تأليف و إعداد: زيان الجيلالي

السنة الثانية ثانوي

المتتاليات

50 تمرين محلولة

u_3

$\forall n \in N \quad u_{(n+1)} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow$ متتالية متزايدة (u_n)

r^2

$\forall n \in N^* \quad f_n = \sum_{h=1}^{h=n} u_h$

$$\begin{cases} a \times b \times c = -27 \\ a + b + c = -13 \end{cases}$$

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + u_{100}$

شعب: العلوم التجريبية ، رياضيات ، تقني رياضي

- دروس في المتتاليات العددية،الحسابية، الهندسية وفق المقرر الجديد
- كــل فكرة يتبعهــا مثال (أكثر من 30 مثال) ، تطبيق ، تمرين شامل
- ملحق تطبيقي بواسطة برنامج *Excel*
- أكثر من 50 تمرين محلولة بالتفصيل
- ملخص للمتتاليات العددية ، الحسابية ، الهندسية

الطبعة الأولى

كتاب: المـــتتـــــاليات مقرر جديد

المستوى: سنة الثانية ثانوي دولة الجزائر

الشعب: علوم تجريبية ، رياضيات، تقني رياضي

المضمون: دروس في المتتاليات العددية ، الحسابية ،الهندسية

ملحق تطبيقي بواسطة برنامج $Excel$ ، ملخص

عدد التمارينات: أكثر من 50 تمرين محلولة

إعداد وتأليف: **الاستاذ زيان الجيلا لي**

الطبعة الأولى: **2004 م**

تصميم **EjipE**

عنوان المؤلف: **ZIAJIA2012@YAHOO.FR**

دائرة عين الحجل – ولاية المسيلة – دولة الجزائر

I- المتتاليات العددية

1- تعريف متتالية

2- توليد (تحديد) متتالية

2-1 - متتالية معرفة بإعطاء حدّها العام

2-2 - متتالية معرفة بإعطاء علاقة تراجعية

3- اتجاه تغير متتالية عددية

4- التمثيل البياني لمتتالية عددية

5- نهاية متتالية

5-1- متتالية عددية متقاربة

5-2 - نهاية متتالية مرفقة بدالة

5-3 - نهاية غير منتهية لمتتالية عددية

5 -4- نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

I- المتتاليات العددية

1- تعريف متتالية

متتالية عددية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

u: هو رمز المتتالية n: الدليل (دليل الحد $u(n)$) $u(n)$: صورة الدليل n

تعريف أخر

نسمي متتالية (متوالية) عددية u كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية N في مجموعة الأعداد الحقيقية R.

$$\begin{aligned} u :\ & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \longmapsto u(n) \end{aligned}$$

ترميز

نرمز إلى صورة العدد الطبيعي n بـــ u_n بدلا من الرمز $u(n)$ ونسمي u_n عندئذ بالحد العام للمتتالية.

ونرمز إلى رمز المتتالية بالرمز (u_n) بدلا من الرمز u.

نسمي u_1، u_2، u_3، .... بحدود المتتالية.

ملاحظة

يمكن أن نرمز للمتتالية بالرمز (y_n)، (x_n)، (v_n)، (w_n)

يمكن أن نرمز للمتتالية بالشكل (u_n) أو بالرمز $(u_n)_{\forall n \in N}$

أمثلة

1- المتتالية $u_n=6n^3-8$ معرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية N.

2- المتتالية $u_n=\frac{5}{n}$ معرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية N^* .

3- المتتالية $u_n=\frac{n+5}{n-1}$ معرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية $N-\{1\}$.

2- توليد (تحديد)متتالية

وهي الطريقة التي تمكننا من حساب أي حدّ من حدود هذه المتتالية u_1، u_2، u_3، ....

وهناك عدة طرق لتحديد حدود هذه المتتالية منها:

2-1 – متتالية معرفة بإعطاء حدّها العام

في هذه الحالة يمكننا حساب أي حدّ من حدود المتتالية إنطلاقا من علاقة يُعبر عنها بـــ u_n بدلالة n و التي تسمى بعبارة الحد العام .

مثال

عبارة الحد العام للمتتالية عددية معرفة كمايلي $\forall n \in N\ u_n = n+1$

1- أحسب u_1، u_2، u_3

2- أكتب بدلالة n الحد $u_{(3n+1)}$

الحل

1- حساب الحدود

$n=1\ \ u_1 = 1+1=2\ ;\ n=2\ \ u_2 = 2+1=3\ ;\ n=3\ \ u_3 = 3+1=4$

2- عبارة $u_{(3n+1)}$

$n=3n+1\ \ \ u_{(3n+1)} = (3n+1)+1=3n+2$

2-2 – متتالية معرفة بإعطاء علاقة تراجعية

في هذه الحالة يُحسب أي حدّ من حدود المتتالية بالرجوع إلى حدّ سبقت معرفة

مثال

تعطى علاقة تراجعية لمتتالية عددية (u_n) كمايلي

$$\begin{cases} u_1=1 \\ \forall n \in N^*\ \ u_{(n+1)} = u_n +1 \end{cases}$$

أحسب u_2، u_3

$n=1\ \ u_2 = u_1+1=1+1=2\ ;\ \ n=2\ \ u_3 = u_2+1=2+1=3$

3- اتجاه تغير متتالية عددية

كما يطلق عليها في الدوال العددية باتجاه التغير، للبرهان على أن (u_n) متتالية متزايدة أو متناقصة أو ثابتة نتبع إحدى الطرق التالية:

الطريقة الأولى

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في N ، ولدراسة تغيرات متتالية نتبع الخطوات التالية

1 – نحسب الحد $u_{(n+1)}$

2– نحسب الفرق $u_{(n+1)}-u_n$

3– معرفة من أجل كل عدد طبيعي n إشارة الفرق $u_{(n+1)}-u_n$:

(u_n) متتالية متزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n \geq 0$

(u_n) متتالية متناقصة $\Leftrightarrow$ $\forall n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n \leq 0$

(u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\in N \quad u_{(n+1)}=u_n$

مثال 1

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها العام

$$\forall n \in N \quad u_n= n+2$$

أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

1– حساب الحدّ $u_{(n+1)}$

لدينا

$u_n= n+2$

(نستبدل (n) بـ $(n+1)$)

$u_{(n+1)}=(n+1)+2=n+3$

2– حساب المقدار $u_{(n+1)}-u_n$

$u_{(n+1)}-u_n = (n+3)-(n+2)=n+3-n-2=1$

3– معرفة إشارة الفرق $u_{(n+1)}-u_n$

$\forall n\in N \qquad u_{(n+1)}-u_n >0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة

مثال 2

(u_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التالية

$$\forall n\in N \quad u_{(n+1)}= u_n-2$$

حدّد اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

1– 2– حساب الفرق الحدّ $u_{(n+1)}-u_n$

لدينا $u_{(n+1)}= u_n-2$

ومنه $u_{(n+1)}- u_n =-2$ (نقل u_n إلى الطرف الثاني)

3- معرفة إشارة الفرق $u_{(n+1)}-u_n$

$\forall n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n<0$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

مثال 3

لتكن المتتالية العددية (u_n) و المعرفة كمايلي

$\forall n\in N \qquad u_n=5$

دراسة إشارة تغييرات المتتالية (u_n)

1- حساب $u_{(n+1)}$

$u_{(n+1)}=5$

2- حساب الفرق $u_{(n+1)}-u_n$

$u_{(n+1)}-u_n=5-5=0$

3- دراسة إشارة الفرق $u_{(n+1)}-u_n$

$\forall n\in N \qquad u_{(n+1)}-u_n=0$

إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

⇦ **الطريقة الثانية**

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في N ، ولدراسة تغيرات متتالية نتبع الخطوات التالية

1 – نحسب الحد $u_{(n+1)}$

2- نحسب حاصل قسمة $u_{(n+1)}/u_n$

3- معرفة من أجل كل عدد طبيعي n إشارة الحاصل $\dfrac{u_{(n+1)}}{u_n}$

(u_n) متتالية متزايدة $\Leftrightarrow \forall n\in N \quad \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n}>1$

(u_n) متتالية متناقصة $\Leftrightarrow \forall n\in N \quad \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n}<1$

(u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \forall n\in N \quad \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n}=1$

مثال

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها العام

$$\forall n \in N \quad u_n = 2^n$$

1- أحسب الحدّ $u_{(n+1)}$

2- أحسب حاصل قسمة $u_{(n+1)} / u_n$

3- استنتج إذن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

الحل

1- حساب الحدّ $u_{(n+1)}$

لدينا $u_n = 2^n$

من أجل $n+1$ نجد $u_{(n+1)} = 2^{n+1}$

2- حساب حاصل قسمة $u_{(n+1)} / u_n$

$$\frac{u_{(n+1)}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} = 2 > 1$$

3- استنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما أن $u_{(n+1)} / u_n > 1$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة.

الطريقة الثالثة

ندرس إتجاه تغيير الدالة f، بحيث $u_n = f(n)$.على المجال $[0,+\infty[$ ،إذا كانت الدالة f متزايدة، فإن (u_n) متزايدة.

مثال

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها العام

$$\forall n \in N \quad u_n = 2n^2+2n-5$$

أدرس إتجاه تغيير المتتالية (u_n)

الحل

المتتالية (u_n) معرفة بالشكل $u_n = f(n)$ ،حيث $f(x) = 2x^2+2x-5$

الدالة f معرفة على R.ومن أجل كل x من R ، $f'(x) = 4x+2$

وبدراسة إشارة $f'(x)$ ، نجد:

X	$-\infty$	-0.5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-5,5$	↗

على المجال $]-5,5+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ، الدالة f متزايدة على المجال $[0,+\infty[$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة.

ملاحظـــــــــــــات

1- (u_n) متتالية متزايدة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n > 0$

2- (u_n) متتالية متناقصة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n < 0$

3- (u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $u_{(n+1)}=u_n=\ldots\ldots= u_2=u_1$

4- في كل الحالات السابقة نقول أن المتتالية رتيبة أي أنها تأخذ اتجاه واحدا فقط إما متزايدة وإما متناقصة وإما ثابتة.

4- التمثيل البياني لمتتالية عددية

(u_n) متتالية عددية معرفة في N

التمثيل البياني لمتتالية (u_n) هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات $M(n,u_n)$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

مثال

لتكن (u_n) متتالية عددية حيث n عدد طبيعي

$$\forall n\in N: \quad u_n= 2n-1$$

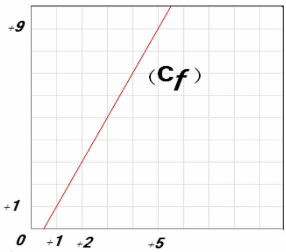
مثل بيانيا المتتالية (u_n) في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

الحل

(c_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n)

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	-1	1	3	5	7	9	11

الرسم



5– نهاية متتالية

5–1– متتالية عددية متقاربة

نفول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية $\Leftrightarrow$ كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءاً من رتبة معينة. ونكتب : $\lim u_n = l$ أو $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

(حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) لأن $n \geq 0$

في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_u) متقاربة وتقبل نهاية وحيدة.

ملاحظة

إذا كانت متتالية (u_n) غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة)

مثال

أحسب نهاية المتتالية في كل حالة، وأذكر إذا ما كانت متقاربة أو متباعدة

$1\text{-} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{2n-1}$ $\qquad$ $2\text{-} \lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2+1$ $\qquad$ $3\text{-} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n+3}$

الحل

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{2n-1} = 1$ $l=1$ متقاربة	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n+3} = 0$ $l=0$ متقاربة
$\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2+1 = +\infty$ $l=+\infty$ متباعدة	

5 -2- نهاية متتالية مرفقة بدالة

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. f دالة معرفة على المجال من الشكل $[a,+\infty[$ حيث a عدد حقيقي .

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} f(x)=l$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$.

مثال

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها العام

$$\forall n\in N \quad u_n=\frac{1}{n^2+1}$$

أحسب نهاية u_n لما $n \longrightarrow +\infty$

الحل

المتتالية (u_n) معرفة بالشكل $f(n)=u_n$ حيث f هي الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

المتتالية معرفة على المجال $[0,+\infty[$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$ ومنه المتتالية متقاربة

5-3- نهاية غير منتهية لمتتالية عددية

1

(u_n) متتالية عددية

المتتالية (u_n) تقبل نهاية $+\infty$ كنهاية $\Leftrightarrow$ كل مجال مفتوح يشمل $]a,+\infty[$ حيث $(a\in R)$. يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءاً من رتبة معينة. ونرمز:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

2

(u_n) متتالية عددية

المتتالية (u_n) تقبل نهاية $-\infty$ كنهاية $\Leftrightarrow$ كل مجال مفتوح يشمل $]-\infty,a[$ حيث $(a\in R)$.يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءاً من رتبة معينة. ونرمز:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

3

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$. f دالة معرفة على المجال من الشكل $[a,+\infty[$ حيث a عدد حقيقي .

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

5– 4– نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

1

(u_n)،(v_n)، (w_n) ثلاثة متتالية عددية و l عدد حقيقي

إذا كان $\lim_{n\to+\infty} v_n=l$ و $\lim_{n\to+\infty} w_n=l$ وإذا كان إبتداءاً من عدد طبيعي n_0

$vn\le u_n\le w_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=l$

2

(u_n)، (v_n) متتاليتان عدديتان

إذا كان إبتداءاً من عدد طبيعي n_0، $u_n\ge v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3

(u_n)،(v_n) متتاليتان عدديتان

إذا كان إبتداءاً من عدد طبيعي n_0، $u_n\le v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

مثال 1

متتاليتان (u_n)، (v_n) عدديتان معرفتان كما يلي

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad v_n = \frac{n}{n+1}$$

علما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ، أحسب نهاية v_n لما $n \longrightarrow +\infty$

الحل 1

$$u_n - v_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1-n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

بمأن $u_n > v_n$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

مثال 2

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N كما يلي $u_n = n^2 + Cos^2(n)$

عين نهاية المتتالية u_n لما $n \longrightarrow +\infty$

الحل 2

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا $-1 \leq cos(n) \leq +1$

بتربيع أطراف المتباينة نجد $0 \leq cos^2(n) \leq +1$

بإضافة n^2 إلى أطراف المتباينة نجد $+n^2 \leq n^2 + cos^2(n) \leq 1 + n^2$

$$n^2 \leq u_n \leq 1 + n^2$$

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+n^2) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

مثال 3

لتكن المتتالية (u_n) تحقق ما يلي $\frac{n+1}{1+2n} \leq u_n \leq \frac{n-2}{2n+1}$

عين نهاية المتتالية u_n لما $n \longrightarrow +\infty$

الحل 3

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{1+2n} = \dfrac{1}{2}$ وكذلك $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n-2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

تطبيق

(u_n) متتالية عددية معرفة على N ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{(n+1)} = (u_n-1)^2 \end{cases}$$

جد الدالة f من أجل كل عدد طبيعي n بحيث يكون لدينا $u_{(n+1)}=f(u_n)$

الحل

المتتالية (u_n) المعرفة على N من الشكل $u_{(n+1)} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها. ومن أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x) = (x-1)^2$. هذه الدالة معرفة على المجال R .

تطبيق للمحالولة

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بالعلاقة n

$u_n=2n^3-30n^2+162$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على R بـــ : $f(x)=2x^3-30x^2+162$

2- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ابتداء من الدليل 10.

II– المتتاليات الحسابية

1– نشاط

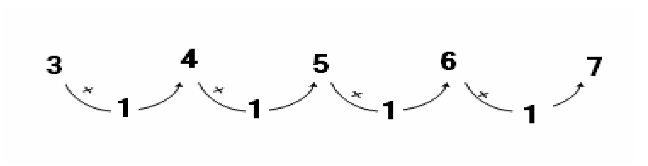
2– تعريف متتالية حسابية

3– الحد العام لمتتالية حسابية

4 – مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

II -المتتاليات الحسابية

1- نشاط



هناك علاقة بين 3 و 4 وهي $4=3+1$

هناك علاقة بين 4 و 5 وهي $5=4+1$

هناك علاقة بين 5 و 6 وهي $6=5+1$

نلاحظ أن العدد "1" عدد ثابت وهو الذي ندعوه بالأساس

تعميم

بنفس الطريقة السابقة نجد

$u_1=u_0+r$
$u_2=u_1+r$
$u_3=u_2+r$
. . .
. . .

$$\boxed{\forall n \in N \quad u_{(n+1)}=u_n+r}$$

2- تعريف

(u_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $\forall n \in N \quad u_{(n+1)}=u_n+r$

يدعى " r " بأساس المتتالية وهو عدد ثابت حقيقي غير معدوم.

ملاحظة

إذا كان $r=0$ فإن المتتالية (u_n) ثابية وكل حدودها تساوي الحد الأول

مثال 1

إذا كان $u_n=0$ وَ $r=1$ *فإننا* نحصل على متتالية حدودها

0 ، 1، 2 ، 3 ، ....، n

هذه الحدود تشكل مجموعة الأعداد الطبيعية N

مثال 2

إذا كان $u_n=1$ و $r=2$

نحصل على متتالية حدودها

1،3،5،7،........................، $(2n+1)$

هذه الحدود تشكل مجموعة الأعداد الفردية

1 يسمى بالحد الأول

3 يسمى بالحد الثاني

5 يسمى بالحد الثالث

$(2n+1)$ يسمى بالحد الأخير

3- الحد العام لمتتالية حسابية

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r

$$\boxed{\forall n \in N \quad u_n = u_0 + nr}$$

وهي عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r

ملاحظات

إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي

$$\boxed{\forall n \in N^* \quad u_n = u_1 + (n-1)\, r}$$

بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي

$$\boxed{\forall n>p \quad u_n = u_p + (n-p)\, r}$$

مثال 1

(u_n) متتالية حسابية معرفة بحدها الأول u_1 وأساسها r حيث

$u_0 = 1$ وَ $r=3$

1- أكتب عبارة الحد العام بدلالة n

2- أحسب الحد التاسع

الحل 1

1- لدينا $u_n= u_0+ nr$

ومنه $u_n= 3n+1$

2- $u_8=3(8)+1=24+1=25$

مثال 2

(X_n) متتالية حسابية معرفة بحدها الأول x_0 وأساسها r حيث

$x_0 =3$ وَ $r=2$

1- أكتب عبارة الحد العام x_n بدلالة n

2- أحسب الحد التاسع

الحل 2

1- لدينا $x_n=x_1+(n-1)r$

$x_n=3+2(n-1)=3+2n-2$

ومنه $x_n=2n+1$

2- $x_9=2(9)+1=18+1=19$

4- مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وَحدها الأول u_0

ليكن S_n مجموع n حدًّا الأولى

$$S_n=u_0+u_1+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_{(n-1)}$$

يعطى المجموع بالعلاقة

$$\forall n \in N \qquad S_n=\frac{n}{2}\left(u_0+u_{(n-1)}\right)$$

n يدل على عدد الحدود المراد جمعها **u_0 الحد الأول من المجموع**

$u_{(n-1)}$ الحد الأخير (النوني) من المجموع

البرهان

نبرهن على أنه من أجل $n \geq h \geq 0$ يكون لدينا $u_h+u_{(n-h-1)}=u_0+u_{(n-1)}$

لدينا

$u_n= u_0+ nr$

من أجل $n=(n-1)$ فإنه $u_{(n-1)}=u_0+(n-1)r$

من أجل $n=h$ فإنه $1 \longrightarrow u_h=u_0+hr$

من أجل $n=(n-h-1)$ فإنه $2 \longrightarrow u_{(n-h-1)}=u_0+(n-h-1)r$

بجمع 1 و 2 طرفا لطرف نجد

$$u_{(n-h-1)}+ u_h =(u_0 +(n-h-1)r) +(u_0+hr)$$

$$u_{(n-h-1)}+ u_h = u_0 +nr-hr-r + u_0+hr = u_0+ \underbrace{u_0 +(n-1)r}_{u_{(n-1)}} = u_0+u_{(n-1)}$$

