التحليل التوفيقي

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

من إعداد
الطالب وليد سعدي

2019/2018

التحليل التوفيقي

مقدمّة

كثيرًا ما نهتمُّ في مجال الدراسات الاقتصادية والاجتماعية بعملية تكوين مجموعات جزئية من مجموعات أصليّة وفق شروط محددة مُفترضة، كالاهتمام بطبيعة الأشياء، أو العناصر وترتيبها في الوقت نفسه.

كما يمكن أن تختلف الحالات عن بعضها بعضًا بافتراض عدم إمكانية تكرار العناصر في المجموعات الجزئية، أو بإمكانية تكرارها ويساعدنا في دراسة ذلك ما يسمّى بالتحليل التوفيقي.

التحليل التوفيقي

يهتمُّ التحليل التوفيقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضياتيه الّتي تسّهل هذا التكوين من جهة وتمكّن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المواتية (الملائمة) وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحادث، وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوفيقي؛ لهذا تتجلّى ضرورة عرض تلك القواعد الرياضياتيه للاستفادة منها عند التطرق لموضوع الاحتمال وقوانينه.

وعليه فإننا سنتناول في إطار هذا الفصل الموضوعات التالية:

- التراتيب،
- التوافيق.

وقبل التطرق إلى هذين الموضوعين المشكلين لهذا الفصل، لابد من الإشارة إلى نقطتين أساسيتين تشكلان المرتكز الحقيقي للتحليل التوفيقي، وهما مبدأي المجموع وحاصل الضرب.

مبدأ المجموع

إذا كانت A_1 ،...، A_k مجموعات منتهية ومنفصلة مثنى مثنى ($A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$) فإنّ:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k|$$

يسمّى هذا المبدأ مبدأ المجموع.

التحليل التوفيقي

يمكن إثبات مبدأ المجموع بواسطة الاستقراء الرياضياتي على k.
غالبًا ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ المجموع عند حل المسائل:
"إذا كان إنجاز المهمّة A يتطلب إنجاز أي من المهمّات A_1 ،...، A_k وإذا كان لا يمكن إنجاز A_i و A_j في الوقت نفسه لكل $i \neq j$ وكان عدد طرق إنجاز A_t هو n_t لكل عدد طبيعي $1 \leq t \leq k$، فإنّ عدد طرق إنجاز المهمّة A هو $n_1 + \cdots + n_k$ طريقة."

مبدأ حاصل الضرب

إذا كانت A_1 ،...، A_k مجموعات منتهية فإنّ:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$$

يسمّى هذا المبدأ مبدأ حاصل الضرب.
ويمكن بطبيعة الحال إثبات هذا المبدأ وذلك بواسطة الاستقراء الرياضياتي على k.
غالبًا ما نستخدم الصيغة المكافئة التالية لمبدأ حاصل الضرب عند حل المسائل:
"إذا كان إنجاز المهمّة A يتطلب إنجاز المتتالية التالية من المهمات A_1 ،...، A_k (المهمّة A_1 أولاً ثمّ المهمّة A_2 ثانيًا وهكذا) وإذا كان عدد طرق إنجاز المهمّة A_j لا يعتمد على الكيفية التي تمّ بها إنجاز المهمّات A_1 ،...، A_{j-1} لكل عدد طبيعي $2 \leq j \leq k$، وكان عدد طرق إنجاز المهمّة A_i هو n_i لأجل كل $1 \leq i \leq k$، فإنّ عدد طرق إنجاز المهمّة A هو $n_1 \times \cdots \times n_k$ طريقة."

مثال1

لتكن Σ أبجدية عدد حروفها m. جد عدد عناصر Σ_n. حيث Σ_n هي مجموعة الكلمات المشكلة من n حرفًا والتي حروفها من الأبجدية Σ.

حل

لتكن $\Omega=\omega_1\cdots\omega_n$ كلمة من Σ_n. ويمثل ω_i الحرف ذو المرتبة i في الكلمة Ω من الأبجدية Σ لأجل كل i من $\{1,\ldots,n\}$.

عدد طرق اختيار الحرف ω_i هو m طريقة لكل $1\le i\le n$، كما أنّ اختيار الحرف ω_i لا يعتمد على اختيار الحروف التي قبله. إذن استنادًا إلى مبدأ حاصل الضرب نجد $|\Sigma_n|=m^n$ وهو المطلوب.

