$

(32) $f(x,y)=\sqrt{e^{x}-e^{-y}}$

(33) $f(x,y)=\sec y$

(34) $f(x,y)=\csc(x+y)$

(35) $f(x,y)=\sqrt{\ln(4-x^2-y^2)}$

(36) $z=\ln\sqrt{4-x^2-y^2}$

(37) $f(x,y)=\tan^{-1}x-\cos^{-1}y$

(38) $f(x,y)=\cosh^{-1}x+\cos y$

(39) $f(x,y)=\dfrac{\cosh xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(40) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{xy}}$

(41) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-(y+2)^2}$

(42) $f(x,y)=\sqrt{x-y}-\sqrt{y-x}$

In problems (1 to 8) sketch the graph of the given function:

(1) $f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$

(2) $f(x,y)=5$

(3) $f(x,y)=4-x^2-y^2$

(4) $f(x,y)=$

(5) $f(x,y)=4$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -2\le x\le 1 \wedge |x|\le 2\}$

(6) $f(x,y)=7$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}y^2\le 1\}$

(7) $f(x,y)=7$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 3x^2+3y^2\le 1\}$

(8) $f(x,y)=5$; $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;$ [illegible]