ومنه $(*)$

$$\boxed{u_h+u_{(n-h-1)}=u_0+u_{(n-1)}}$$

$$S_n = u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+u_{(n-1)} \longrightarrow 3$$

$$S_n= u_{(n-1)}+u_{(n-2)}+\ldots\ldots\ldots+u_1+ u_0 \longrightarrow 4$$

بجمع 3 و4 طرفا لطرف نجد

$$2 S_n = (u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots+u_{(n-1)})+(u_{(n-1)}+u_{(n-2)}+\ldots\ldots\ldots+u_1+ u_0)$$

$$2 S_n = (u_0+u_{(n-1)})+ (u_{1}+ u_{(n-2)}) +\ldots\ldots\ldots+(u_{1}+ u_{(n-2)})+ (u_0+u_{(n-1)})$$

باستعمال النتيجة السابقة $(*)$ نجد

$h=0 \quad u_0+u_{(n-1)}=u_0+u_{(n-1)}$

$h=1 \quad u_1+u_{(n-2)}= u_0+u_{(n-1)}$

ينتج أن

$$2 S_n = n(u_0+u_{(n-1)})$$

ومنه $S_n=\dfrac{n}{2} (u_0+ u_{(n-1)})$ وهو المطلوب

قاعدة

المجموع في المتتالية الحسابية يكون بالكيفية التالية

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}\right)$$

$$S_n = \underbrace{\text{الحد الأول} + \ldots\ldots + \text{الحد الأخير}}_{\text{عدد الحدود}}$$

عدد الحدود = (دليل (الحد الأخير) – دليل (الحد الأول) +1

مثال 1

لنحسب المجموع التالي

$S_n = 1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n$

الأعداد 1،2،3،4،......................هي أعداد متتابعة من متتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدها

الأول 1 وحدها الأخير n فيكون المجموع كالتالي

$$S_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

مثال 2

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
1	2	3	4	5

خمسة حدود (1+4) $S_5=15$

تمرين شامل

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1=2$ وَ أساسها $r=3$

1- أكتب عبارة الحد العام بدلالة n

2- أحسب الحد الخامس عشر

3- نعتبر المجموع S_n حيث $Sn = u_1+u_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n$

أحسب المجموع S_n بدلالة n

4- أحسب المجموع من أجل خمسة عشر حدّا الأولى

الحل

1- لدينا $u_n=u_1+(n-1)r$

$u_n=2+3(n-1) = 2+3n-3$

$u_n=3n-1$

2- حساب الحد الخامس عشر

$u_{15}=3(15)-1=45-1=44$

3- حساب المجموع S_n

$$S_n=\frac{n}{2}(u_0+u_1)=\frac{n}{2}(2+3n-1)=\frac{n}{2}(3n+1)$$

4- حساب المجموع من أجل خمسة عشر حدّا الأولى

$$S_{15}=\frac{15}{2}(3(15)+1)=\frac{15}{2}(45+1)=\frac{15}{2}(46)=15\times 23=345$$

III– المتتاليات الهندسية

1– نشاط

2– تعريف متتالية هندسية

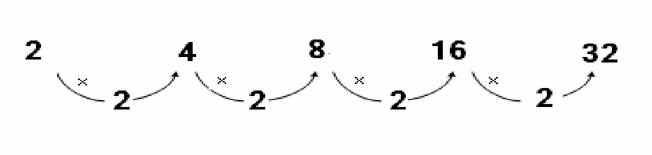
3– الحد العام لمتتالية هندسية

4 – مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

5– نهاية متتالية هندسية

III - المتتاليات الهندسية

1- نشاط



هناك علاقة بين 2 و 4 وهي $2\times2=4$

هناك علاقة بين 4 و 8 وهي $2\times4=8$

هناك علاقة بين 8 و 16 وهي $2\times8=16$

نلاحظ أن العدد "2" عدد ثابت وهو الذي ندعوه بالأساس

تعميم

بنفس الطريقة السابقة نجد

$u_1=u_0\times r$

$u_2=u_1\times r$

$u_3=u_2\times r$

. . .

. . .

$$\boxed{\forall n\in N \quad u_{(n+1)}=u_n\times r}$$

2- تعريف

(u_n) **متتالية هندسية إذا وفقط إذا** $\forall n\in N \quad u_{(n+1)}=u_n\times r$

يدعى " r " بأساس المتتالية وهو عدد ثابت حقيقي غير معدوم.

مثال 1

إذا كان $u_0=1$ و $r=2$ فإننا نحصل على متتالية حدودها

$1،2،4،8،.......................،2^n$

مثال 2

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_1=2$ وأساسها $r=3$

$n=1 \qquad u_2=u_1\times r = 2\times 3 =6$

$n=2 \qquad u_3=u_2\times r = 6\times 3 =18$

$n=3 \qquad u_4=u_3\times r = 18\times 3 =54$

ومنه نحصل على متتالية حدودها

$(u_1,u_2,u_3,u_4,\ldots\ldots\ldots\ldots) = (2,6,18,54,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

3- الحد العام لمتتالية هندسية

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها r

$$\boxed{\forall n \in N \quad u_n= u_0\, r^n}$$

وهي عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها r

ملاحظة

إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي

$$\boxed{\forall n \in N^* \quad u_n= u_1\, r^{(n-1)}}$$

بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي

$$\boxed{\forall n>p \quad u_n= u_p\, r^{(n-p)}}$$

مثال 1

متتالية هندسية معرفة بحدها الأول u_0 وأساسها r حيث

$r=3$ و $u_0=1$

1- أكتب عبارة الحد العام بدلالة n

2- أحسب الحد التاسع

مثال 2

(u_n) متتالية هندسية معرفة بالعلاقة $u_n=23^n$

1- أحسب u_2، u_3

2- استنتج الأساس

3- أحسب الحد الخامس

الحل 2

1- لدينا $u_n=2\ 3^n$

$n=2 \qquad u_2=23^2=2\times 9=18$

$n=3 \qquad u_3=23^3=2\times 27=54$

2-

$$r=\frac{u_3}{u_2}=\frac{54}{18}=3$$

3-

$u_4=2\ 3^4=2\times 81=162$

الحل 1

1- عبارة الحد العام

$u_n=u_0\ r^n$

$u_n=1\ 3^n=3^n$

2- حساب الحد التاسع

$n=9 \qquad u_9=3^9=27$

4- مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها r وحدها الأول u_0

ليكن S_n مجموع n حدًّا الأولى

$$S_n=u_0+u_1+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_{(n-1)}$$

يعطى المجموع بالعلاقة

$$S_n=u_0\,\frac{r^n-1}{r-1} \qquad \forall n\in N$$

n يدل على عدد الحدود المراد جمعها **u_0 الحد الأول من المجموع**

$u_{(n-1)}$ الحد الأخير (النوني) من المجموع

البرهان

إذا كان $r\neq 0$

$$S_n=u_0+u_1+\dots\dots\dots\dots\dots+u_{(n-1)} \longrightarrow 1$$

بضرب 1 في الأساس r (لأن $r\neq 0$) نجد

$$rS_n = ru_0 + ru_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ru_{(n-1)} \longrightarrow 2$$

بطرح 1 من 2 طرفا لطرف نجد

$$S_n - rS_n = (u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_{(n-1)}) - (ru_0 + ru_1 + \ldots\ldots\ldots + ru_{(n-1)})$$

$$S_n - rS_n = (u_0 - ru_0) + (u_1 - ru_1 +) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (u_{(n-1)} - ru_{(n-1)})$$

لدينا

$$(u_0 - ru_0) = (u_0 - u_1)$$
$$(u_1 - ru_1) = (u_1 - u_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$
$$(u_{(n-2)} - ru_{(n-2)}) = (u_{(n-2)} - u_{(n-1)})$$
$$(u_{(n-1)} - ru_{(n-1)}) = (u_{(n-1)} - u_n)$$

$$S_n - rS_n = (u_0 - \cancel{u_1}) + (\cancel{u_1} - \cancel{u_2}) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_3}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\cancel{u_{(n-2)}} - \cancel{u_{(n-1)}}) + (\cancel{u_{(n-1)}} - u_n)$$

$$S_n - rS_n = (u_0 - u_n)$$

ولدينا

$$u_n = u_0 r^n$$

$$S_n - rS_n = (u_0 - u_0 r^n)$$
$$(1-r)S_n = u_0(1-r^n)$$

بضرب كلا الطرفين في (-1) نجد

$$(r-1)S_n = u_0(r^n - 1)$$

ومنه $S_n = u_0 \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ حيث $r \neq 0$

إذا كان $r = 0$

$$u_n = u_0 \times r^n$$

$$r = 0 \qquad u_n = u_0 \times 0^n = u_0 \times 1 = u_0$$

فإن جميع الحدود متساوية ومساوية للحد الأول

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{(n-1)}$$
$$S_n = u_0 + u_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_0$$
$$S_n = u_0 \times n$$

قاعدة

المجموع في المتتالية هندسية يكون بالكيفية التالية

$$S_n = (\text{الحد الأول}) \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - (\text{الأساس})} \quad \text{حيث } (\text{الأساس}) \neq 1$$

$$S_n = \text{عدد الحدود} \times (\text{الحد الأول}) \quad \text{حيث } (\text{الأساس}) = 1$$

$$S_n = \underbrace{\text{الحد الأول} + \ldots\ldots\ldots + \text{الحد الأخير}}_{\text{عدد الحدود}}$$

عدد الحدود = [(دليل (الحد الأخير) – دليل (الحد الأول)] +1

مثال 1

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=2$ وَ أساسها $r=1$

نعتبر المجموع S_n حيث $Sn= u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n$

أحسب المجموع S_n بدلالة n

الحل

لدينا $u_n=u_0\times r = 2 \times 1^n =2$ (علما أن $1^n=1$)

دليل (الحد الأخير) $= n$

دليل (الحد الأول) $= 0$

عدد الحدود = [(دليل (الحد الأخير) - دليل (الحد الأول)] +1

عدد الحدود = ($n-0$) +1 = $n+1$

$$Sn= u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots+u_n= \underbrace{2 +2 +2+ \ldots\ldots\ldots +2}_{(n+1)\ \text{حدّ}}$$

$$Sn= (n+1) \times 2$$

مثال 2

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_1=5$ وَ أساسها $r=5$

نعتبر المجموع S_n حيث $Sn= u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots+u_n$

أحسب مجموع خمسة حدود الأولى

الحل

$$S_5 = 5^1+5^2+5^3+5^4+5^5 = 5 \times \frac{5^5 - 1}{5-1} = 5 \times \frac{3125 - 1}{4} = 5 \times \frac{3124}{4}$$

$$S_5 = = 5 \times 781 = 3905$$

5– نهاية متتالية هندسية

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها r وحدها الأول u_0

المتتالية (u_n) متباعدة	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$u_0 > 0$	$r > 1$
المتتالية (u_n) متباعدة	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	$u_0 < 0$	
المتتالية (u_n) متقاربة	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$		$-1 < r < 1$
المتتالية (u_n) متباعدة	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$		$r \leq -1$

مثال

لتكن (u_n) متتالية هندسية معرفة بعبارة الحد العام حيث $u_n=3(0.5)^n$

أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحل

بما أن $-1 < 0.5 < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

تطبيق 1

يزداد عدد سكان مدينة **عين الحجل** بنسبة 5 % (0,05) في كل سنة كم يصبح عدد سكان هذه المدينة بعد 20 عاماً إذا كان عدد سكانها الحالي (سنة 2000) هو 35000 نسمة وكم سيصبح هذا العدد بعد 50 عاماً.

حل

نفرض أن عدد السكان في سنة 2000 هو الحد الأول u_0 فيكون $u_0=35000$

حساب عدد السكان سنة 2001

$$u_1=u_0\times(0,05)+u_0 = u_0\times(0,05+1) = u_0\times(1,05)$$

حساب عدد السكان سنة 2002

$$u_2=u_1\times(0,05)+u_1=u_1(0,05+1)=u_1(1,05)=u_0\times(1,05)\times(1,05)$$
$$u_2=u_0\times(1,05)^2$$
$$u_n= u_0\times (1,05)^n= (3500)\times (1,05)^n= u_0\times r^n$$

الحدود تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية حدها الأول هو 35000 وأساسها 1,05

$n=20 \quad u_{20}= (3500)\times (1,05)^{20}=35000 \times(2,65329)= 92865,12$

$n=50 \quad u_{50}= (3500)\times (1,05)^{50}=35000 \times(11,467399)= 401359$

السنة	عدد السكان
0	35000
1	36750
2	38587.5
3	40516.88
4	42542.72
5	44669.85
6	46903.35

السنة	عدد السكان
15	72762.49
16	76400.61
17	80220.64
18	84231.67
19	88443.26
20	92865.42
21	97508.69

السنة	عدد السكان
44	299500.3
45	314475.3
46	330199
47	346709
48	364044.4
49	382246.7
50	401359

تطبيق 2 (**أنظر الكتاب المدرسي ص 166 التمرين 17**)

إذا كان سعر برميل البترول P يزداد بنسبة 5 % (0,05) فإن هذا السعر يفوق $2P$ بعد :

1) 10 سنوات   2) 15 سنة   3) 4 سنوات و5 أشهر   4) 14 سنة

حل

نفرض الحد الأول هو u_0 فيكون $u_0 = P$

$$u_1 = u_0 \times (0,05) + u_0 = u_0 \times (0,05+1) = u_0 \times (1,05)$$
$$u_2 = u_1 \times (0,05) + u_1 = u_1(0,05+1) = u_1(1,05) = u_0 \times (1,05) \times (1,05)$$
$$u_2 = u_0 \times (1,05)^2$$
$$u_n = u_0 \times (1,05)^n = (P) \times (1,05)^n = u_0 \times r^n$$

الحدود تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية حدها الأول هو P وأساسها 1,05

نفرض أن $u_n = 2P$ ونبحث عن n

$$u_n = 2P \Leftrightarrow (P) \times (1,05)^n = 2P \Leftrightarrow (1,05)^n = 2 \Leftrightarrow (1,05)^n = (2)^{14,2}$$

$n=14$ (الإجابة 4)

تطبيق 3

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ المرفة من أجل كل عدد حقيقي x $(x > 0)$ حيث

$$f : N \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto f(x)$$

1- من الرسم استنتج الإحداثيات $M(x\,,\,f(x))$ من أجل x=0 ، x=1، x=2

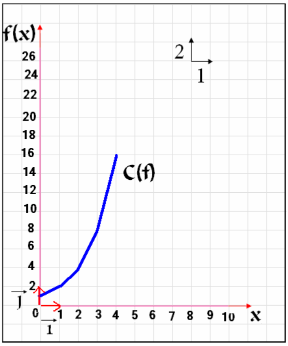
2- أثبت أن المنحى البياني للدالة f هو الدالة $f(x)=Aq^x$ يطلب تعين A و q

3- تحقق من العبارة المستنتجة بواسطة التمثيل البياني (C_f)

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n)

4- أوجد عبارة u_n

5- استنتج طبيعة المتتالية (u_n)



حل

1- استنتاج الإحداثيات

$M(0,1)$ ، M(1,2) ، M(2,4)

2- حساب A و q

$$f(0)=1 \Leftrightarrow Aq^0=1 \Leftrightarrow A=1$$
$$f(1)=2 \Leftrightarrow Aq^1=2 \Leftrightarrow 1q=2 \Leftrightarrow q=2$$

إذن $f(x)=2^x$

3- التحقق من العبارة المستنتجة بواسطة التمثيل البياني (C_f)

من المنحنى نجد أن M(3,8) ومن العبارة $f(x)$ نجد $x=3 \quad f(3)=2^3=8$

4- ايجاد عبارة u_n

$$u_n=2^n=u_0\, r^n= 1\ 2^n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها 2

تمرين شامل

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 (غير معدوم) وَ أساسها r حيث $u_6=16u_2$

نعتبر المجموع S_n حيث $S_n= u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n$

1- أحسب الأساس علما أن حدود هذه المتتالية موجبة

2- أكتب عبارة الحد العام بدلالة n وحسب الحد u_6 من أجل $u_0=3$

3- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4- نعتبر المجموع $S_n= u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_{(n-1)}$

أحسب المجموع S_n بدلالة n

5- استنتج S_5

الحل

1- لدينا عبارة الحد العام $u_n=u_0\, r^n$

$n=6 \qquad u_6=u_0\, r^6$

$n=2 \qquad u_2=u_0\, r^2$

$u_6=16u_2$

$u_0 r^6=16\, u_0\, r^2$

$u_0 r^6-16\, u_0\, r^2=0$

$u_0\, r^2\times r^4-16\, u_0\, r^2\times r^4=0$

$u_0\, r^2\,(r^4-16)=0$

$\begin{cases} u_0\, r^2=0 \quad (\text{ غير معدومين } r \text{ و } u_0) \\ (r^4-16)=0 \end{cases}$

$r^4=16 \Rightarrow r^4=2^4 \Rightarrow \begin{cases} r=-2 \\ \text{أو} \\ r=2 \end{cases}$

$r=-2$ مرفوض لأن حدود المتتالية موجبة

2- عبارة الحد العام

$$u_n=u_0\, 2^n$$

حساب الحد u_6

$n=6 \qquad u_6=u_0\, r^6=3\times 2^6=3\times 64=192$

3- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن $r>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

4- حساب المجموع S_n

$$S_n = u_0 \frac{r^n - 1}{r - 1} = 3 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$$

5- استنتاج S_5

$$n=5 \Rightarrow S_5 = 3(2^5 - 1) = 3(32-1) = 3 \times 31 = 93$$

IV- أعمال موجهة

1- الوسط الحسابي

2- الوسط الهندسي

3- نهاية مجموع متتالية هندسية

4- المتتالية الغير رتيبة

1- الوسط الحسابي

> **إذا كان c،b،a ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية ذات الأساس r (r عدد حقيقي) فإن:**
>
> **$a+c=2b$ العدد b يدعى بالوسط الحسابي للعددين a و c**

البرهان

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "+"'] & & b \arrow[ll, "-"'] \arrow[dr, "+"'] & & c \arrow[ll, "-"'] \\ & r \arrow[ur] & & r \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\xrightarrow{+}$
$$\begin{cases} b=a+r \\ c=b+r \\ c=a+2r \end{cases} \longrightarrow \mathbf{1}$$

$\xleftarrow{-}$
$$\begin{cases} a=b-r \\ b=c-r \\ a=c-2r \end{cases} \longrightarrow \mathbf{2}$$

بجمع 1و 2 طرفا لطرف نجد $c+a=b+r+b-r=2b$

تمرين

a,b,c,d,e,h خمسة حدود غير معدومة متعاقبة من متتالية حسابية

اثبت أن $a+e=2c$

الحل

$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad h$

لدينا (a,b,c) $\quad a+c=2b \longrightarrow 1$

(b,c,d) $\quad b+d=2c \longrightarrow 2$

(d,e,h) $\quad c+e=2d \longrightarrow 3$

بجمع 1 و3 طرفا لطرف نجد

$(a+c) + (c+e)=2b+2d=2(b+d)$

$a+c+c+e=2(b+d)$

$a+e+2c=2(b+d)$

$a+e=2(b+d) -2c$

نعوض العلاقة 2 ($b+d=2c$) فنجد

$a+e=2(2c)-2c=4c-2c=2c$

$a+e=2c$

إذن $a+e=2c$ وهو المطلوب

مثال

ليكن 3 , 5 , c ، 9 ، 11 أعداد متتالية من متتالية حسابية

أحسب c

$2c = 3+11 = 14$

$c= \dfrac{14}{2}$

$c=7$

2– الوسط الهندسي

> **إذا كان c،b،a ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية ذات الأساس r (r عدد حقيقي) فإن:**
>
> **$a\times c=b^2$ العدد b يدعى بالوسط الهندسي للعددين a و c**