مثال2

يعمل في مستشفى أربع أطباء وسبع ممرضين وثلاث فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مؤلف من طبيب وممرض وفني؟.

حل

يمكن اختيار الطبيب بأربع طرق ويمكن اختيار الممرض بسبع طرق وأخيرًا يمكن اختيار الفني بثلاث طرق. استنادًا إلى مبدأ حاصل الضرب عدد الطرق الممكنة هو $4\times7\times3=84$ طريقة.

مثال3

كم عددًا مكونًّا من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع رقميه عددًا فرديًا؟.

حل

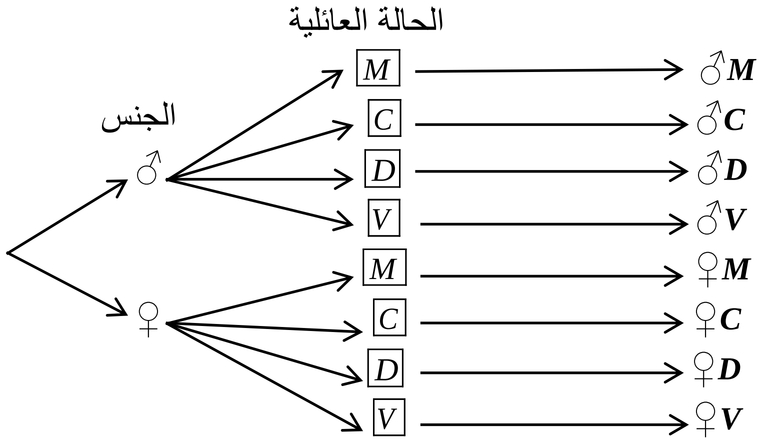
ليكن y هو رقم الأحاد و x هو رقم العشرات. نبدأ باختيار x. يمكن اختيار x من المجموعة $\{1,2,\ldots,9\}$ لا نختر الرقم 0 لأنّه ليس رقمًا معبرًا عندما يكون على يسار أي عدد ومهما كان عدد هذه الأصفار وفي هذا التمرين اشترط أن تكون هذه الأعداد مكونة من رقمين معبرين.

إذن عدد طرق اختيار الرقم x هو تسع طرق. ونلاحظ أنّه إذا كان x فرديًا فإنّه يمكن اختيار y من المجموعة $\{0,2,4,6,8\}$، أمّا إذا كان x زوجيًا فإنّه يمكن

اختيار y من المجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ وبالتالي فإنّ عدد طرق اختيار y بعد x هو 5. إذن عدد الأعداد المطلوبة هو $9\times5=45$ عددًا.

مثال4

لنفترض أننا نودّ تصنيف مجتمع ما وفق الجنس (ذكر♂، أنثى ♀) والحالة العائلية (متزوج M، أعزب C، مطلق D، أرمل V) فعدد الأصناف المختلفة وفق السمتين هو $2\times4=8$ وهذا ما تعكسه الشجرة الموالية:



نلاحظ أنّه لدينا فرعان في المرحلة الأولى وهذا تماشيًا مع أنماط الصفة (الجنس)، في حين أنّ المرحلة الثانية لها أربع فروع وهذا تماشيًا مع أنماط الصفة (الحالة العائلية).

مثال5

في إحدى الشركات الحديثة النشأة توجد وظيفتان شاغرتان لرئيس مصلحة الموظفين ومحاسب، تقدم للوظيفة الأولى خمسة أشخاص وللثانية ثلاثة أشخاص. فيكون عدد الطرق للتعيين في الوظيفتين الشاغرتين كالتالي:

التحليل التوفيقي

خمس طرق لشغل وظيفة رئيس مصلحة الموظفين، وتوجد ثلاث طرق لشغل وظيفة محاسب وذلك من أجل كل طريقة من الطرق الخمسة السابقة فنجد حسب مبدأ حاصل الضرب أنّ عدد الطرق هو $5\times 3=15$ طريقة لشغل هاتين الوظيفتين الشاغرتين.

تمرين1

قررت وزارة الداخلية تمييز سياراتها من خلال وضع ترقيم خاص بها ويتمثل هذا الأخير في حرفين مختلفين (A،...،Z) تتبعها ثلاثة أرقام من $\{0,1,\ldots,9\}$ بحيث لا يكون الرقم الأوّل صفرًا.

فكم عدد اللوحات التي يمكن طبعها لهذه السيارات؟.

حل

باعتبار عدد الحروف من اللغة اللاتينية 26 حرفًا فإنّ الحرف الأوّل يمكن اختياره بـ 26 طريقة، والحرف الثاني يمكن اختياره بـ 25 طريقة، أمّا الرقم الأوّل فيمكن اختياره بـ 9 طرق (باعتبار تواجد الصفر في البداية أمرٌ مستبعد) والرقم الثاني يمكن اختياره بـ 10 طرق والرقم الثالث يمكن اختياره بـ 10 طرق أيضًا وذلك من أجل كل طريقة من الطرق السابقة. وبالتالي فإنّ عدد اللوحات التي يمكن طبعها للسيارات الخاصّة بوزارة الداخلية هو:

$$26\times 25\times 9\times 10\times 10=585000$$

لوحة.

التمرين2

يوجد بمعهد الاقتصاد ثلاثة أقسام: قسم الشعبة العامّة، قسم التخصص، وقسم تقني سامي، وبهذه الأقسام 224، 112، 82، طالب على التوالي ونريد اختيار ممثل لكل قسم لينظمّ إلى مجلس إدارة المعهد بكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء الممثلين للطلاب؟.

حل

يمكن اختيار ممثل قسم الشعبة العامّة بـ 224 طريقة، وممثل التخصص بـ 112 طريقة وأخيرًا ممثل تقني سامي بـ 82 طريقة، وبالتالي وارتكازًا على مبدأ حاصل الضرب توجد $224\times112\times82=2057216$ طريقة لاختيار مجموعة ممثلي هذه الأقسام الثلاثة.

مبدأ التقابل

إذا كان $f:A\to B$ تقابلاً من مجموعة A إلى مجموعة B فإنّ $|A|=|B|$.

نموذج العينة للعد

لتكن $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ مجموعة ذات n عنصرًا. إنّ أخذ عينة من A يعتمد على الإجابة على السؤالين التاليين:

الأوّل: هل ترتيب العناصر مهمٌّ في هذه العينة أم لا؟

الثاني: هل تكرار ظهور عنصر في العينة مقبول أم لا؟.

إذن لدينا أربع حالات، يوضحها المثال التالي، سنتحدث عن كل منها.

مثال

لنعتبر المجموعة التالية $A=\{a_1,a_2,a_3\}$.

يوضح الجدول المعطى أدناه العينات المكونة من عنصرين والمأخوذة من A

	التكرار غير مقبول	التكرار مقبول
الترتيب مهم	$(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_1)$ $(a_2,a_3),(a_3,a_1),(a_3,a_2)$	$(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_3)$ $(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_2,a_3)$ $(a_3,a_1),(a_3,a_2),(a_3,a_3)$
الترتيب غير مهم	$\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}$	$\lfloor a_1,a_1\rfloor,\lfloor a_1,a_2\rfloor,\lfloor a_1,a_3\rfloor$ $\lfloor a_2,a_2\rfloor,\lfloor a_2,a_3\rfloor,\lfloor a_3,a_3\rfloor$

التحليل التوفيقي

لتكن $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ مجموعة ما ذات n عنصرًا.

نسمّي العينة " **ترتيبة بتكرار من الرتبة r من A** " (يمكن لـ r أن يكون أكبر من n) إذا كان يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل: $(x_1,\ldots,x_r)$ بمناقشة مماثلة لما فعلنا في المثال (1) يمكن إثبات أنّ عدد الترتيبات بتكرار من الرتبة r من n والذي نرمز له بالرمز $A_{R_n}^r$ هو n^r. أي:

$$A_{R_n}^r = n^r$$

ونسمّي العينة " **ترتيبة من الرتبة r من A** " $(0\le r\le n)$ إذا كان لا يسمح فيها بالتكرار والترتيب فيها مهم ونكتبها على الشكل: $(x_1,\ldots,x_n)$ مع $x_i\ne x_j$ لكل $i\ne j$ حيث (i,j) تنتمي إلى $(\{1,\ldots,n\})^2$.