البرهان

$$a \xleftarrow{/r} b \xleftarrow{/r} c \qquad a \xrightarrow{\times r} b \xrightarrow{\times r} c$$

$$\xrightarrow{\times}\begin{cases} b=a\times r \\ c=b\times r \longrightarrow \mathbf{1} \\ c=a\times r^2 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad \xrightarrow{/}\begin{cases} a=\dfrac{b}{r} \longrightarrow \mathbf{2} \\ b=\dfrac{c}{r} \\ a=\dfrac{c^2}{r} \end{cases}$$

بضرب1 و 2 طرفا لطرف نجد $b^2 = b \times (=b\dfrac{b}{r}) \ \times (b\times r) \ = c \times a$

تمرين

متتالية هندسية تتكون من ثلاثة حدود على الترتيب 16 ، x ، 4096

أوجد x الذي يمثل الوسط الهندسي

الحل

$x^2 = 4096 \times 16$

$x^2 = 65536$

$x = \sqrt{65536}$

$x=256$ أو $x= -256$

$x= -256$ مرفوض لأن الحدين 16، 4096 موجبين

ومنه $x=256$

تمرين للمحاولة

(u_n) متتالية حسابية حدودها الثلاثة الأولى u_1،u_2، u_3معرفة بالعلاقة

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{11}{18}$$

1- أوجد الأساس علما أن $u_2=6$

2- احسب الحدين u_1، u_3 علما أن هذه المتتالية متناقصة

تذكر بأن

في متتالية حسابية	**مجموع حدين طرفين يساوي ضعف الحد الوسط** $U_{(n+1)} + U_{(n-1)} = 2U_n$
في متتالية هندسية	**جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط** $U_{(n+1)} \times U_{(n-1)} = (U_n)^2$

3- نهاية مجموع متتالية هندسية

(u_n) متتالية هندسية معرفة بحدها الأول u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي)

نعتبر المجموع $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n$

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_n$

$$S_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n q^n = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_0 \times (+\infty))$

إذا كان $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$; وإذا كان $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

إذا كان $q=1$ فإن $u_n = u_0 \times 1^n = u_0$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + u_0 + \dots + u_0 = (n+1) \times u_0$$

إذا كان $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$; وإذا كان $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

إذا كان $q=-1$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$$

$$S_n = \frac{u_0}{2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

إذا كان n زوجي فإن $S_n = u_0$; وإذا كان n فردي فإن $S_n = 0$

إذا كان $q<-1$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$$

$$S_n = \frac{u_0}{2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

- إذا كان n زوجي فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_0 \times (+\infty))$

إذا كان $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$ وإذا كان $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

- إذا كان n فردي فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty}(u_0 \times (-\infty))$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = -\infty$

إذا كان $u_0<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$ وإذا كان $u_0>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$

إذا كان $-1<q<1 \Leftrightarrow |q|<1$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_0\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{u_0}{1-q}$

تـذكـر

$q>1 \Leftrightarrow q\in]1,+\infty[$

$q<-1 \Leftrightarrow q\in]-\infty,-1[$

$|q|<1 \Leftrightarrow q\in]-1,+1[\Leftrightarrow -1<q<+1$

$|q|>1 \Leftrightarrow \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

مثال

(u_n) متتالية عددية هندسية حدها الأول $u_0=-6$ وأساسها $r=0,5$

نعتبر المجموع S_n المعرف كما يلي $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$

أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل

بما أن $-1<q<1$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} u_0\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{u_0}{1-q}=\frac{-6}{1-0,5}=-3$$

4– المتتالية الغير رتيبة

هي التي تأخذ أحيانا إشارة موجبة (+) وأحيانا إشارة سالبة (–) أي أن إشارتها متذبذبة وبالتالي ليس من الممكن تحديد إشارة المتتالية فنقول أنها غير رتيبة.

مثال

(u_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التالية

$$\forall n \in N \qquad u_n = (-2)^n$$

أحسب u_0، u_1 u_2،u_3

$u_0 = (-2)^0 = +1$ (إشارة موجبة)

$u_1 = (-2)^1 = -1$ (إشارة سالبة)

$u_2 = (-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$ (إشارة موجبة)

$u_3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (+4) \times (-2) = -8$ (إشارة سالبة)

وهكذا فإننا لا يمكننا تحديد رتابة المتتالية (u_n)، إذن المتتالية (u_n) متتالية غير رتيبة

تطبيق للمحاولة

لتكن المتتالية الهندسية (g_n) المعرفة بحدها الأول $g = 2$ وأساسها d ($d = -0,5$)

أثبت أن المتتالية (g_n) غير رتيبة

V- أعمـــــال تطبيقيـــــــــة

1- تعريف المجدول (الجدول) ***Tableur***

2- تعريف إكسل ***Excel***

4- كيفية الدخول إلى معالج الجداول

5- واجهة إكسل ***Excel***

6- بعض الأدوات المستعملة

7- الصيغ

7- 1- تعريف الصيغة

7-2 - إنشاء صيغة

8- الدوال

8- 1 تعريف دالة

8-2- بعض الدوال

9- معالجة المتتاليات بواسطة ***Excel***

1- تعريف الجدول (الجدول) *Tableur*

عبارة عن برنامج يقوم بمعالجة المعطيات آليا وتخزينها في جدول، كما يقوم بعرض الرسومات البيانية وهذا بعد إدخال البيانات. ومن أهمها نجد:

1- ***Microft Excel*** برنامج تابع لـ ***Microsoft Office*** .

2- ***Sun StarOffice Calc*** برنامج تابع لـ ***StarOffice***.

3- ***Corel Quattro Pro*** برنامج تابع لـ ***WordPerfect***.

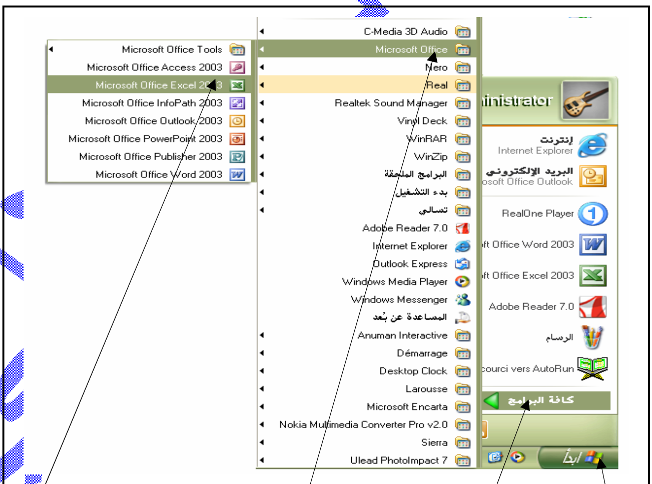
2- تعريف إكسل *Excel*

برنامج من البرامج المكتبية التابعة لـــــ ***Microsoft Office***، عبارة عن برنامج يقوم بمعالجة البيانات الحسابية (الدوال) والبيانية (الرسومات البيانية).

- الوثيقة في إكسل تسمى **بالمصنف** (***Classeur***) وهو عبارة عن مجموعة من **الأوراق** (***Les feuilles***)
- نوع الإمتداد (*L'extension*) : ***xls***

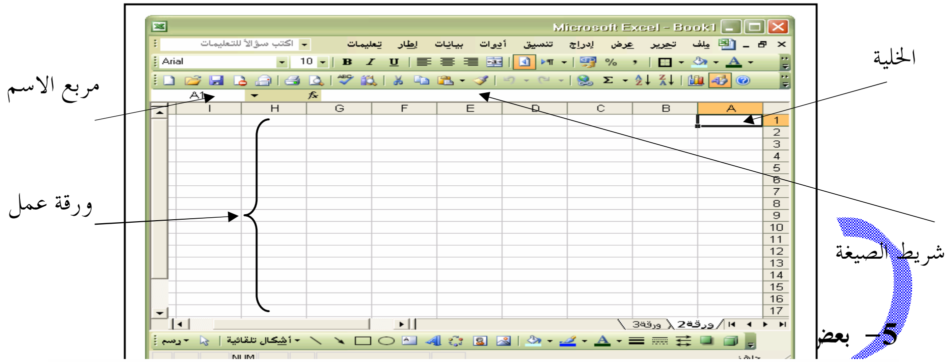
3- كيفية الدخول إلى معالج الجداول

إبدأ << كافة البرامج << Microsoft Office<< Microsoft Office Excel



Microsoft Office Excel 2003 Microsoft Office كافة البرامج إبدأ

4– واجهة إكسل *Excel*



5– بعض

دورها	الأداة
ضم مجموعة من الخلايا	
وضع إطار للخلية	
تلوين مساحة الخلية	
توسيط الكلمة ضمن الخلية	
حجم خط الخلية	

6– الصيغ

6– 1– تعريف الصيغة

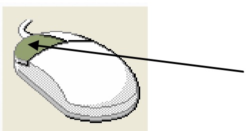
هي معادلات تقوم بإجراء عمليات حسابية على القيم في ورقة العمل (**الخلايا**) الخاصة بك. تبدأ الصيغة بعلامة المساواة " = " ، يمكن أن تحتوي الصيغة أيضاً على على ما يلي:

- ✓ الدالة (الدالات)
- ✓ المراجع (مراجع خلايا)
- ✓ الثوابت

6–2 – إنشاء صيغة

وهي عملية تنشيط الخلية ***Cellule*** وتتم بالطريقة التالية :

1. انقر فوق (ننقرنقرا مزدوجاً على يسار الفأرة) الخلية التي تريد إدخال الصيغة بها.
2. أكتب = (علامة يساوي).
3. أدخل الصيغة.



زر يسار الفأرة

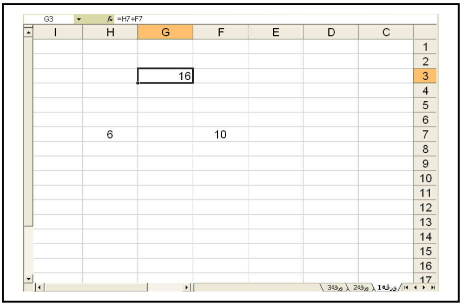
4. اضغط **ENTER** (↵).

مثال

نود حساب مجموع الخليتين H7 ,F7

H7=6 ; F7= 10

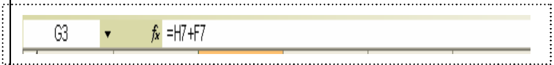
الناتج يكون في الخلية G3



الحل

1- ننقر فوق الخلية G3 نقرا مزدوجا

2- نكتب في شريط الصيغة ما يلي



3- الضغط على الزر الموافقة **ENTER** (↵).

7 – الدالة *Fonction*

7- 1 تعريف دالة

هي صيغة تمت كتابتها مسبقاً بحيث تقبل قيمة أو قيم و تؤدي إلى إجراء إحدى العمليات أو إرجاع قيمة أو قيم. تُستخدم الدالات لتبسيط الصيغ وتقليلها بورقة العمل خصوصاً الصيغ التي تؤدي إلى إجراء حسابات مطولة أو معقدة.

7–2– بعض الدوال

الدالة	بالعربية	بالفرنسية
ABS	القيمة المطلقة	valeur absolue
ATAN	قوس الظل	l'arctangente
COS	جيب التمام	cosinus
PPCM	المضاعف المشترك الأصغر	Plus Petit Commun Multiple
GCD	القاسم المشترك الأكبر	Plus Grand Commun Diviseur
MOD	إرجاع الباقي من القسمة	Reste d'une division

الدالة	بالعربية	بالفرنسية
PI	رجاع قيمة النسبة التقريبية 3.14159265358979	valeur de pi
RADIANS	تحويل الدرجات إلى تقدير دائري	Convertit des degrés en radians
SIN	جيب الزاوية	sinus
SQRT	الجذر التربيعي الموجب	Racine carrée
SUM	جمع الوسائط الخاصة بها	Calcule la somme de ses arguments
TAN	ظل الزاوية	Tangente
DEGRES	تحويل الدرجات إلى تقدير دائري	Convertit des radians en degrés
SUMSQ	إرجاع مجموع مربعات الوسائط.	la somme d'une série géométrique

8- معالجة المتتاليات بواسطة *Excel*

تطبيق 1 **الهدف منه حساب أي حدّ**

(u_n) متتالية عددية معرفة بالشكل

$$\forall n \in N \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

بواسطة *Excel* أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2

الحل

من أجل حساب الحدود وجب 8 خلايا

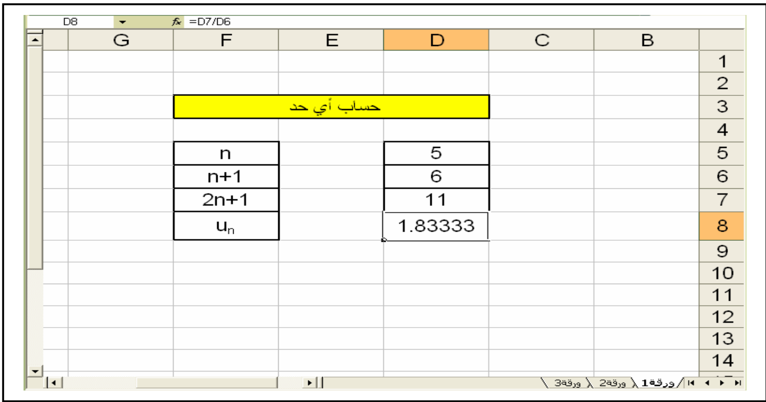
- تسمى الخلايا D5 ، D6 ، D7 ، D8 بالخلايا النشطة
- تسمى الخلايا F5 ، F6 ، F7 ، F8 بالخلايا الخامدة أوالخلايا ذات تعليق ***Commentaire*** وتبدأ دائما بالرمز '
- الناتج النهائي هو الخلية D8

F		D	
F5	n	D5	إدخال قيمة n
F6	$n+1$	D6	= D5 +1
F7	$2n+1$	D7	= 2×D5 +1
F8	u_n	D8	= D7/ D6

ملاحظة: الفاصلة تُمثل في ***Excel*** بالعلامة نقطة " **.** "

باستعمال الأدوات السابقة حاول تصميم ورقة عمل التالي

وحسب u_n من أجل $n=5$ ، $n=3$ ، $n=1$ ، $n=0$



تطبيق 2 الهدف منه اثبات الوسط الحسابي (التمرين 44)

أثبت بواسطة *Excel* أن الأعداد الحقيقية التالية هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية

$$A=(\alpha^2-2\alpha-1)^2 \;,\; B=(\alpha^2+1)^2 \;,\; C=(\alpha^2+2\alpha-1)^2$$

من أجل $\alpha=5$; $\alpha=-2{,}5$; $\alpha=0{,}5$

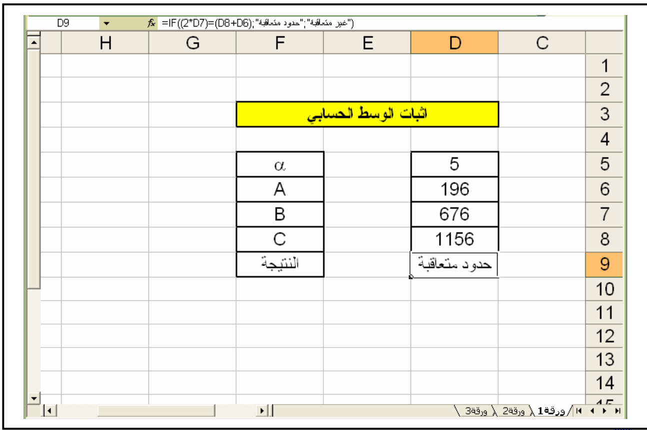
من أجل اثبات أن الأعداد الحقيقية هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية وجب 10 خلايا 5 خلايا نشطة ، 5 خلايا خاملة.

F5	α	D5	إدخال قيمة α
F6	*A*	D6	= ((D5)^2-(2*D5)-1)^2
F7	*B*	D7	= ((D5)^2+1)^2
F8	*C*	D8	= ((D5)^2+(2*D5)-1)^2
F9	*النتيجة*	D9	=IF((2*D7)=(D8+D6); " حدود متعاقبة ";" غير متعاقبة ")

الخلية D9 وتعني أنه في حالة تساوي الشرط (2*D7)=(D8+D6) تكون النتيجة " حدود متعاقبة "

وفي حالة العكس تكون النتيجة " غير متعاقبة "

نلاحظ أنه مهما كانت قيمة α فإن *Excle* يثبت أن الأعداد هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية وأن الخلية D9 دائما تأخذ النتيجة " حدود متعاقبة "



تطبيق 3   الهدف منه حساب مجموع متتالية هندسية (التمرين 33)

(h_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $h_1=4$

S_n هو مجموع n حدا الأولى حيث $S_n=4(2^n-1)$

$S_n= h_1+h_2+ h_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+h_n$

بواسطة *Excel* أحسب S_n من أجل $n=10$ ، $n=20$

الحل

من أجل حساب المجموع وجب 4 خلايا، خليتين نشطتين وخليتين خاملتين.

F5	D5
n	إدخال قيمة n
F6	D6
S_n	=4*((D5^2)-1)

باستعمال الأدوات السابقة حاول تصميم ورقة عمل التالية

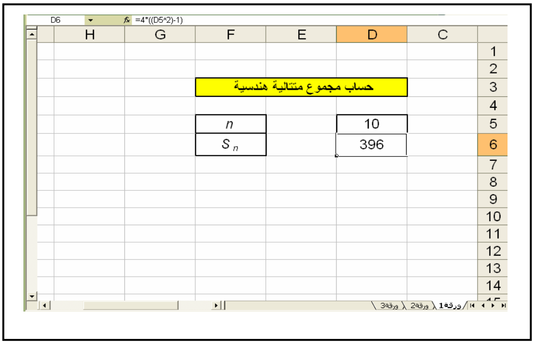
وحسب S_n من أجل $n=10$

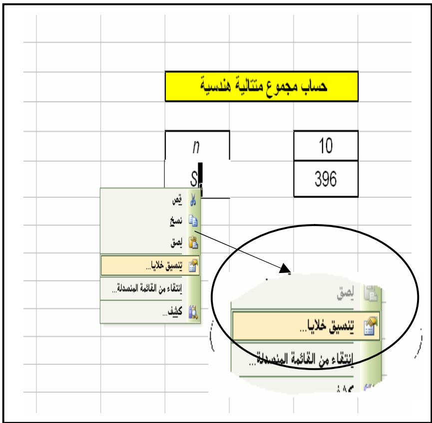
من أجل كتابة S_n في *Excel* نتبع مايلي

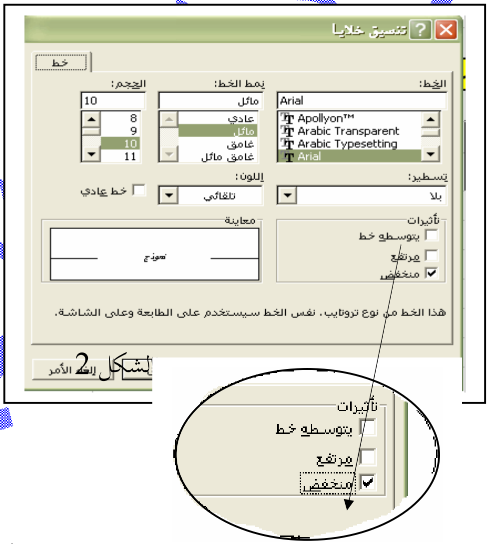
1- تحديد n الموجود في الخلية $F6$

2- بالنقر على يمين الفأرة تظهر قائمة نختار منها **تنسيق خلايا** (الشكل 1)

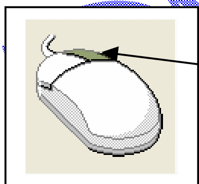
3- في خانة تأثيرات من علبة **تنسيق خلايا** نختار **منخفض** (الشكل 2)







الشكل 2



زر يمين الفأرة

6

VI- التمارين

ملاحظة حاول في حل التمارين قبل التطرق إلى الحل.

1-تمارينات حول المتتاليات العددية

التمرين 1

n عدد طبيعي،أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) حيث $u_n=2n-7$

ꝏꝏꝏꝏꝏꝏ

التمرين 2

(u_n) متتالية عددية معرفة بالشكل

$$\forall n \in N \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

1- أوجد مجموعة تعريف المتتالية (u_n)

2- أحسب الحدود u_0، u_1، u_2

3- بين أن (u_n) متزايدة

ꝏꝏꝏꝏꝏꝏ

التمرين 3 (من إنشاء المؤلف)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كمايلي

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in N \quad u_{(n+1)} = \dfrac{-1}{2}(u_n^2+2u_n+4) \end{cases}$$

بين أن (u_n) متناقصة

ꝏꝏꝏꝏꝏꝏ

التمرين 4 (من إنشاء المؤلف)

(h_n) متتالية عددية معطاة بالعلاقة التالية

$$h_n = (x-y)n - yx^2 + xy^2 + x - y$$

حيث x و y عددين حقيقيين غير معدمين

أوجد n بدلالة x بحيث يكون $h_n=0$

ꝏꝏꝏꝏꝏꝏ

التمرين 5 (من إنشاء المؤلف)

حدد طبيعة كل متتالية

$$u_n=\frac{n}{3} \quad ، \quad B_n=2^n \quad ، \quad d_n+1=\frac{d_n-1}{4}$$

التمرين 6

نعرف المتتالية (l_n) حيث

$$\begin{cases} l_0=1 \\ \forall n\in N^* \quad l_n=n\,2^n\,l_{(n-1)} \end{cases}$$

1- أحسب الحدود l_1 ، l_2 ، l_3

نعتبر المجموع التالي

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

2- باستعمال المجموع السابق استنتج عبارة l_n بدلالة n

ضع $\quad$ Delta $=1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times n$

&&&&&&&

التمرين 7

1- لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي

$$\forall n\in N \quad u_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

أكتب على الشكل

$$\forall n\in N \quad u_n=\frac{\alpha}{(2n-1)}+\frac{\beta}{(2n+1)}$$

2- لتكن (f_n) متتالية عددية معرفة كمايلي

$$\forall n\in N^* \quad f_n=\sum_{h=1}^{h=n} u_h$$

أوجد عبارة الحد العام للمتتالية (f_n) بدلالة n

التمرين 8

نعتبر المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ

$$u_n = \frac{n^4-2n^3+11n^2+14n+24}{24}$$

1- أحسب الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، u_4

2- بواسطة ***Excel*** انجز ورقة عمل تمكننا من حساب أي حدّ

3- جد تخمينا لعبارة للحد u_n

4- أحسب u_n من أجل $n=2$، $n=3$، $n=4$ هل تخمينك صحيح ؟

التمرين 9

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N حيث $u_n=(1,01)^n-1000n$

1- بواسطة المجدول ($Excel$) أحسب الحدود من u_0 إلى u_{20}

2- أثبت أن $u_{(n+1)}-u_n=0,01(1,01^n-100000)$

3- جد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n\geq n_0$ يكون $u_{(n+1)}-u_n\geq 0$

التمرين 10

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n=n^3-5n^2+6n+3$

1- أحسب الحدود u_0، u_1، u_2 هل (u_n) ثابتة؟

2- حلل u_n-3 إلى جداء عوامل

3- عين حدود المتتالية (u_n) التي تساوي 3

2- تمارين حول المتتاليات الحسابية

التمرين 11

(u_n) متتالية حسابية معرفة في N حيث $u_n = 3n-1$

أحسب u_0، u_1 واستنتج الأساس r.

التمرين 12

(u_n) متوالية حسابية غير منتهية والمعرفة بالحدين $u_1 = -3$ وَ $u_{11} = 7$

1- أحسب الأساس r.

2- أحسب الحد u_6.

التمرين 13

أوجد قيمة الحد العشرين في متتالية حدها الأول l_1

$l_n = \{2 , 4 , 6 , 8 , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

التمرين 14

أوجد حدَين متتالين بحيث يكون جدائهما هو 992.

التمرين 15

أدخل ثلاثة أعداد بين (3) وَ (19) بحيث تكون هذه الأعداد الخمسة تشكل حدود متعاقبة من متتالية حسابية .

التمرين 16

متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = \frac{1}{2}$ ومجموع حدودها الأربعة الأولى يساوي (10-)

1- أوجد أساس هذه المتتالية

2- أكتب عبارة الحد العام

3- عين رتبة الحد الذي قيمة $\frac{-395}{2}$

4- أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{100}$

التمرين 17

لتكن (u_n) متتالية حسابية ذات الحدّ العام حيث $u_n=2n+1 \quad \forall n\in N^* :$

1- أحسب $u_{(n+90)}$

2- أحسب $u_n+u_{(n+90)}$

3- نريد حساب 90 حدّا منها ليكون مجموعها يساوي 209250

ماهي رتبة الحد الذي نبدأ به وماهي قيمته.

التمرين 18

متتالية حسابية حدّها الأول $u_1=10$ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى تنقص عن حدودها الثلاثة التي تليها بمقدار 27.

ماهو أساس هذه متتالية.

التمرين 19

متتالية حسابية تشمل 13 حدّا ليكن S_1 مجموع 7 حدود الأولى و S_2 مجموع 7 حدود الأخيرة

1- أحسب الحد المتساوي البعد عن الطرفين بدلالة S_1 و S_2

2- إذا كان $S_2=77$ و $S_1=7$ استنتج الحد u_6

التمرين 20

a,b,c مثلث قائم في a. إذا كان الأطوال ab,ac,bc حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r

تحقق من أن r هو ثلث طول أحد الأضلاع.

التمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة في N^* حيث $u_1=\frac{3}{2}$ وَ $u_2=\frac{-7}{2}$

$$\forall n\in N^* \quad u_{(n+2)}=2u_{(n+1)}-u_n$$

1- بين أن (u_n) متتالية حسابية

2- عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n=-110$

التمرين 22 (من إنشاء المؤلف)

I-نعتبر المجموع التالي

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$(u_n)_{\forall n\in N}$ متتالية حسابية والتي حدودها موجبة

$$\begin{cases} u_5=(u_2)^2 \\ u_1+r=3 \end{cases}$$

1- أحسب الحد الأول و الأساس r

2- أحسب المجموع التالي

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots\dots\dots+u_n$$

II- نعتبر المتتالية العددية (h_n) والمعرفة كمايلي

$$h_n=S_n-u_n$$

1- أثبت أن $h_n=(n-1)^2$

2- أوجد المجموع A_n بدلالة n حيث

$$A_n=h_2+h_3+h_4+\dots\dots\dots+h_n$$

التمرين 23

I-نعرف المتتالية (u_n) حيث $\forall n\in N$ من بالشكل

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_n=u_{(n-1)}+n(-1)^{n-1} \quad n\geq 1 \end{cases}$$

بين أن $u_{(n+2)}=u_n+(-1)^{n+1}$

II- نعتبر المتتاليتان (l_n) و (m_h) $\forall h\in N^*$ المعرفتين بالشكل

$$\begin{cases} l_h=u_{(2h+1)} \\ m_h=u_{(2h)} \end{cases}$$

1- ماطبيعة كل متتالية

2- أحسب الحد العام بدلالة h

3- بين أن (G ثابت) $\forall h\in N \quad l_h+m_h=G$

4- استنتج المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots\dots+u_n$

التمرين 24

I- (α_n) متتالية عددية معرفة كمايلي

$$\forall n \in N \quad \alpha_n = \frac{1}{2n-1}$$

هل العدد $\frac{1}{1999}$ هو حد من حدود هذه المتتالية

II- (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي

$$\forall n \in N \quad u_n = \frac{1}{\alpha_n}$$

1- برهن (u_n) متتالية حسابية يطلب تحديد حدها الأول والأساس r

2- عين عبارة المجموع S_n بدلالة n علما أن S_n هو مجموع n حدًّا الأولى

3- أحسب المجموع التالي

$$M_n = (\alpha_0 \times u_0) + (\alpha_1 \times u_1) + (\alpha_2 \times u_2) + \ldots\ldots\ldots + (\alpha_n \times u_n)$$

التمرين 25 (من إنشاء المؤلف)

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 علمًا أن أساسها r موجب حيث

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5 = 10$$

1- برهن أن $u_1+u_2+u_4+u_5 = 5u_3$ و استنتج u_3

2- برهن أن $u_1+u_5 = 2u_3$

3- أوجد u_1 علمًا أن $u_5 = 8$

4- باستعمال الوسط الحسابي للحدود u_1، u_2، u_3 أوجد قيمة الحد u_2

5- استنتج من المجموع u_4

3-تمارينات حول المتتاليات الهندسية

التمرين 26

متتالية هندسية بهاخمسة حدود أساسها يساوي (2)، ومجموع حدودها يساوي 1984

أوجد الحد الأول لهذه المتتالية.

التمرين 27

متتالية هندسية متزايدة لها سبعة حدود حيث مجموع الثلاثة الحدود الأولى هو 7 ومجموع الحدود الأخير هو 112

أوجد الأساس r ثم استنتج الحد الأول.

التمرين 28

لتكن (u_n) متتالية هندسية حيث $u_1=\frac{1}{64}$ و أساسها $r=2$

نريد حساب سبعة حدود منها ليكون مجموعها يساوي $\frac{127}{2}$

ما هي رتبة الحد الذي نبدأ به وما هي قيمته.

التمرين 29

أدخل ثلاثة أعداد بين (3) و (12) بحيث تكون هذه الأعداد الخمسة الموجبة تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية.

التمرين 30

ليكن $\forall n\in N$ (h_n) متتالية هندسية حدها الأول هو (-2) وأساسها $r=3$

1- أحسب الحد الذي رتبة 10 من هذه المتتالية

2- هل الحد (-162) حد من حدود هذه المتتالية

التمرين 31

ليكن (u_n) متتالية هندسية معرفة بـ $u_1=a$, $u_2=b$

$$u_n=\frac{1}{2}\left(u_{(n-1)}+u_{(n-2)}\right)$$

1- بين أن المتتالية (g_n) متتالية هندسية $g_n=u_n-u_{(n-1)}$

2- استنتج عبارة (g_n) بدلالة a ، b و n حيث أن الحد الأول هو g_1

التمرين 32

1-أحسب المجموع

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots\ldots\ldots + \underbrace{11\ldots\ldots111}_{n}$$

2- ليكن العدد الطبيعي β حيث

$\beta=1111122222$

بين أن β هو جداء عددين طبيعيين متتاليين

ملاحظة السؤال 1 مستقل عن السؤال 2

التمرين 33

لتكن المتوالية العددية (u_n) ذات الحد الأول $u_1=1$ حيث $u_{(n+1)}=2u_n+3$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي $(n \geq 1)$

نضع $h_n = u_n+3$

1- أثبت أن (h_n) متتالية الهندسية

2- أحسب (h_n) بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3- أحسب $S_n = h_1+h_2+h_3+\ldots\ldots\ldots+h_n$

4- أثبت أن $P_n=4(2^n-1)-3n$ حيث

$$P_n = u_1+u_2+\ldots\ldots\ldots+u_n$$

التمرين 34

n عدد طبيعي

لتكن المتتالية العددية المعرفة بـــ

$$\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in N^* \quad {}_{n}-2u_{(n+1)}=2n+3 \end{cases}$$

1- برهن وجود عدد طبيعي a مستقل عن n بحيث يكون $v_n=u_n+(an-1)$ علما أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0

2- استنتج أن

$$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2n+1$$

3- نضع $Q_n= v_0+v_1+v_2+\ldots\ldots\ldots+v_n$

$T_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_n$

أثبت أن $T_n=3-(\frac{1}{2})^n-n^2$

❀❀❀❀❀❀❀

التمرين 35

I – لتكن المتتالية العددية (u_n) $\forall n\in N$ والمعرفة كما يلي

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{(n+1)}=2u_n+3n+1 \end{cases}$$

نضع $S_n=u_1+u_2+u_3+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_n$

بين أن

$$u_n=\frac{1}{2}[S_n+\frac{n}{2}(3n+5)]$$

II –لتكن المتتالية العددية (h_n) المعرفة كما يلي

$$\forall n\in N:\ h_n=u_n+3n+4$$

1– بين أن (h_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها $Base$

2– تحقق بطريقة حسابية وجود الأساس المطلوب سابقا وبدون برهان

3– عبر عندئذ عن h_n و u_n بدلالة n واستنتج S_n

❀❀❀❀❀❀❀

التمرين 36 (**من إنشاء المؤلف**)

I – (k_n) لتكن المتتالية العددية المعرفة كمايلي

$k_0=a$ حيث $a\in R$

$$\forall n\in N\quad k_{(n-1)}-3k_n=3$$

1– عين العدد الحقيقي a بحيث تكون (k_n) متتالية ثابتة

II – (j_n) متتالية عددية معرفة كمايلي

$$\forall n\in N\quad j_n=\frac{1}{3}k_n+\frac{1}{2}$$

1– أثبت أن (j_n) متتالية هندسية

2– أكتب بدلالة n و a عبارة الحد العام لـ j_n ثم k_n

3– نفرض أن $a=-3$ أحسب بدلالة n كل من L_n و S_n حيث

$S_n=(j_0)^2+(j_1)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(j_n)^2$

$L_n=j_0\times j_1\times j_2\times j_3\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times j_n$

التمرين 37

I - x عدد حقيقي حيث أن $x\neq 0$

1- أحسب $(x+\frac{1}{x})^3$

2- أثبت أنه إذا كان $\dfrac{x^3+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{1}{x}}=5$ فإنه $x^6-5x^4=5x^2-1$

II - (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 وأساسها r حيث $u_1\neq 0$

$$\begin{cases} u_7-5u_5-5u_3+u_1=0 \\ u_5+u_3=\beta \end{cases}$$

1- أوجد جميع القيم الممكنة للأساس r

2- نأخذ الأساس $r>2$ أحسب r^2، r^4

3- أكتب عبارة u_1 بدلالة r، β

4- أحسب $\frac{1}{u_1}$ إذا كان $\beta=2$

التمرين 38 (**من إنشاء المؤلف**)

نعتبر المتتالية العددية من أجل كل $\forall n\in N$ المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة التالية

$$u_n=S_n-(n-1)(n+1)$$

نعتبر المتتالية (k_n)

$$\begin{cases} k_0=2 \\ k_{(n)}+1=k_{(n+1)}+u_n \end{cases}$$

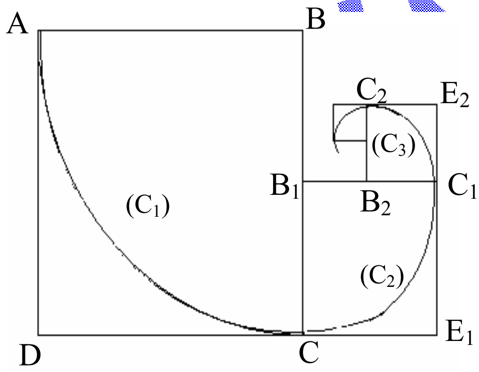
1- حدد عبارة وطبيعة u_n علما أن (k_n) متتالية ثابتة

2- أوجد عبارة S_n وبين أن S_n هو مجموع متتالية حسابية يطلب تحديد حدها الأول z_0 وأساسها r' وعدد الحدود المراد جمعها علما أن الحد الأول هو z_0

3- أثبت أن M_n هو مجموع متتاليتين إحدهما متتالية هندسية ذات n حدا الأولى يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول h_0 حيث $M_n = 2^n + S_n - 1$

التمرين 39

$ABCD$ مربع طول ضلعه 2. (C_1) ربع الدائرة التي مركزها B وتشمل النقطتين A و C
B_1 منتصف القطعة $[BC]$ ، C_1 و E_1 نقطتان حيث $CB_1C_1E_1$ مربع و (C_2) ربع الدائرة التي مركزها B_1 وتحدها النقطتين C و C_1 .
B_2 منتصف القطعة $[B_1C_1]$ ونرسم (C_3) بنفس الطريقة السابقة .... (أنظر الشكل)



نضع u_n طول ربع الدائرة (C_n) حيث $n \geq 1$

1- أحسب u_1 ، u_2 ، u_3.

2- عبر عن الحد u_n بدلالة n.

3- أحسب طول الخط الحلزوني المكون بـــ n مربع.

التمرين 40

يروي الصفدي أن شيرهام أحد ملوك الفرس أراد أن يكافأة أحد الأشخاص على ابتكاره لعبة الشطرنج فقال له أطلب ما شئت فقال ذالك الرجل أطلب حبة قمح في الخانة الأولى من رقعة الشطرنج والضعف مقابل الثانية وضعف الخانة الثانية مقابل الخانة الثالثة وهكذا........ فابتسم الملك لهذا الطلب البسيط

1- ماهو عدد خانة الشطرنج

2- ما نوع هذه المتتالية

3- عين عبارة الحد العام

4- أحسب عدد حبات القمح في الخانة 16، 24 ، 64

5- إذا علمت أن 1 طن يستهلك (2×10^{7}) حبة ، ماهو بالتقريب عدد الأطنان التي ينبغي أن يعطيها الملك لصاحبها .