مبرهنة

عدد الترتيبات من الرتبة r من n هو:

$$\begin{aligned}A_n^r &= \frac{n!}{(n-r)!}\\ &= n(n-1)\cdots(n-r+1)\end{aligned}$$

إثبات

لتكن $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ مجموعة ذات n عنصرًا ولتكن $(x_1,\ldots,x_n)$ ترتيبة من الرتبة r من A. نلاحظ أنّ:

1- عدد طرق اختيار x_1 هو n

2- عدد طرق اختيار x_2 هو $n-1$

3- عدد طرق اختيار x_3 هو $n-2$

$\vdots$

r- عدد طرق اختيار x_r هو $n-r+1$

التحليل التوفيقي

وحيث أنّ الاختيارات مستقلّة في كل مرحلة، فحسب مبدأ حاصل الضرب يكون عدد الترتيبات من الرتبة r من n هو العدد $n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

نسمّي الترتيبة من الرتبة n من A تبديلة من A وكذا نرمز لعدد التبديلات من الرتبة n بالرمز P_n وتكون $P_n = n!$.

نسمّي " **توفيقة من الرتبة r من A** " $(0 \leq r \leq n)$ كل مجموعة جزئية من A ذات r عنصرًا. أي هي كل عينة من A سعتها r الترتيب فيها غير مهم ولا يسمح فيها بالتكرار.

نرمز لها كما هو معروف بـ $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

مبرهنة

عدد التوفيقات من الرتبة r من n هو:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

إثبات

إذا كان $r = 0$ فإنّ المجموعة الجزئية الخالية هي الوحيدة التي لا تحوي أي عنصر.

لنفترض إذن أنّ $r > 0$. لاحظ أنّ أيّ مجموعة جزئية عدد عناصرها r تقابل $r!$ ترتيبة من الرتبة r من A.

كذلك يمكننا الحصول على $r!$ ترتيبة من الرتبة r من A مختلفة من أيّ مجموعة جزئية من A عدد عناصرها r. وبناءً عليه فإنّ:

$$A_n^r = C_n^r \times r!$$

وبالتالي:

$$C_n^r = \frac{1}{r!} A_n^r$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

التحليل التوفيقي

مثال5

إذا كانت ورقة اختبار تحوي سبعة أسئلة وكان على الطالب أن يجيب عن خمسة أسئلة فقط، فبكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب على الاختبار؟.

جواب

عدد طرق الإجابة هو $C_7^3 = 21$.

مثال6

يعمل 12 مهندسًا في شركة، ومن أجل تنفيذ أحد المشاريع تريد الشركة اختيار فريق عمل مؤلف من 5 مهندسين.

أ) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل؟

ب) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا أصرّ مهندسان على العمل معًا؟

ج) بكم طريقة يمكن للشركة أن تختار فريق العمل إذا رفض مهندسان أن يعملا معًا؟

حل

أ) عدد الطرق الممكنة هو $C_{12}^5 = 792$.

ب) لنشر بـ a و b إلى المهندسان اللذان يصرّان على العمل معًا. إذا كان a و b ضمن الفريق المختار فإنّ عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو C_{10}^3 ، أمّا إذا كان الفريق المختار لا يتضمن كلاً من a و b فإنّ عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق هو C_{10}^5 . إذن، بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أنّ عدد الطرق الممكنة هو $C_{10}^3 + C_{10}^5 = 120 + 252 = 372$ طريقة.

ج) بالاحتفاظ بنفس الترميز السابق يمكننا القول أنّه إذا كان a ضمن الفريق المختار فإنّ b ليس ضمن الفريق وبالتالي فإنّ عدد الطرق في هذه الحالة هو C_{10}^4 . بالمثل إذا كان b ضمن الفريق المختار فإنّ عدد الطرق هو C_{10}^4 .
أمّا إذا كان الفريق لا يتضمن كلاً من a و b فإنّ عدد الطرق هو C_{10}^5 .