4-تمارينات حول الاعمال الموجهة

التمرين 41

a ، b ، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما

$$\begin{cases} a\times b\times c=-21 \\ a+b+c=9 \end{cases}$$

أوجد الوسط الحسابي (b) ثم استنتج الحدين a ، c

❧❧❧❧❧❧

التمرين 42

a ، b ، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية حيث

$$\begin{cases} a+b+c= 24 \\ a^2+b^2+c^2 =210 \end{cases}$$

نفرض أن المتتالية متناقصة ماهو أساس هذه المتتالية

استنتج الحدود a، b، c

❧❧❧❧❧❧

التمرين 43

a، b ، c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية

اثبت أن الأعداد الحقيقية (b^2+bc+c^2) ، (c^2+ac+a^2) ، (a^2+ab+b^2)

هي حدود متتابعة من متتالية حسابية

❧❧❧❧❧❧

التمرين 44

بين أن الأعداد الحقيقية التالية هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية

$A= (\alpha^2-2\alpha-1)^2$, $B=(\alpha^2+1)^2$, $C=(\alpha^2+2\alpha-1)^2$

حيث α عدد حقيقي

التمرين 45

عين ثلاثة أعداد متعاقبة من متتالية هندسية تحقق

$$\begin{cases} a\times b\times c=-27 \\ a+b+c=-13 \end{cases}$$

التمرين 46

β عدد حقيقي

بين أن الأعداد الحقيقية C ، B ، A هي حدود متتالية من متتالية حسابية

$$A=\frac{2\beta^2-\beta+1}{2\beta^2-\beta} \quad ، \quad B=\frac{2\beta}{2\beta-1} \quad ، \quad C=\frac{\beta+1}{\beta}$$

حيث $\beta\neq 0$ و $\beta\neq\frac{1}{2}$

التمرين 47

u_3 ، u_2 ، u_1 حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق $u_1\times u_2\times u_3=19683$

أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 إذا علمت أن أساس هذه المتتالية هو 9

التمرين 48

بين أنه اذا كان c ، b ، a ثلاثة أعداد حقيقة حدود متعاقبة بهذا الترتيب تشكل لمتتالية هندسية فإنه

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$$

أوجد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276

التمرين 49 (من إنشاء المؤلف)

ليكن γ ، β ، α أعدد حقيقية حيث

$$\alpha=x+3 \quad ، \quad \beta=x-1 \quad ، \quad \gamma=x-5+16+\frac{16}{x+3}$$

أثبت أنه إذا كان $x \neq -3$ فإن γ ، β ، α بهذا الترتيب تشكل ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية
أوجد أساس هذه المتتالية

التمرين 50 (**من إنشاء المؤلف**)

أثبت أنه إذا كان c ، a ، b ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن

$$b\ ,\ a+b\ ,\ c+2a+b$$

تشكل ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية

VII- الحلـــــــــــــــــــــــول

1- حل تمارينات المتتاليات العددية

2- حل تمارينات المتتاليات الحسابية

3- حل تمارينات المتتاليات الهندسية

4- حل تمارينات الأعمال الموجهة

1- حل تمارينات المتتاليات العددية

الحل 1

$n=0 \qquad u_0=2(0)-7=0-7=-7$

$n=1 \qquad u_1=2(1)-7=2-7=-5$

$n=2 \qquad u_2=2(2)-7=4-7=-3$

$n=3 \qquad u_3=2(3)-7=6-7=-1$

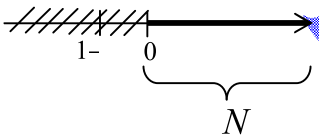
$n=4 \qquad u_4=2(4)-7=8-7=1$

الحل 2

1- إيجاد مجموعة التعريف المتتالية (u_n)

تكون (u_n) معرفة إذا كان $n+1\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\neq -1$



$n\in N$ ومنه $V=\{N\}$

2- حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2

$$u_1=\frac{2(1)+1}{1+1}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2} \qquad ، \qquad u_0=\frac{2(0)+1}{0+1}=\frac{0+1}{1}=1$$

$$u_2=\frac{2(1)+1}{2+1}=\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3}$$

3- لنبين أن (u_n) متزايدة

- حساب $u_{(n+1)}$

$$u_{(n+1)}=\frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1}=\frac{2n+2+1}{n+1+1}=\frac{2n+3}{n+2}$$

- حساب $u_{(n+1)}-u_n$

$$u_{(n+1)}-u_n=\frac{2n+3}{n+2}-\frac{2n+1}{n+1}=\frac{(2n+3)\,(n+1)-(n+2)\,(2n+1)}{(n+2)\,(n+1)}$$

$$u_{(n+1)}-u_n=\frac{2n^2+2n+3n+3-(2n^2+4n+n+2)}{(n+2)\,(n+1)}$$

$$u_{(n+1)}-u_n=\frac{2n^2+2n+3n+3-2n^2-4n-n-2}{(n+2)\,(n+1\,)}=\frac{1}{(n+2)\,(n+1)}$$

- دراسة إشارة الفرق $(u_{(n+1)}-u_n)$

$\forall\, n\in N \quad (n+2)\,(n+1)>0$

ومنه $\forall\, n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n>0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

الحل 3

لنبين أن (u_n) متتالية متناقصة

لدينا

$$u_{(n+1)}-u_n=\frac{-1}{2}(u_n^2+2u_n+4)-u_n=\frac{-1}{2}(u_n^2+2u_n+4+2u_n)$$

$$u_{(n+1)}-u_n=\frac{-1}{2}[u_n\,(u_n+2)+2(u_n+2)]=\frac{-1}{2}(u_n+2)\,(u_n+2)$$

$$u_{(n+1)}-u_n=\frac{-1}{2}(u_n+2)^2$$

لدينا $\forall\, n\in N \quad (u_n+2)^2>0$

$\forall\, n\in N \quad u_{(n+1)}-u_n<0$

إذن (u_n) متتالية متناقصة

الحل 4

إيجاد n بدلالة x

لدينا

$$h_n = (x-y)n - yx^2 + xy^2 + x - y$$
$$h_n = (x-y)n - yx(x-y) + (x-y)$$
$$h_n = (x-y)n - (x-y)(xy + x - y)$$
$$h_n = (x-y)(n - xy + 1)$$
$$h_n = 0 \Leftrightarrow (x-y)(n - xy + 1) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ \text{أو} \\ n-xy+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y \\ n = xy-1 \end{array}\right. \qquad n = x \times x - 1$$

ومنه $n = x^2 - 1$ وهو المطلوب

الحل 5

1- تحديد طبيعة المتتالية (d_n)

لدينا

$$d_n + 1 = \frac{d_n - 1}{4} \Leftrightarrow 4(d_n + 1) = d_n - 1 \Leftrightarrow 4d_n + 4 = d_n - 1$$

$$4d_n - d_n = -4 - 1$$
$$3d_n = -3$$
$$d_n = -1$$

ومنه (d_n) متتالية ثابتة

2- تحديد طبيعة المتتالية (u_n)

لدينا

$$u_{(n+1)} - u_n = \frac{n+1}{3} - \frac{n}{3} = \frac{n+1-n}{3} = \frac{1}{3}$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 0$

3- تحديد طبيعة المتتالية (B_n)

$$\frac{B_{(n+1)}}{B_n} = \frac{2^{(n+1)}}{2^n} = \frac{2^n \times 2^1}{2^n} = 2^n \times 2^1 \times 2^{-n} = 2$$

ومنه (B_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $B_0=1$

الحل 6

1- حساب الحدود l_1 ، l_2 ، l_3

لدينا $l_n = n\,2^n\,l_{(n-1)}$

$$n=1 \qquad l_1=1\times 2^1\times l_0=2^1\times 1=2$$
$$n=2 \qquad l_2=2\times 2^2\times l_1=2\times 2^2\times 2^1\times 1=2^2\times 2^1\times 2\times 1=16$$
$$n=2 \qquad l_3=3\times 2^3\times l_2=3\times 2^3\times 2^2\times 2^1\times 2\times 1=2^3\times 2^2\times 2^1\times 3\times 2\times 1=384$$

2- استنتاج عبارة l_n

$$n=n \qquad l_n=(2^n\times 2^{n-1}\times\dots\dots\times 2^2\times 2^1)\times(n\times\dots\dots\times 3\times 2\times 1)$$

لدينا $Delta = 1\times 2\times 3\times\dots\dots\times n$

ولدينا حسب المعطيات

$$2^n\times 2^{n-1}\times\dots\dots 2^2\times 2^1=2^{n+(n-1)+\dots\dots+3+2+1}=2^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

ومنه

$$l_n=\text{Delta}\times 2^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

الحل 7

1- حساب α و β

$$u_n=\frac{\alpha}{(2n-1)}+\frac{\beta}{(2n+1)}=\frac{\alpha(2n+1)+\beta(2n-1)}{(2n+1)\ (2n-1)}=\frac{2\alpha n+\alpha+2\beta n-\beta}{(2n-1)\ (2n+1)}$$

$$u_n=\frac{2(\alpha+\beta)n+(\alpha-\beta)}{(2n-1)\ (2n+1)}=\frac{2}{(2n-1)\ (2n+1)}=\frac{0n+2}{(2n-1)\ (2n+1)}$$

بالمقارنة نجد $\quad 2(\alpha+\beta)n + (\alpha-\beta) = 0n + 2$

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta)n = 0\,n \\ \text{و} \\ \alpha-\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \text{و} \\ \alpha-\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\,\alpha \\ \text{و} \\ \alpha - (-\alpha) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -\,\alpha \\ \alpha + \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\,\alpha \\ 2\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\,\alpha \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

ومنه

$$\forall n \in N \quad u_n = \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}$$

2 - إيجاد عبارة الحد العام f_n بدلالة n

لدينا

$$f_n = \sum_{h=1}^{h=n} u_h = u_1 + u_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + u_n$$

و من جهة أخرى لدينا

$$\forall n \in N \quad u_n = \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}$$

$$n=1 \quad u_1 = 1 - \frac{1}{3} \quad ; \quad n=2 \quad u_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \quad ; \quad n=3 \quad u_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$n=n-2 \qquad u_{(n-2)} = \frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3} \quad ; \quad n=n-1 \qquad u_{(n-1)} = \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}$$

$$n=n \qquad u_n = \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}$$

بجمع الحدود طرفا لطرف نجد

$$u_1+u_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n = f_n$$

$$f_n = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \ldots\ldots + \cancel{\frac{1}{2n-5}} - \cancel{\frac{1}{2n-3}} + \cancel{\frac{1}{2n-3}} - \cancel{\frac{1}{2n-1}} + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}$$

ومنه

$$f_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

ꝏꝏꝏꝏꝏꝏ

الحل 8

1- حساب الحدود u_4، u_3، u_2، u_1، u_0

لدينا

$$u_n = \frac{n^4-2n^3+11n^2+14n+24}{24}$$

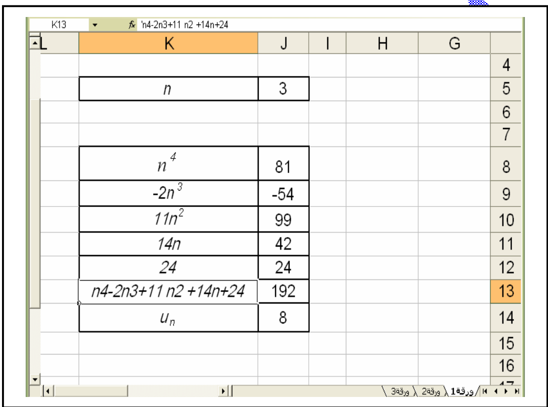
$n=0 \quad u_0=[(0)^4-2(0)^3+11(0)^2+14(0)+24]/24 = 24/24 = 1$
$n=1 \quad u_1=[(1)^4-2(1)^3+11(1)^2+14(1)+24]/24 = 48/24 = 2$
$n=2 \quad u_2=[(2)^4-2(2)^3+11(2)^2+14(2)+24]/24 = 96/24 = 4$

$n=3 \quad u_3=[(3)^4-2(3)^3+11(3)^2+14(3)+24]/24 = 192/24 = 8$
$n=4 \quad u_3=[(4)^4-2(4)^3+11(4)^2+14(4)+24]/24 = 384/24 = 16$

2- حساب أي حد بواسطة **Excel**

حاول تنشيط الخلايا وفق الجدول التالي

اسم الخلية	المحتوى	شرح
J8	= J5^4	حساب n^4
J9	= -2*j5^3	حساب $-2n^3$
J10	=11*j5^2	حساب $11n^2$
J11	=14*j5	حساب $14n$
J12	24	24
J13	= SUM(J8:J12)	$n^4-2n^3+11n^2+14n+24$
J14	= j13/24	$[n^4-2n^3+11n^2+14n+24]/24$
J5	نضع في البداية القيمة 0	من أجل إدخال قيمة n
K8	'-2n³	$-2n^3$



1- وبعدها نبدأ نغيير في كل مرة الخلية J5 وتأخذ القيم 1،0 ، 2، 3، 4، 5، 6 والناتج النهائي هو الخلية J14.

2- الخلايا K8 إلى K11 يجب أن تبدأ بالعلامة ' لأن مابعها كتابة نص وليس تنشيط خلية (خلايا خاملة).

3- تخمينا لعبارة الحد u_n

نلاحظ أن $(u_0;\ u_1;\ u_2;\ u_3;\ u_4\ \ldots\ldots) = (1;\ 2;\ 4;\ 8;16\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

ينتج أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ وأساسها يساوي 2 ومنه عبارة الحد العام هي

$$u_n=u_0\times r^n=1\times 2^n=2^n$$

3- حساب u_2، u_3، u_4

$u_2 = 2^2 = 4$; $u_3 = 2^3 = 8$; $u_4 = 2^4 = 16$

إذن العلاقة المستنتجة صحيحة.

الحل 9

لدينا $u_n= (1,01)^n-1000n$

1- حساب الحدود من u_0 إلى u_{20}

حاول تنشيط الخلايا حسب الجدول التالي مستعيينا بالتمارين السابق

E6 fx un= (1,01)n-1000n

$u_n = (1,01)^n - 1000n$

n	(1.01)^n	$1000n$	u_n
1	1.01	1000	-998.99
2	1.0201	2000	-1998.9799
3	1.030301	3000	-2998.969699
4	1.04060401	4000	-3998.959396
5	1.05101005	5000	-4998.94899
6	1.061520151	6000	-5998.93848
7	1.072135352	7000	-6998.927865
8	1.082856706	8000	-7998.917143
9	1.093685273	9000	-8998.906315
10	1.104622125	10000	-9998.895378
11	1.115668347	11000	-10998.88433
12	1.12682503	12000	-11998.87317
13	1.13809328	13000	-12998.86191
14	1.149474213	14000	-13998.85053
15	1.160968955	15000	-14998.83903
16	1.172578645	16000	-15998.82742
17	1.184304431	17000	-16998.8157
18	1.196147476	18000	-17998.80385
19	1.20810895	19000	-18998.79189
20	1.22019004	20000	-19998.77981

2- إثبات أن $u_{(n+1)} - u_n= 0,01(1,01n-100000)$

$u_{(n+1)}- u_n=[(1,01)^{n+1}-1000(n+1)] - [(1,01)^n-1000n]$

$u_{(n+1)}- u_n=[1,01 (1,01)^n-1000n-1000)]- [(1,01)^n-1000n]$

$u_{(n+1)}- u_n=1,01 (1,01)^n-1000n-1000) - (1,01)^n+1000n$

$u_{(n+1)}- u_n= (1,01)^n(1,01 -1)-1000$

$u_{(n+1)}- u_n= 0.01(1,01)^n-1000$

$u_{(n+1)} -u_n= 0,01(1,01^n-100000)$

3- البحث عن n_0 بحيث يكون من أجل $n\geq n_0$ لدينا $u_{(n+1)} - u_n\geq 0$

$u_{(n+1)} - u_n= 0,01(1,01^n-100000) \geq 0$

$0,01(1,01^n-100000) \geq 0 \Rightarrow 1,01^n-10^5 \geq 0$

$1,01^n \geq 10^5 \Rightarrow 1,01^n \geq (1,01)^{1157,039} \Rightarrow n \geq 1157,039$

إبتدا من $n_0=1158$ يكون $u_{(n+1)} - u_n\geq 0$

❧❧❧❧❧❧

الحل 10

1- حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2

لدينا العلاقة $u_n= n^3-5n^2+6n+3$

$n=0 \quad u_0= (0)^3-5(0)^2+6\,(0)+3 =0-0+0+3=3$

$n=1 \quad u_1= (1)^3-5(1)^2+6(1)+3 =1-5+6+3= 5$

$n=2 \quad u_2= (2)^3-5(2)^2+6(2)+3 =8-20+12+3= 3$

المتتالية (u_n) ليست ثابتة لأن $u_0 \neq u_1$

2- تحلل u_n-3 إلى جداء عوامل

نضع $P(n) = u_n -3$

$P(n) = (n^3-5n^2+6n+3) - 3 = n^3-5n^2+6n = n\,(n^2-5+6)$

من السؤال 1- ينتج أن

$P(0) = u_0 -3 = 3-3 =0$ (0 هو جذر لـ $P(n)$)

$P(2) = u_2 -3 = 3-3 =0$ (2 هو جذر لـ $P(n)$)

إذن

$P(n) = (n-0)(n-2)(n-n_0)= n(n-2)(n- n_0) = n\,(n^2-5+6) = n\,(n-2)(n-3)$

بالمقارنة ينتج أن $n_0 = 3$

3- حدود المتتالية (u_n) التي تساوي 3 هي $n=0$ ، $n=2$ ، $n= 3$

&&&&&&

2–حل تمارينات المتتاليات الحسابية

الحل 11

1– حساب الحدين u_0 ، u_1

لدينا $u_n=3n-1$

$n=0 \quad u_0=3(0)-1=0-1=-1$

$n=1 \quad u_1=3(1)-1=3-1=2$

2– استنتاج الأساس r

$r = u_1 - u_0=2-(-1)1=2+1=3$

الحل 12

1– حساب r

لدينا $u_n= u_1+(n-1)r$

$n=11 \quad u_{11}= u_1+10\,r$

$u_{11}- u_1=10\,r \Rightarrow r = (u_{11}- u_1)/10 = (7-(-3))/10 = (7+3)/10 = 10/10$

$r = 1$

2– حساب الحد u_6

$n=6 \quad u_6= u_1+5r = -3+5(1) = -3+5= 2$

الحل 13

إجاد قيمة الحد العشرين في متتالية حدها الأول l_1

لدينا $l_n=\{ 2 ,4 ,6 , 8,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$l_1=2$ ، $l_2=4$ ، $l_3=6$ ،$l_4=8$

$r_1= l_2-l_1=4-2=2$ ، $r_2= l_3-l_2=6-4=2$ ، $r_3= l_4-l_3=8-6=2$

نلاحظ أن $r_1=r_2=r_3$ ومنه نستنتج أن هذه الحدود تشكل حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها هو $r=2$

لدينا من عبارة الحد العام $l_n=l_1+(n-1)\,r$

$l_n=2+(n-1)\,r=2+2n-2=2n$

من أجل $n=20 \quad l_{20}=2(20) = 40$

الحل 14

نفرض أن الحد الأول هو α_1 و الحد الذي يليه هو α_2 فيكون $\alpha_1\times\alpha_2=992$

علما أن $\alpha_1=\alpha$ و $\alpha_2=\alpha+1$

$$\alpha(\alpha+1)=992$$
$$\alpha^2+\alpha=992$$
$$\alpha^2+\alpha-992=0$$
$$a=1\quad;\quad b=1\quad;\quad c=-992$$
$$\Delta=(b)^2-4\times a\times c=1^2-4\times1\times(-992)=3969=63^2>0$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما

$$\alpha'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}=\frac{-1-\sqrt{3969}}{2\times 1}=\frac{-1-63}{2}=\frac{-64}{2}=-32$$

$$\alpha''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}=\frac{-1+\sqrt{3969}}{2\times 1}=\frac{-1+63}{2}=\frac{62}{2}=31$$

إذا كان $\alpha=31$ $\alpha_1=31$ و $\alpha_2=32$

إذا كان $\alpha=-32$ $\alpha_1=-32$ و $\alpha_2=-31$

ومنه الحدين هما $(\alpha_1,\alpha_2)=\{(31,32),(-32,-31)\}$

الحل 15

لتكن 3، a، b، c، 19 خمسة حدود متعاقبة من متتالية حسابية

باستعمال الوسط الحسابي نجد

لدينا

$(3,a,b)$ $\quad 2a=3+b \longrightarrow 1$

(a,b,c) $\quad 2b=a+c \longrightarrow 2$

$(b,c,19)$ $\quad 2c=b+19 \longrightarrow 3$

بجمع 1 و3 طرفا لطرف نجد

$$2a+2c=2(a+c)=(b+19)+(3+b)=b+3+19+b=22+2b$$

نعوض العلاقة 2 ($2b=a+c$) فنجد

$$2(a+c)=22+2b$$
$$2(2b)=22+2b=2(11+b)$$
$$2b=11+b$$

$2b-b=11$
$b=11$

حسب العلاقة 1 نجد أن

$2a=3+b = 3+11 = 14 \Rightarrow a = 14/2 = 7$

ومن العلاقة 3 نجد أن

$2c=b+19 = 11+19 = 30 \Rightarrow c = 30/2 = 15$

ومنه $(3, a, b, c, 19) = (3,7,11,15,19)$

الحل 16

1- حساب الأساس

نفرض أن أساس هذه المتتالية هو r فيكون

$u_1 + u_2+u_3+u_4 = -10$
$u_1 + (u_1+r) + (u_1+2r) + (u_1++3r) = -10$
$4u_1+6r = -10$
$2(2u_1+3r) = 2 \times (-5)$
$2u_1+3r = -5$
$3r = -5 - 2u_1$

$$r = \frac{-5-2u_1}{3} = \frac{-5-2(\frac{1}{2})}{3} = \frac{-5-1}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

2- عبارة الحد العام

لدينا من عبارة الحد العام $u_n=u_1+(n-1)r$

$$u_n = \frac{1}{2} + (n-1)(-2)$$

$$u_n = \frac{1+2(n-1)(-2)}{2} = \frac{1-4(n-1)}{2} = \frac{1-4n+4}{2} = \frac{5-4n}{2}$$

3- تعين رتبة الحد الذي قيمته $\frac{-395}{2}$

نفرض أن $u_n = \frac{-395}{2}$ ونبحث عن قيمة n

$$u_n = \frac{5-4n}{2} = \frac{-395}{2} \Rightarrow 5-4n = -395$$

$-4n = -395 - 5 = -400$

$(-4)n = (-4) \times 100 \Rightarrow n = 100$

4- حساب المجموع

$$S=\frac{100}{2}\,(u_1+u_{100}) = 50\left(\frac{1}{2}-\frac{395}{2}\right)= 50\,\frac{1-395}{2} = 50\,\frac{-394}{2}$$

$$S = 50 \times (-197) = -9850$$

الحل 17

1- حساب الحد $u_{(n+90)}$

لدينا $u_n = 2n+1$

من أجل $(n+90)$ $u_{(90+1)}=2(n+90)+1$

$u_{(90+1)}=2n+180+1$

$u_{(90+1)}=2n+181$

2- حساب الحد $u_n + u_{(n+90)}$

$u_n= (2n+181)+(2n+1) + u_{(n+90)}$

$u_n= 4n+182 + u_{(n+90)}$

3- نفرض أن الحد الذي نبدأ به u_n وبما أننا نريد حساب 90 حد أي أن الحد الخير هو $u_{(n+90)}$

$$S = \frac{90}{2}\,(u_n+u_{(n+90)})= 209250$$

$45\,(u_n+u_{(n+90)}) = 209250$

$45\,(u_n+u_{(n+90)}) = 45 \times 4650 \Rightarrow 4n+182 = 4650$

$4n = 4650-182 = 4468= 4 \times 1117 \Rightarrow n = 1117$

الحل 18

1- حساب الأساس

لدينا $u_1=10$

$u_1+u_2+u_3 = u_4+u_5+u_6 -27$

باستعمال الوسط الحسابي نجد

$2u_2= u_1+ u_3$

$2u_5 = u_4+ +u_6$

$2\,u_2 + u_2 = 2\,u_5+ u_5 -27$

$3\,u_2= 3\,u_5-27 = 3\,(u_5 -9)$

$u_2 = u_5 -9$

من أجل $n=2$ $u_2= u_1+r = 10+r$

من أجل $n=5$ $u_5= u_1+4r = 10+4r$

$10+r = 10+4r -9$

$10+r = 1+4r$

$4r - r = 9 \Rightarrow \quad 3r=9 \Rightarrow \quad r= 3$

الحل 19

1– حساب الحد المتساوي البعد عن الطرفين بدلالة S_1 و S_2

نفرض أن الحد الأول هو u_0 فيكون

$$S_1 = u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6 = \frac{7}{2}(u_0 + u_6) \longrightarrow 1$$

$$S_2 = u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12} = \frac{7}{2}(u_6 + u_{12}) \longrightarrow 2$$

بجمع 1 و2 نجد

$$S_1 + S_2 = \frac{7}{2}[(u_0 + u_6) + (u_6 + u_{12})]$$

$$2(S_1 + S_2) = 7(u_0 + 2u_6 + u_{12})$$

من أجل $n=6 \quad u_6=u_0+6r$

من أجل $n=12 \quad u_{12}=u_0+12r$

$$2(S_1 + S_2) = 7[u_0 + 2u_6 + (u_0+12r)]$$

$$2(S_1 + S_2) = 7(2u_6+2u_0+12r) = 7[2u_6+2(u_0+6r)]$$

$$2(S_1 + S_2) = 7(2u_6+2u_6) = 7(4u_6) = 7\times2\times2u_6$$

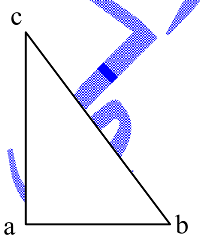
$$S_1 + S_2 = 14u_6$$

$$S_1 + S_2 = 14u_6 \Rightarrow \quad u_6 = \frac{S_1+S_2}{14}$$

2– حساب u_6 من أجل $S_1=7$ و $S_2=77$

$$u_6 = \frac{S_1+S_2}{14} = \frac{7+77}{14} = \frac{84}{14} = 6$$

الحل 20



لدينا حسب نظرية فيثاغورس

$$(ac)^2+(ab)^2=(bc)^2 \longrightarrow 1$$

ولدينا من جهة أخرى ab , ac , bc

$ac=ab+r\ ;\ bc=ab+2r$ حيث r هو أساس المتتالية

نعوض ac و bc في 1 فينتج أن

$$(ab+r)^2+(ab)^2= (ab+2r)^2$$
$$(ab)^2 +2r(ab) +r^2 +(ab)^2 = (ab)^2+4r(ab) +4r^2$$
$$(ab)^2+2r(ab) +r^2+ (ab)^2 - (ab)^2-4r(ab) -4r^2 =0$$
$$(ab)^2-2r(ab) +3r^2 =0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية ذات المتغيير ab

$$\Delta= (-2r)^2-4\times1\times(-3r^2) = 4r^2+12r^2=16r^2 =(4r)^2 > 0$$

المعادلة تقيل حلين متمايزين هما

$$ab' = \frac{2r+4r}{2\times 1} = \frac{6r}{2} = 3r \qquad ab'' = \frac{2r-4r}{2\times 1} = \frac{-2r}{2} = -r$$

$ab=-r$ مرفوض لأن ab عبارة عن طول

$$ab=3r\ ;\quad ac=ab+r= 3r+r=4r\ ;\quad bc=ab+2r = 3r+2r= 5r$$

نلاحظ أن

$$ab =3r \Rightarrow \quad r= \frac{ab}{3}$$

&&&&&&

الحل 21

1– لنبين أن (u_n) متتالية حسابية

$$u_{(n+2)} = 2u_{(n+1)}-u_n$$
$$2u_{(n+1)}=u_n +u_{(n+2)}$$

و هذه العلاقة تحقق الوسط الحسابي للحدود $u_{(n+2)}$ ، $u_{(n+1)}$ ، u_n اذن (u_n) متتالية حسابية

2– تعين n

حساب الاساس

$$r= u_2-u_1 = \frac{-7}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-7-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

عبارة u_n

$$u_n = \frac{3}{2} +(n-1)(-2) = \frac{1}{2}(1-4n)$$

$$u_1+ u_2+ u_3+ \dots\dots\dots\dots +u_n = -110$$

$$\frac{n}{2}(u_1+ u_n) = -110$$

$$\frac{n}{2}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(1-4n)\right]= -110$$

$$\frac{n}{4}[3+(1-4n)] = -110$$

$$\frac{n}{4}(4-4n) = -110$$

$$\frac{n}{4}\times 4(1-n) = -110$$

$$n(1-n) = -110$$

$$n^2-n-110 =0$$

نجد n بحل المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول

$a=1 \quad ; \quad b=-1 \quad ; \quad c=-110$

$\Delta=(b)^2-4\times a\times c=(-1)^2-4\times 1\times(-110)=1+440=441=21^2>0$

المعادلة تقبل حلين متمايزين

$$n'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}=\frac{1+\sqrt{441}}{2\times 1}=\frac{1+21}{2}=\frac{22}{2}=11$$

$$n''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}=\frac{1-\sqrt{441}}{2\times 1}=\frac{1-21}{2}=\frac{-20}{2}=-10$$

$n=11$ مقبول لأن n عدد طبيعي

الحل 22

I -1- حساب الحد الاول والأساس r

$u_1+r=u_2=3 \Rightarrow u_5=(u_2)^2=9$

$u_5=9 \qquad u_1+4r=9 \longrightarrow 1$

$u_2=3 \qquad u_1+r=3 \longrightarrow 2$

بطرح 1 و2 طرفا لطرف نجد

$u_5-u_2=(u_1+4r)-(u_1+r)=9-3=6$

$u_1+4r-u_1-r=6$

$4r-r=6$

$3r=6 \Rightarrow r=2$

من 2 ينتج $u_1=3-r=3-2=1$

I -2- حساب المجموع

$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

$S_n=\frac{n}{2}[1+1+2(n-1)]=\frac{n}{2}(2+2n-2)=n^2$

II -1- إثبات العبارة $h_n=(n-1)^2$

$h_n=S_n-u_n=n^2-(2n-1)=n^2-2n+1=(n-1)^2$

II -2- ايجاد المجموع A_n بدلالة n

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$h_2 + h_3 + h_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_n + n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

علما أن

$$A_n + n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$A_n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - \frac{6n^2}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)-6n^2}{6}$$

$$A_n = \frac{n(2n^2-3n+1-6n)}{6} = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6}$$

الحل 23

$$u_n = u_{(n-1)} + n(-1)^{n-1}$$
$$u_{(n}+1_{)} = u_n + (n+1)(-1)^n$$
$$u_{(n+2)} = u_{(n+1)} + (n+2)(-1)^{n+1} = [u_n + (n+1)(-1)^n] + (n+2)(-1)^{n+1}$$
$$u_{(n+2)} = u_n + (-1)^n\,(n+1-n-2)$$
$$u_{(n+2)} = u_n + (-1)^n\,(-1)$$
$$u_{(n+2)} = u_n + (-1)^{n+1}$$

$II-1$ - طبيعة المتتالية (l_n)

$$l_h = u_{(2h+1)}$$
$$h=h+1 \quad l_{(h+1)} = u_{(2(h+1)-1))} = u_{(2h+2-1)} = u_{(2h+1)}$$
$$n = 2h-1 \quad u_{(2h-1+2)} = u_{(2h+1)} + (-1)^{2h-1+1}$$
$$n = 2h-1 \quad u_{(2h+1)} = u_{(2h+1)} + (-1)^{2h} = u_{(2h+1)} + 1 \quad \{\forall\ h \in N (-1)^{2h} = 1\}$$
$$l_{(h+1)} = l_h + 1$$

ومنه (l_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$

$II-1$ - طبيعة المتتالية (m_n)

$$l_h = u_{(2h)}$$
$$h=h+1 \quad l_{(h+1)} = u_{2(h+1)} = u_{2h+2}$$
$$n = 2h \quad u_{(2h+2)} = u_{(2h)} + (-1)^{2h+1} = u_{(2h)} + (-1)^{2h}(-1) = u_{(2h)} + (-1)$$
$$u_{(2h+2)} = u_{(2h)} - 1$$

ومنه (m_n) متتالية حسابية أساسها $r'=-1$

$II-2$ -حساب الحد العام بدلالة h

$$h=0 \quad m_0 = u_0 = 0$$
$$m_h = m_0 + hr' = 0 - h = -h \quad (r'=-1)$$
$$h=1 \quad l_1 = u_0 = 0$$
$$l_h = l_0 + hr = 0 + h = h \quad (r=1)$$

II – 3 - إثبات العلاقة $\forall h \in N \quad l_h + m_h = G$

$m_h + l_h = -h + h = 0$

II – 4 - حساب المجموع S_n

لدينا

$m_h + l_h = u_{(2h-1)} + u_{(2h)} = 0 \Rightarrow u_{(2h-1)} = -u_{(2h)}$

$n = 2h \qquad u_n = -u_{(n-1)}$

$u_1 = -u_0 = 0 \;;\; u_2 = -u_1 = 0 \;;\; u_3 = -u_2 = 0$

$S_n = 0$

الحل 24

$$\alpha_n = \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1999} \Leftrightarrow 2n-1 = 1999$$

$$2n = 1999 - 1 = 2000 = 2 \times 1000 \Rightarrow n = 1000$$

إذن الحد $\frac{1}{1999}$ هو حد من حدود هذه المتتالية

II- 1– إثبات أن (u_n) متتالية حسابية

$$u_n = \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\frac{1}{2n-1}} = 2n-1$$

حساب الحد $u_{(n+1)}$

$$u_{(n+1)} = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$$

حساب الحد $u_{(n+1)} - u_n$

$$u_{(n+1)} - u_n = (2n+1) - (2n-1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

$$u_0 = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{-1} = -1$$

II- 2 – عبارة المجموع S_n بدلالة n

$$u_0 + u_n = -1 + 2n - 1 = -2 + 2n = 2(n-1)$$

$$2\,S_n = n(u_0 + u_n) = 2n(n-1) \Rightarrow S_n = n^2 - n$$

II- 2 – حساب المجموع M_n

لدينا

$$u_n = \frac{1}{\alpha_n} \Rightarrow u_n \times \alpha_n = 1$$

$M_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1$

$M_n = 1 \times (n+1) = 1 + n$

الحل 25

1- لبرهن أن $u_1+u_2+u_4+u_5=5u_3$

لدينا من الوسط الحسابي (u_1,u_2,u_3) ، (u_2,u_3,u_4) ، (u_3,u_4,u_5)

$2u_2=u_1+u_3 \longrightarrow \quad 1$

$2u_3=u_2+u_4 \longrightarrow \quad 2$

$2u_4=u_3+u_5 \longrightarrow \quad 3$

بجمع 2 و 3 طرفا لطرف نجد

$2(u_3+u_4)= u_2+u_4+u_3+u_5$

ولدينا من جهة أخرى $u_3=u_1+2r$ و $u_4= u_3+r$

$2(u_3+ u_3+r)= u_2+u_4+u_3+u_5$

$2(2u_3+r)= u_2+u_4+u_3+u_5$

$4u_3+2r= u_2+u_4+u_3+u_5$

بإضافة u_1 بين طرفي المعادلة نحصل على

$4u_3+2r+ u_1= u_1+ u_2+u_4+u_3+u_5$

$4u_3+ u_3= u_1+ u_2+u_4+u_3+u_5$

$5u_3 = u_1+ u_2+u_4+u_3+u_5$

$5u_3 = u_1+ u_2+u_4+u_3+u_5 = 10 = 5\times 2 \Rightarrow u_3 = 2$

2- لبرهن أن $u_1+ u_5 =2u_3$

بجمع 1 و 3 طرفا لطرف نجد

$2(u_2+u_4)= u_5+u_3+u_3+u_1$

$2(u_2+u_4)= u_5+2u_3+u_1$

$u_1+u_5=2(u_2+u_4)- 2u_3 = 2(2u_3)- 2u_3 = 4u_3 - 2u_3 = 2u_3$

3- حساب u_1

$u_1+ u_5 = 2u_3 \Rightarrow u_1 = 2u_3 - u_5 = 2(2)-(8) = 4-8 = -4$

4- إيجاد قيمة الحد u_2

من العلاقة 1 $2u_2=u_1+u_3$

$2u_2=u_1+u_3 = -4+2 =-2 \Rightarrow \quad u_2=-1$

5- استنتاج قيمة الحد u_4

$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5 = 10 \Rightarrow u_4 = 10 -(u_1+u_2+u_3++u_5)$

$u_4 = 10 -(-4-1+2+8) = 10-5= 5$

3– حل تمارينات المتتاليات الهندسية

الحل 26

1– حساب الحد الأول

نفرض أن الحد الأول هو u_0 و الأساس هو r فيكون

$$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4 = 1984$$
$$u_0+(u_1\times r)+(u_2\times r^2)+(u_3\times r^3)+(u_4\times r^4) = 1984$$
$$u_0(r+r^2+r^3+r^4) = 1984$$
$$u_0(2+4+8+16) = 1984$$
$$31\, u_0 = 31\times 64 \Rightarrow u_0 = 64$$

الحل 27

نفرض أن الحدود هي u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 ، u_6

$$\begin{cases} u_0+u_1+u_2 = 7 \\ u_4+u_5+u_6 = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0(1+r+r^2) = 7 \\ u_4(1+r+r^2) = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0(1+r+r^2) = 7 \longrightarrow 1 \\ u_0\, r^4(1+r+r^2) = 112 \longrightarrow 2 \end{cases}$$

بقسمة 2 على 1 طرفا لطرف نجد

$$\frac{u_0\, r^4(1+r+r^2)}{u_0(1+r+r^2)} = \frac{112}{7} \Leftrightarrow r^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \\ r = +2 \end{cases}$$

$r = -2$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة

من العلاقة 1 ينتج أن $u_0(4+2+1)=7 \Rightarrow 7u_0=7 \Rightarrow u_0=1$

الحل 28

نفرض أن الحد الذي نبدأ به هو u_n فيكون

$$S_7 = u_n \frac{r^7-1}{r-1} = u_1\, r^{(n-1)} \frac{2^7-1}{2-1} = u_1\, 2^{(n-1)}(128-1) = u_1\, 2^{(n-1)}127$$

$$S_7 = \frac{127}{2} \Leftrightarrow \; = \frac{2^n \times 127}{64 \times 2} = \frac{127}{2} \Leftrightarrow 2^n = 64 \;\Rightarrow\; n = 6$$

$$u_6 = u_1\, r^5 = \frac{1}{64} \times 2^5 = \frac{2^5}{2^6} = \frac{2^5 \times 1}{2^5 \times 2} = \frac{1}{2}$$

الحل 29

نفرض أن الحدود هي 3 ، a ، b ، c ، 12

باستعمال الوسط الهندسي للحدود $(3,a,b)$ ، (a,b,c) ، $(b,c,12)$

$a^2 = 3 \times b \longrightarrow 1$

$b^2 = a \times c \longrightarrow 2$

$c^2 = 12 \times b \longrightarrow 3$

بضرب 1 في 3 طرفا لطرف نجد

$a^2 \times c^2 = b^2 \times 36 \Leftrightarrow (a \times c)^2 = b^2 \times 36 \Leftrightarrow (b^2)^2 = b^2 \times 36$

$b^4 = b^2 \times 36 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$ أو $b = -6$

$b=-6$ مرفوض لأن الحدود موجبة

$a^2 = 3b \Rightarrow a^2 = 18 = 9 \times 2 = 3^2 \times 2 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$a^2 = 12b \Rightarrow a^2 = 72 = 36 \times 2 = 6^2 \times 2 \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$

الحل 30

1- حساب الحد الذي رتبة 10

نفرض أن الحد الأول هو u_0 فيكون

$u_n = u_0\, r^n = (-2)\,(3)^n$

$n = 10 \quad u_{10} = (-2)\,(3)^{10}$

2- نفرض أن $u_n = -162$ ونبحث عن n

$u_n = -162 \Leftrightarrow (-2)\,(3)^n = -162 = (-2) \times (81) = (-2)\,(3)^4$

$(3)^n = (3)^4 \Rightarrow n = 4$

إذن العدد(- 162) هو حد من حدود هذة المتالية

الحل 31

1- إثبات أن المتتالية (g_n) متتالية هندسية

$$g_n = u_n - u_{(n-1)}$$
$$g_{(n+1)} = u_{(n+1)} - u_n \longrightarrow 1$$

ولدينا من جهة أخرى $u_n = \frac{1}{2}\left[u_{(n-1)} + u_{(n-2)}\right]$

من أجل $n = n+1$ $u_{(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\left(u_n + u_{(n-1)}\right)\right]$ نعوض هذه العلاقة في 1

$$g_{(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\left(u_n + u_{(n-1)}\right)\right] - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + u_{(n-1)} - 2u_n\right) = \frac{1}{2}\left(u_{(n-1)} - u_n\right)$$

$$g_{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(u_n - u_{(n-1)}\right) = \frac{-1}{2} g_n$$

ومنه (g_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{-1}{2}$

2- استنتاج عبارة (g_n) بدلالة a، b و n

$$g_2 = u_2 - u_1 = b - a$$

$$g_2 = g_1 \times r \Rightarrow g_1 = g_2 / r \Rightarrow g_1 = \frac{a-b}{\frac{-1}{2}} \Rightarrow g_1 = -2(a-b)$$

$$g_n = g_1 \, r^{(n-1)} = -2(a-b)\left(\frac{-1}{2}\right)^{(n-1)}$$

الحل 32

1- حساب المجموع S_n

$$1 = \frac{1}{9}\left(10^1 - 1\right) \quad ; 11 = \frac{1}{9}\left(10^2 - 1\right) \quad ; 111 = \frac{1}{9}\left(10^3 - 1\right)$$

$$\underbrace{11\ldots\ldots\ldots1111}_{n} = 1 = \frac{1}{9}\left(10^n - 1\right)$$

$$S_n = \frac{1}{9}\left(10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10^n\right) - n \frac{1}{9}$$

$$B_n = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10^n$$

B_n عبارة عن مجموع متتالية هندسية حدها الأول 10 وأساسها 10

$$S_n = \frac{1}{9}\left[\frac{10}{9}\left(10^n - 1\right) - n\right]$$

-2

نفرض أن الحد الأول هو α_1 و الحد الذي يليه هو α_2 فيكون $\alpha_1 \times \alpha_2 = 1111122222$

علما أن $\alpha_1 = \alpha$ وَ $\alpha_2 = \alpha + 1$

$$\alpha(\alpha+1) = 1111122222$$
$$\alpha^2 + \alpha = 1111122222$$
$$\alpha^2 + \alpha - 1111122222 = 0$$
$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = -1111122222$$
$$\Delta = (b)^2 - 4 \times a \times c = 1^2 - 4 \times 1 \times (1111122222) = 4444488889$$
$$\Delta = (66667)^2 > 0$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين

$$\alpha' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-1-\sqrt{4444488889}}{2 \times 1} = \frac{-1-66667}{2} = -33334$$

$$\alpha'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-1+\sqrt{4444488889}}{2 \times 1} = \frac{-1+66667}{2} = 33333$$

$\alpha = -33334$ مرفوض لأن β جداء عددين طبيعيين متتاليين

$\alpha = 33333$ فيكون $\alpha_1 = \alpha = 33334$ وَ $\alpha_2 = \alpha + 1 = 3333+1 = 33334$

ومنه العددين هما $(\alpha_1, \alpha_2) = \{ (33333, 33334 \}$

&&&&&&

الحل 33

1- إثبات أن المتتالية (h_n) متتالية هندسية

$$h_n = u_n + 3$$
$$h_{(n+1)} = u_{(n+1)} + 3 = 2u_n + 3 + 3 = 2(u_n + 3) = 2h_n$$

ومنه (h_n) متتالية هندسية أساسها 2

2- عبارة h_n و u_n بدلالة n

$$h_1 = u_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$
$$h_n = h_1 2^{(n-1)} = 4\, 2^{(n-1)} = 2^2\, 2^{(n-1)} = 2^{2+n-1} = 2^{(n+1)}$$
$$h_n = u_n + 3 \Rightarrow u_n = h_n - 3 = 2^{(n+1)} - 3$$

3- حساب S_n

$$S_n = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_n = h_1 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 4(2^n - 1)$$

4- اثبات أن $P^n=4(2^n-1)-3n$

$P_n = u_1+u_2+................................+u_n$
$P_n = (h_1-3)+ (h_2-3)+(h_3-3)+................................ +(h_n-3)$
$P_n = h_1+h_{2+}h_3+................................ +h_n+(3-3-3-.........-3)$
$P_n = S_n-3n$
$P_n = 4(2^n-1) -3n$

الحل 34

1- اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

لدينا $v_n =u_n+(an-1)$

$v_{(n+1)} =u_{(n+1)}+(a(n+1)-1)$
$v_{(n+1)} =u_{(n+1)}+(an+a-1)$
$2v_{(n+1)} =2u_{(n+1)}+2(an+a-1))$
$2u_{(n+1)}= u_n-(2n+3\ )$ ولدينا من جهة أخرى
$2v_{(n+1)} = u_n-(2n+3)+2(an+a-1))$
$2v_{(n+1)} = u_n-(2n+3)+2an+2a-2 = u_n-(2n+3)+ an+an +2a-1-1$
$2v_{(n+1)} =(u_n+ an -1)-(2n+3)+an +2a-1= v_n -(2n+3)+an +2a-1$
$2v_{(n+1)} = v_n +an-2n-3+2a-1= v_n +(a-2)n-4+2a$
$2v_{(n+1)} = v_n +(a-2)n-2(2-a)$

$$v_{(n+1)}= \frac{1}{2}[v_n +(a-2)n-(2-a)] = \frac{1}{2}v_n +[\frac{1}{2}(a-2)n-2(2-a)]$$

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية وجب $(a-2)n-2(2-a)=0$

$$(a-2)n-2(2-a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ \text{و} \\ 2-a=0 \end{cases} \Rightarrow a= 2$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساس هو $\frac{1}{2}$

حساب الحد الأول $v_0=u_0+-1= 2-1=1$

2- استنتاج عبارة u_n

$$v_n=v_0\ (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^n$$

$$v_n =u_n +(an-1\ ) \Rightarrow u_n = v_n-(an-1\ ) = (\frac{1}{2})^n-2n+1$$

ومنه

$$v_n = \frac{1}{2^n}-2n+1$$

3- اثبات عبارة T_n

$v_n = u_n+(2n-1) \Rightarrow u_n= v_n-(2n-1) = = v_n-w_n$

نضع $w_n=2n-1$ حيث (w_n) متتالية حسابية حدها الأول 1- وأساسها 2

$T_n=u_0+u_1+u_2+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_n$ لدينا

$T_n=(v_0-w_0)+(v_1-w_1)+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+(v_n-w_n)$

$T_n=(v_0+v_1+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+v_n)-(w_0+w_1+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+w_n)$

$T_n=(v_0+v_1+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+v_n)-(w_0+w_1+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+w_n)$

$S_n=w_1+w_2+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+w_n$ نضع

$T_n=Q_n-S_n$

حيث T_n عبارة عن طرح بين مجموع متتاليتن الأولى حسابية هو S_n والثانية هندسية هو Q_n

$$Q_n=v_0\frac{(\frac{1}{2})^{(n+1)}-1}{(\frac{1}{2})-1}=2-(\frac{1}{2})^n$$

$$S_n=\frac{(n+1)}{2}(-1+(-1+2n)=\frac{(n+1)}{2}(-2+2n)=\frac{(n+1)}{2}\,2\,(n-1)$$

$S_n=(n+1)(n-1)=n^2-1$

$$T_n=Q_n-S_n=2-(\frac{1}{2})^n-(n^2-1)=2-(\frac{1}{2})^n-n^2+1=3-(\frac{1}{2})^n-n^2$$

الحل 35

I – 1– اثبات عبارة u_n

$n=0 \quad u_1=2u_0+3n+1=2u_0+3(0)+1$

$n=1 \quad u_2=2u_1+3n+1=2u_1+3(1)+1$

$n=2 \quad u_3=2u_2+3n+1=2u_2+3(2)+1$

$\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$n=n-1 \quad u_n=2u_{(n-1)}+3(n-1)+1$

بجمع الحدود طرفا لطرف نجد

$u_1+u_2+\dots\dots+u_n=2(u_0+u_1+\dots\dots\dots+u_{(n-1)})+3(0+1+\dots\dots+(n-1))+n$

$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+u_n$ لدينا

$S_n=2(u_0+u_1+\dots\dots\dots+u_{(n-1)})+3(1+\dots\dots\dots+(n-1))+n+2u_n-2u_n$

$S_n=2(u_0+u_1+\dots\dots\dots+u_{(n-1)}+u_n)+3(1+\dots\dots\dots+(n-1))+n+-2u_n$

$$S_n=2S_n-2u_n+3\frac{n+1}{2}(1+n-1)+n=2S_n-2u_n+3\frac{n+1}{2}n+n$$

$$2u_n = S_n + \frac{n}{2}(3n+5) \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}\left[S_n + \frac{n}{2}(3n+5)\right]$$

$$2u_n = S_n + \frac{n}{2}(3n+5) \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}\left[S_n + \frac{n}{2}(3n+5)\right]$$

$$S_n = 2S_n - 2u_n + \frac{n}{2}(3n+3+2) = 2S_n - 2u_n + \frac{n}{2}(3n+5)$$

II – 1- اثبات أن (h_n) متتالية هندسية

لدينا

$h_n = u_n + 3n+4$

$h_{(n+1)} = u_{(n+1)}+3(n+1)+4 = 2u_n+3n+1+3(n+1)+4 = 2u_n+3(n+n+1)+5$

$h_{(n+1)} = 2u_n+3(2n+1)+5 = 2u_n+6n+3+5 = 2u_n+6n+8$

$h_{(n+1)} = 2(u_n+3n+4) = 2\,h_n$

ومنه (h_n) متتالية هندسية أساسها $Base=2$

حساب الحد الأول

$h_0 = u_0+3(0)+4 = 1+4 = 5$

II – 2- التحقق بطريقة حسابية من وجود الأساس

$n=0 \quad u_1 = 2u_0+3(0)+1 = 2(1)+0+1 = 2+1 = 3$

حساب الحد الثاني

$h_1 = u_1+3(1)+4 = 3+3+4 = 10$

$$Base = \frac{h_1}{h_0} = \frac{10}{5} = 2$$

II – 3- عبارة h_n ، u_n و S_n بدلالة n

$h_n = h_0\,(Base)^n = 5(2)^n$

$h_n = u_n + 3n+4 \Rightarrow u_n = h_n-(3n+4) = 5(2)^n-(3n+4)$

$$S_n = 2u_n - \frac{n}{2}(3n+5) = 2[5(2)^n-(3n+4)] - \frac{n}{2}(3n+5)$$

الحل 36

I – 1- تعين العدد الحقيقي a

(k_n) متتالية ثابتة إذاوفقط إذا كان $k_{(n+1)}=k_n=k_0=a$

$k_{(n-1)}-3k_n=3 \Leftrightarrow a-3a=3 \Rightarrow -2a=3$

$$a = \frac{-3}{2}$$

II-1- اثبات أن (j_n) متتالية هندسية

حتى تكون (j_n) متتالية هندسة وجب تحقيق الشرط $j_{(n+1)}=j_n \times r$

لدينا

$$j_n = \frac{1}{3}k_n+\frac{1}{2}$$

$$j_{(n+1)} = \frac{1}{3}k_{(n+1)}+\frac{1}{2}$$

$$k_{(n+1)} = \frac{1}{3}(k_n-3)$$

$$n=n+1 \quad k_n-3k_{(n+1)}=3 \quad \Rightarrow \quad k_{(n-1)}-3k_n=3$$

$$j_{(n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}k_n + \frac{-2+3}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}k_n+\frac{1}{2}\right)= \frac{1}{3}j_n$$

$$j_{(n+1)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(k_n-3)+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}k_n -1\right)+ \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}k_n -1+\frac{3}{2}\right)$$

ومنه (j_n) متتالية هندسة أساسها $r= \frac{1}{3}$

II-2- عبارة j_n و k_n بدلالة n و a

$$j_0 = \frac{1}{3}k_0 +\frac{1}{2} = \frac{1}{3}a +\frac{1}{2} = \frac{2a+3}{6}$$

$$j_n = j_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2a+3}{6}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لدينا

$$j_n = \frac{1}{3}k_n+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}k_n = j_n- \frac{1}{2}$$

$$k_n =3\left(j_n- \frac{1}{2}\right)= 3\left[\left[\left(\frac{2a+3}{6}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]- \frac{1}{2}\right]$$

3-II- عبارة L_n و S_n

$$L_n=j_0\times j_1\times j_2\times j_3\times\dots\dots\dots\times j_n$$

$$L_n=j_0\times(j_0\times r)\times(j_0\times r^2)\times\dots\dots\dots\times(j_0\times r^n)$$

$$L_n=(j_0)^{(n+1)}\times[r\times r^2\times\dots\dots\dots\times r^n]$$

$$L_n=(j_0)^{(n+1)}\times[r^{1+2+\dots\dots\dots+n}]$$

$$L_n=(j_0)^{(n+1)}\times[r^{1+2+\dots\dots\dots n}]\quad=(j_0)^{(n+1)}\times r^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

من أجل $a=-3$

$$j_0=\frac{2a+3}{6}=\frac{2(-3)+3}{6}=\frac{-6+3}{6}=\frac{-3}{6}=\frac{-1\times3}{2\times3}=\frac{-1}{2}$$

$$L_n=\left(\frac{-1}{2}\right)^{(n+1)}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

$$S_n=(j_0)^2+(j_1)^2+\dots\dots\dots+(j_n)^2$$

$$S_n=(j_0)^2+(j_0r)^2+(j_0r^2)^2+\dots\dots\dots+(j_0r^n)^2$$

$$S_n=(j_0)^2+(j_0)^2(r^2)^1+(j_0)^2(r^2)^2+\dots\dots\dots+(j_0)^2(r^2)^n$$

$$S_n=(j_0)^2[1+(r^2)^1+(r^2)^2+\dots\dots\dots+(r^2)^n]$$

$$S_n=(j_0)^2[1+(r^2)^1+(r^2)^2+\dots\dots\dots+(r^2)^n]$$

$$S_n=(j_0)^2[1\frac{(r^2)^{(n+1)}-1}{(r^2)-1}]$$

$$(r^2)-1=\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=\frac{1}{9}-1=\frac{1-9}{9}=\frac{-8}{9}$$

$$S_n=\left(\frac{-1}{2}\right)^2\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}-1}{\left(\frac{-8}{9}\right)}\right]=\frac{1}{4}\times\frac{-9}{8}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}-1\right]=\frac{-9}{32}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}-1\right]$$

الحل 37

- 1-I

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+x+2x\frac{2}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

2-I- اثبات أن $x^6-5x^4=5x^2-1$

$$\frac{x^3+\frac{1}{x^3}}{x+\frac{1}{x}}=5 \Leftrightarrow \frac{\frac{x^6+1}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x}}=5 \Leftrightarrow \frac{x^6+1}{x^3}\times\frac{x}{x^2+1}=5$$

$$\frac{x^6+1}{x^3}\times\frac{x}{x^2+1}=5 \Leftrightarrow \frac{(x^6+1)}{x^2\,(x^2+1)}=5 \Leftrightarrow (x^6+1)=5\,x^2\,(x^2+1)$$

$$(x^6+1)=5\,x^2\,(x^2+1) \Leftrightarrow x^6+1=5\,x^4+5\,x^2 \Leftrightarrow x^6-5\,x^4=5\,x^2-1$$

1-II – ايجاد القيم الممكنة للأساس r

$$\begin{cases} u_7-5u_5-5u_3+u_1=0 \\ u_5+u_3=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\,r^6-5\,u_1r^4-5u_1r^2+u_1=0 \\ u_1r^4+u_1r^2=\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1\,(r^6-5r^4-5r^2+1)=0 \longrightarrow 1 \\ u_1(r^4+r^2)=\beta \longrightarrow 2 \end{cases}$$

من 1 ينتج أن

$r^6-5r^4-5r^2+1=0$

$r^6-5r^4=5r^2-1$

وهي من الشكل $x^6-5\,x^4=5\,x^2-1$ حيث $x=r$

$$\frac{r^3+\frac{1}{r^3}}{r+\frac{1}{r}}=5$$

نضع $y=r+\frac{1}{r}$ يكون لدينا

نستعمل فكرة السؤال I-1 –

$$y^3 = \left(r+\frac{1}{r}\right)^3 = \left(r^3+\frac{1}{r^3}\right)+3\left(r+\frac{1}{r}\right)$$

$$y^3 = \left(r^3+\frac{1}{r^3}\right)+3y \Rightarrow r^3+\frac{1}{r^3} = y^3-3y$$

$$\frac{y^3-3y}{y} = 5 \Leftrightarrow y^3-3y=5y \Leftrightarrow y^3-3y-5y=0$$

$$y^3-3y-5y=0 \Leftrightarrow y^3-8y=0 \Leftrightarrow y(y^2-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ y^2-8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ (y-2\sqrt{2})(y+2\sqrt{2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ y-2\sqrt{2}=0 \\ \text{أو} \\ y+2\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{أو} \\ y=2\sqrt{2} \\ \text{أو} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$$

الحالة 1 $y=0$

$$y = r+\frac{1}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{r^2+1}{r} = 0 \Leftrightarrow r^2+1=0$$

وحل هذه المعادلة مستحيل

الحالة 2 $y=-2\sqrt{2}$

$$y = r+\frac{1}{r} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{r^2+1}{r} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2}\,r = (r^2+1)$$

$$r^2-2\sqrt{2}\,r-1=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين هما $r1=-\sqrt{2}-1 \quad ; \quad r2=1-\sqrt{2}$

الحالة 3 $y=2\sqrt{2}$

$$y = r+\frac{1}{r} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{r^2+1}{r} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,r = (r^2+1)$$

$r^2-2\sqrt{2}\,r+1=0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين هما $r3=\sqrt{2}+1 \quad ; \quad r4=\sqrt{2}-1$

ومنه القيم الممكنة لــ r هي $r=\{-\sqrt{2}-1,\ -\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1\}$

2-II – حساب r^2، r^4

$r=\sqrt{2}+1$ يكون $2>r$

$r^2=(\sqrt{2}+1)^2=2+2\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}+3$

$(r^2)^2=r^4=(2\sqrt{2}+3)^2=8+12\sqrt{2}+9=12\sqrt{2}+17$

3-II – عبارة u_1 بدلالة r، β

من المعادلة 2 ينتج أن

$$u_1(r^4+r^2)=\beta \Rightarrow u_1=\frac{\beta}{r^4+r^2}$$

4-II – حساب $\frac{1}{u_1}$

$$u_1=\frac{\beta}{r^4+r^2}=\frac{2}{(12\sqrt{2}+17)+(2\sqrt{2}+3)}=\frac{2}{14\sqrt{2}+20}=\frac{1}{7\sqrt{2}+10}$$

$$\frac{1}{u_1}=7\sqrt{2}+10$$

الحل 38

1– تحديد عبارة وطبيعة u_n

بما أن (k_n) متتالية ثابتة ينتج أن $k_{(n+1)}=k_n$

$k_{(n)}+1=k_{(n+1)}+u_n \Leftrightarrow k_{(n)}+1=k_n+u_n \Leftrightarrow u_n-1=k_n-k_n=0 \Leftrightarrow u_n=1$

ومنه (u_n) متتالية ثابتة

2– ايجاد عبارة S_n، z_0، r' ، عدد الحدود المراد جمعها

$u_n=S_n-(n-1)(n+1) \Leftrightarrow S_n=u_n+(n-1)(n+1) \Leftrightarrow S_n=1+n^2-1 \Leftrightarrow$

$S_n=n^2$

$n=1 \quad S_1=z_1=(1)^2=1 \Rightarrow z_1=1$

$n=2 \quad S_1=z_1+z_2=(2)^2=4=1+3 \Rightarrow \quad z_2=3$

$r'=z_2-z_1=3-1=2$

$z_n=z_1+(n-1)\, r' = 1+2(n-1)=2n-1$

$n=x \qquad z_x=2x-1$

نفرض أن عدد الحدود هو x ودليل الحد الأخير هو D

لدينا حسب القاعدة

عدد الحدود = [دليل (الحد الأخير) – دليل (الحد الأول)] +1

$x= (D-1)+1 = D-1+1 =D$

$$S_n= \frac{x}{2}(z_1+z_D)= \frac{x}{2}(z_1+z_x)= n^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}(1+(2x-1)) = n^2$$

$$\frac{x}{2}(1+2x-1) = n^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2}(2x) = n^2 \Leftrightarrow x^2= n^2 \Rightarrow x= n$$

ومنه عدد الحدود هو n حدا الأولى

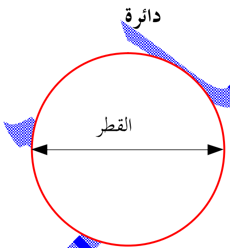
-3

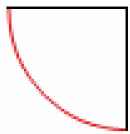
$$M_n =2^n+S_n-1 \Rightarrow M_n - S_n = 2^n -1 = h_n$$

$$h_n=2^n -1 = 1\, \frac{2^n-1}{2-1} = h_0\, \frac{r^n-1}{r-1}$$

بالمقارنة ينتج أنه $h_0=1$ و $r = 2$

الحل 39

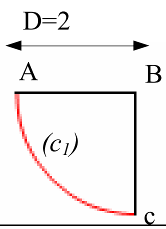




المحيط = القطر × π

$$\text{المحيط} = \frac{\text{القطر}}{4} \times \pi$$

1– حساب u_1 ، u_2 ، u_3



$$u_1 = \frac{2D}{4} \times \pi = \frac{2\times 2}{4} \times \pi = \pi$$

$$u_2 = \frac{2P}{4} \times \pi = \frac{2}{4} \times \pi = \frac{1}{2} \times \pi \qquad P = \frac{D}{2} = \frac{2}{2} = 1$$ حيث

$$u_3 = \frac{2P'}{4} \times \pi = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{1}{2} \times \pi \qquad P' = \frac{P}{2} = \frac{1}{2}$$ حيث

2- عبارة الحد u_n بدلالة n

$$u_n = \frac{1}{2^{(n-1)}} \times \pi = \pi \times 2^{(1-n)} = \pi\, 2\, 2^{(-n)} = 2\pi\,(2^{-})^n = 2\pi\,(\frac{1}{2})^n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية حدها الأول π وأساسها $\frac{1}{2}$

3- حساب طول الخط الحلزوني المكون بـ n مربع

ونقصد به مجموع ربع الدائرة الممثلة بـ (C_1) ومجموع ربع الدائرة الممثلة بـ (C_2) وهكذا إلى غاية ربع الدائرة الممثلة بـ (C_n)

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$$

$$S_n = u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = \pi \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{(\frac{1}{2}) - 1} = -2\pi\,[(\frac{1}{2})^n - 1]$$

الحل 40

-1

عدد خانة الشطرنج هو 8×8 = 64

2- طبيعة المتتالية

$n=1 \quad u_1=1=2^0$

$n=2 \quad u_2=2=2^1$

$n=3 \quad u_2=4=2^2$

$n=4 \quad u_4=8=2^3$

ومنه الحدود تشكل متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $r=2$

3- عبارة الحد العام

$$u_n = u_1 r^{(n-1)} = 1\; 2^{(n-1)} = 2^{(n-1)}$$

4- حساب عدد حبات القمح في الخانة 16، 24 ، 64

$n=16 \quad u_{16}=2^{15}=3278$

$n=24 \quad u_{24}=2^{23}= 838868$

$n=64 \quad u_{64}=2^{63}= 9223372036854775808$

5- عدد الأطنان التي ينبغي أن يعطيها الملك لصاحبها

حساب عدد حبات القمح في كل الخانات

$$S= u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{64} = u_1 \frac{2^{64}-1}{2-1} =(2^{64}-1)$$

$S=18446744073709551615$ (حوالي 18446 تريون حبة)

1طن $\longrightarrow$ حبة (2×10^7)

طن $X \longrightarrow$ حبة S

$$X(2\times10^7) = S \Rightarrow X = \frac{S}{2\times10^7} = \frac{2^{64}-1}{2\times10^7} = \frac{18446744073709551616-1}{2\times10000000}$$

$$X = \frac{18446744073709551615}{20000000} \simeq 922337203685$$

إذن عدد الأطنان التي ينبغي أن يعطيها الملك لصاحبها هي 922337203685 طن حوالي 922 مليار طن

4- حل تمارينات الأعمال الموجه

الحل 41

$$\begin{cases} a\times b\times c=-21 \longrightarrow 1 \\ a+b+c=9 \longrightarrow 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times c=-21/b \\ 2b+b=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3b=3\times 3 \\ a\times c=-21/b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3 \\ a\times c=-21/3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times c=-7 \longrightarrow 3 \\ a+c=6 \longrightarrow 4 \end{cases}$$

من 4 ينتج ($5 \longleftarrow c=6-a$) ونعوض 5 في 3

$$a(6-a)=-7$$
$$a^2-6a-7=0$$
$$(a+1)((a-7)=0 \Leftrightarrow a=-1 \text{ أو } a=7$$

$a=7$ مرفوض لأن المتتالية متناقصة

نعوض $a=-1$ في 5 $c=6-(-1)=6+1=7$

ومنه الحدود هي $(a,b,c)=\{(-1,3,7)\}$

الحل 42

$$\begin{cases} a+b+c=24 \\ a^2+b^2+c^2=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+(a+r)+(a+2r)=24 \\ a^2+(a+r)^2+(a+r)^2=210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+3r=3\times 8 \\ 3a^2+6ar+5r^2=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+r=8 \Rightarrow a=8-r \\ 3(8-r)^2+6(8-r)r+5r^2=210 \end{cases}$$

$$3(8-r)(8-r+2r)+5r^2=210$$
$$3(8-r)(8+r)+5r^2=210$$
$$3(64-r^2)+5r^2=210$$
$$192-3r^2+5r^2=210$$
$$2r^2=210-192=18$$

$$2r^2=2\times 9$$
$$r^2=9 \Rightarrow r=-3$$

$$a=r-8=8-(-3)=8+3=11$$

$b=a+r= 11-3 = 8$ ، $c=a+2r = 11+2(-3)= 11-6 = 5$

ومنه الحدود هي $(a,b,c) =\{ (11,8,5) \}$

الحل 43

نفرض أن $\alpha= a^2+ab+b^2$ ، $\beta =c^2+ac+a^2$ ، $\gamma = b^2+bc+c^2$

لدينا $2b=a+c$ ونثبت أن $2\beta= \gamma+\alpha$

$$\alpha+\gamma = a^2+ ab + b^2 + b^2+ bc + c^2 = 2b^2 + a^2+ c^2 + b (a + c)$$
$$\alpha+\gamma = 2b^2 + a^2+ c^2 + b (2b) = 2b^2 + a^2+ c^2 + 2b^2 =4b^2 + a^2+ c^2$$
$$\alpha+\gamma = (2b)^2 + a^2+ c^2 = (a+c)^2 + a^2+ c^2 = a^2+2ac+c^2 + a^2+ c^2$$
$$\alpha+\gamma = 2a^2+2ac+2c^2 = 2(a^2+ac+c^2) = 2\beta$$

ومنه γ ، β ، α ثلاثة أعداد متعاقبة من متتالية حسابية

الحل 44

$$A= (\alpha^2-2\alpha-1)^2 \ , B=(\alpha^2+1)^2 \ , C=(\alpha^2+2\alpha-1)^2$$
$$A+C = (\alpha^2-2\alpha-1)^2 +(\alpha^2+2\alpha-1)^2 = [(\alpha^2-(2\alpha+1)]^2 +[(\alpha^2+(2\alpha-1)]^2$$
$$A+C = [(\alpha^4-2\alpha^2 (2\alpha+1)+ (2\alpha+1)^2] +[(\alpha^4+2\alpha^2 (2\alpha-1)+ (2\alpha-1)^2]$$
$$A+C = [\alpha^4-2\alpha^2 (2\alpha+1)+ (2\alpha+1)^2 + \alpha^4+2\alpha^2 (2\alpha-1)+ (2\alpha-1)^2]$$
$$A+C = [2\alpha^4-2\alpha^2(2\alpha+1+2\alpha-1)+ (4\alpha^2+2\alpha+1) + (4\alpha^2-2\alpha+1)]$$
$$A+C = [2\alpha^4-2\alpha^2(2)+ 8\alpha^2+2] =(2\alpha^4-4\alpha^2+ 8\alpha^2+2)$$
$$A+C =(2\alpha^4+4\alpha^2+2) = 2=(\alpha^4+2\alpha^2+1) = 2 =(\alpha^2+1)^2$$
$$A+C = 2B$$

إذن C ، B ، A ثلاثة أعداد متعاقبة من متتالية حسابية

الحل 45

$$\begin{cases} a\times b\times c=-27 \longrightarrow 1 \\ a+b+c=-13 \longrightarrow 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2\times b=(-3)^3 \\ a+c=-13 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3=(-3)^3 \\ a+c=-13 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-3 \\ a+c=-13 -(-3) = -13+3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times c=9 \longrightarrow 3 \\ a+c=-10 \longrightarrow 4 \end{cases}$$

من 3 ينتج $a = \dfrac{9}{c}$ نعوض a في 4

$$\frac{9}{c}+c = -10 \Leftrightarrow c^2+10c+9 = 0$$

$a=1$; $b'= 5$; $c= 9$

$$\Delta' = (b')^2 - \times a \times c = (5)^2 - \times 1 \times (9) = 25-9 = 16 = (4)^2 > 0$$

المعادلة تقيل حلين متمايزين

$$c'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-5+4}{1} = -1 \quad ; \qquad c' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-5-4}{1} = -9$$

إذا كان c=-1 فإن a= -9

إذا كان c=-9 فإن a= -1

ومنه الحدود هي $(a,b,c) = \{ (-9,-3,-1) , (-1,-3,-9) \}$

ꕤꕤꕤꕤꕤꕤ

الحل 46

$$A+C = \frac{2\beta^2-\beta+1 + (\beta+1)(2\beta-1)}{\beta(2\beta-1)} = \frac{2\beta^2-\beta+1 + 2\beta^2-\beta+2\beta-1}{\beta(2\beta-1)}$$

$$A+C = \frac{2\beta^2-\beta+1}{2\beta^2-\beta} + \frac{\beta+1}{\beta} = \frac{2\beta^2-\beta+1}{\beta(2\beta-1)} + \frac{\beta+1}{\beta}$$

$$A+C = \frac{2\beta^2-\beta+1 + (\beta+1)(2\beta-1)}{\beta(2\beta-1)} = \frac{4\beta^2}{\beta(2\beta-1))} = 2\frac{2\beta\ \beta}{\beta(2\beta-1)} = 2B$$

إذن A ، B ، C ثلاثة أعداد متعاقبة من متتالية حسابية

ꕤꕤꕤꕤꕤꕤ

الحل 47

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = 19683$$

لدينا $u_1 \times u_3 = (u_2)^2$

$$u_2 \times (u_2)^2 = 19683 \Rightarrow (u_3)^2 = 3 \times 27 \times 243 \Rightarrow u_2 = 3 \times 3^3 \times 3^5 = 3^9$$

$$u_2 = (27)^3 \Rightarrow (u_2)^3 = 27$$

$$u_3 = u_2 \times 9 = 27 \times 9 = 243$$

$$u_1 = \frac{u_3}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

الحل 48

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2-ab+ac+ab-b^2+bc+ac-bc+c^2$$
$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2+2ac-b^2+c^2 = a^2+2(b^2)-b^2+c^2$$
$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2+2b^2-b^2+c^2$$
$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$$

البحث عن ثلاثة حدود تحقق

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 78 \longrightarrow 1 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3276 \end{cases}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$
$$78(\alpha-\beta+\gamma) = 3276 \Rightarrow \alpha-\beta+\gamma = 42 \longrightarrow 2$$

بطرح 2 من 1 طرفا لطرف نجد

$$(\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha+\beta+\gamma) = 78-42 = 36$$
$$\alpha-\beta+\gamma-\alpha-\beta-\gamma = 36 \Rightarrow 2\beta = 36 \Rightarrow \beta = 18$$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 78-\beta = 78-18 = 60 \longrightarrow 3 \\ \alpha\times\gamma = \beta^2 = (18)^2 = 324 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة نستعمل طريقة الحل بواسطة الجداءات الشهيرة

$$(\alpha+\gamma)^2 = \alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2 = \alpha^2+\gamma^2+2(324)$$

$$(60)^2 = \alpha^2+\gamma^2+648$$

$$\alpha^2+\gamma^2 = 3600-648 = 2952$$

$$(\alpha-\gamma)^2 = \alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2 = \alpha^2+\gamma^2-2(324)$$

$$(\alpha-\gamma)^2 = 2952-648 = 2304 = (48)^2 = (-48)^2$$

الحالة1 $\alpha-\gamma = 48 \longrightarrow 5$

بجمع 3 و 5 طرفا لطرف نجد

$$(\alpha+\gamma)+(\alpha-\gamma) = 60-48$$
$$\alpha+\gamma+\alpha-\gamma = 12$$
$$2\alpha = 2\times 6 \Rightarrow \alpha = 6$$

نعوض في 3 فنجد

$$\alpha+\gamma = 60 \Rightarrow \gamma = 60-\alpha = 60-6 = 54$$

الحالة2 $\alpha-\gamma = -48 \longrightarrow 6$

بجمع 3 و 6 طرفا لطرف نجد

$$(\alpha+\gamma)+(\alpha-\gamma) = 60+48$$
$$\alpha+\gamma+\alpha-\gamma = 108$$

$$2\alpha = 2 \times 54 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 54$$

نعوض في 3 فنجد

$$\alpha+\gamma = 60 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60 - \alpha \ = 60 - 54 = 6$$

ومنه الحدود هي $(\alpha , \beta ,\gamma) =\{(6 ,18 ,54), (54 ,18 ,6) \}$

الحل 49

$$\alpha\times\gamma = (x+3) \times(x-5+\frac{16}{x+3}) = (x+3) \ \frac{(x+3)(x-5) +16}{(x+3)}$$

$$\alpha\times\gamma = \ x^2-5x+3x-15+16 = x^2-2x+1 = (x-1)^2 \ = \beta^2$$

إذن γ ، β، α تشكل ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية

أساس هذه المتتالية

$$r= \beta -\alpha= (x-1)-(x+3) = x-1-x-3 = -2$$

الحل 50

لدينا $a^2=b\times c$

$$b\times (c+b+2a) = bc +b^2+2ab = a^2+b^2+2ab = a^2+2ab +b^2 = (a+b)^2$$

ومنه $b , a+b , c+2a+b$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية

مصطلحات

الفرنسية	العربية
Suite	متتالية
Terme	حدّ
Arithmetique	حسابية
Base	أساس
Géometrique	هندسية
Somme	مجموع
Decroissante	متناقصة
Croissante	متزايدة
Monotone	رتيبة
Limte	نهاية
Divergente	متباعدة
Convergente	متقاربة
Série	سلسلة
Ordre	ترتيب
رياضيات	علاقة
Expression	تعبير
Comparaison	مقارنة
Valeur	قيمة
Formule	صيغة
Coordonnées	إحداثيات

الفرنسية	العربية
Théorème	نظرية
Nombre	عدد
Réelle	حقيقي
Application	تطبيق
Partie	جزء
Cercle	دائرة
Fonction	دالة
Point	نقطة
Ensemble	مجموعة
Image	صورة
Mathématique	رياضيات
جذر	جذر
Naturel	طبيعي
Action	نشاط
Addition	جمع
Courbe	منحنى
Centre	مركز
Argument	برهان
Index	المحتوى
Définition	[illegible]

الفهـــــــــرس

IV- أعمال موجهة

V- أعمال تطبيقية

VI- التمـــارينات

VII- الحـــــــلول

ملخص للمتتاليات االعددية ، الحسابية و الهندسية

التعريف	متتالية حسابية	متتالية هندسية
العبارة العامة	$\forall n \in N \;:\; u_{(n+1)} = u_n + r$	$\forall n \in N \;:\; u_{(n+1)} = u_n \times r$
الحد العام للمتتالية حدها الأول u_0	$\forall n \in N \;:\; u_n = u_0 + nr$	$\forall n \in N \;:\; u_n = u_0\; r$
الحد العام للمتتالية حدها الأول u_1	$\forall n \in N^* \;:\; u_n = u_1 + (n-1)\, r$	$\forall n \in N^* \;:\; u_n = u_1\; r^{(n-1)}$
الوسط (الحسابي ،الهندسي)	إذا كان a،b،c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية ذات الأساس r (r عدد حقيقي) فإن : $a+c=2b$	إذا كان a،b،c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية ذات الأساس r (r عدد حقيقي) فإن : $a\times c=b^2$
مجموع حدود متتابعة من	$\forall n \in N \;:\; S_n = \dfrac{n}{2}\left(u_0 + u_{(n-1)}\right)$	$\forall n \in N \;:\; S_n = u_0\, \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$
عدد الحدود = [دليل (الحد الأخير) – دليل (الحد الأول)] +1 $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{(n-1)}$		

اتجاه تغير متتالية

الطريقة الأولى

لدراسة تغيرات متتالية نتبع الخطوات التالية

1 – نحسب الحد $u_{(n+1)}$

2– نحسب الفرق $u_{(n+1)}-u_n$

3– معرفة من أجل كل عدد طبيعي n إشارة الفرق $u_{(n+1)}-u_n$:

(u_n) متتالية متزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad u_{(n+1)}-u_n \geq 0$

(u_n) متتالية متناقصة $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad u_{(n+1)}-u_n \geq 0$

(u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad u_{(n+1)}=u_n$

ندرس إتجاه تغيير الدالة f، بحيث $u_n = f(n)$ على المجال $[0,+\infty[$، إذا كانت الدالة f متزايدة، فإن (u_n) متزايدة.

الطريقة الثانية

لدراسة تغيرات متتالية نتبع الخطوات التالية

1 – نحسب الحد $u_{(n+1)}$

2– نحسب حاصل قسمة $u_{(n+1)} / u_n$

3– معرفة من أجل كل عدد طبيعي n إشارة الحاصل $\dfrac{u_{(n+1)}}{u_n}$

(u_n) متتالية متزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n} > 1$

(u_n) متتالية متناقصة $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n} < 1$

(u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad \dfrac{u_{(n+1)}}{u_n} = 1$

الطريقة الثالثة

1– (u_n) متتالية متزايدة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad u_{(n+1)}-u_n > 0$

2– (u_n) متتالية متناقصة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \quad u_{(n+1)}-u_n < 0$

3– (u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $u_{(n+1)}=u_n = \dots\dots\dots = u_2=u_1$

4– في كل الحالات السابقة نقول أن المتتالية رتيبة أي أنها تأخذ اتجاه واحدا فقط إما متزايد وإما متناقصة وإما ثابتة.

في متتالية حسابية

مجموع حدين طرفين يساوي ضعف الحد الوسط

$$U_{(n+1)} + U_{(n-1)} = 2U_n$$

$$a \xleftarrow{-} b \xleftarrow{-} c \qquad a \xrightarrow{+} r \qquad b \xrightarrow{+} r$$

$$\xrightarrow{+} \begin{cases} b=a+r \\ c=b+r \\ c=a+2r \end{cases} \qquad \xrightarrow{-} \begin{cases} a=b-r \\ b=c-r \\ a=c-2r \end{cases}$$

في متتالية هندسية

جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط

$$U_{(n+1)} \times U_{(n-1)} = (U_n)^2$$

$$a \xleftarrow{/} b \xleftarrow{/} c \qquad a \xrightarrow{\times} r \qquad b \xrightarrow{\times} r$$

$$\xrightarrow{\times} \begin{cases} b=a\times r \\ c= b\times r \\ c=a\times r^2 \end{cases} \qquad \xrightarrow{/} \begin{cases} a=\dfrac{b}{r} \\ b=\dfrac{c}{r} \\ a=\dfrac{c^2}{r} \end{cases}$$

نهاية متتالية هندسية

$r>1$	$u_0>0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$	المتتالية (u_n) متباعدة
	$u_0<0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$	المتتالية (u_n) متباعدة
$-1<r<1$		$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$	المتتالية (u_n) متقاربة
$r\leq -1$		$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n= \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$	المتتالية (u_n) متباعدة

المجموع في المتتالية الهندسية يكون بالكيفية التالية

$$S_n = (\text{الحد الأول}) \; \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - (\text{الأساس})} \qquad \text{حيث } (\text{الأساس}) \neq 1$$

$$S_n = (\text{الحد الأول}) \times \text{عدد الحدود} \qquad \text{حيث } (\text{الأساس}) = 1$$

المجموع في المتتالية الحسابية يكون بالكيفية التالية

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \left(\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير} \right)$$

$$S_n = \underbrace{\text{الحد الأول} + \dots\dots\dots\dots + \text{الحد الأخير}}_{\text{عدد الحدود}}$$

بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام في

متتالية حسابية هي

$$\forall \; n > p \qquad u_n = u_p \, (n-p) \, r$$

متتالية هندسية هي

$$\forall \; n > p \qquad u_n = u_p \; r^{(n-p)}$$

النهـــاية