إذن، بالاستناد إلى مبدأ المجموع نجد أنّ عدد الطرق الممكنة هو:

$$C_{10}^4 + C_{10}^4 + C_{10}^5 = 2\times 210 + 252 = 672$$

لتكن $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ مجموعة ذات n عنصرًا. نسمّي " **توفيقة بتكرار من الرتبة r من A** " كلّ عينة من A سعتها r (يمكن لـ r أن يكون أكبر من n) الترتيب فيها غير مهم ويسمح فيها بالتكرار ونكتبها على الشكل $\lfloor x_1,\dots,x_n \rfloor$.

وفقًا لِما ذُكر أعلاه فإنّ $\lfloor a,a,b,c,c,c,d \rfloor$ توفيقة بتكرار من الرتبة 7 من أي مجموعة A تحوي المجوعة $\{a,b,c,d\}$. وفيها تكرار كل من a،b،c،d يساوي 2،1،3،1 على الترتيب.

مثال

التوفيقات بتكرار من الرتبة 3 من $\{a,b\}$ هي:

$$\lfloor a,a,a \rfloor, \lfloor a,a,b \rfloor, \lfloor a,b,b \rfloor, \lfloor b,b,b \rfloor$$

مبرهنة

عدد التوفيقات بتكرار من الرتبة r من n هو:

$$K_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

إثبات

لتكن $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ مجموعة من n عنصرًا. لكل توفيقة بتكرار من الرتبة r من A، نكوّن جدولاً مكونًا من n عمودًا وسطرين. نضع في مستطيلات السطر الأوّل من اليسار إلى اليمين العناصر a_1، ...، a_n على الترتيب، ولكل i من $\{1,\dots,n\}$ نضع في المستطيل أسفل a_i نجومًا عددها يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في هذه التوفيقة بالتكرار من الرتبة r من A. نلاحظ أنّ عدد النجوم

في مستطيلات السطر الثاني يساوي r. فمثلاً التوفيقة بتكرار $\lfloor a_1, a_1, a_1, a_3 \rfloor$ من المجموعة $\{a_1, a_2, a_3\}$ يقابلها الجدول التالي:

a_1	a_2	a_3
***		*

وبالعكس، أي جدول عدد النجوم في مستطيلات السطر الثاني فيه r تقابله توفيقة بتكرار من الرتبة r من A وعليه يوجد تقابل بين التوفيقات بتكرار والجداول.
لحساب عدد الجداول نجري التغيير التالي على الجدول:
" نحذف الخطوط الأفقية الثلاثة كما نحذف العناصر من الصّف الأوّل والخطيّن الرأسيين الأوّل والأخير من الجدول ". فمثلاً الجدول السابق يصبح بعد التغيير إلى هذه الشفرة $*{*}{*}||*$ وبالعكس التشفير $|{*}{*}|{*}{*}$ يقابل التوفيقة بتكرار التالية $\lfloor a_2, a_2, a_3, a_3 \rfloor$. إذن استنادًا إلى مبدأ التقابل يكون عدد التوفيقات بتكرار من الرتبة r من n مساويًا لعدد التشكيلات لـ r نجمة و $n-1$ خطًّا رأسيًا. ولحساب هذا العدد نلاحظ أنّه لدينا $n+r-1$ مكانًا، إذا اخترنا r مكانًا للنجوم فستكون الأمكنة الأخرى المتبقية للخطوط الرأسية. وحيث أنّ عدد طرق اختيار r مكانًا من $n+r-1$ مكانًا هو C_{n+r-1}^{r} فإنّ عدد التوفيقات بتكرار من الرتبة r من n هو $K_n^r = C_{n+r-1}^{r}$.

خواص مهمّة

1) $C_n^r = C_n^{n-r}$ ،
2) $C_n^r = \dfrac{n}{n-r} C_{n-1}^{r}$ ، $(r < n)$
3) $C_n^n = C_n^0 = 1$ ،
4) $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$ ،
5) $A_n^r = r! C_n^r$ ،
6) $A_n^0 = C_n^0 = 1$ ،

التحليل التوفيقي

7) $A_n^n = A_n^{n-1} = n! = P_n$.

مبرهنة (متطابقة الكرجي وباسكال)

من أجل كل عددين طبيعيين يحقّقان $n > k \geq 1$ فإنّ المطابقة التالية محقّقة:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

إثبات

لتكن $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ مجموعة عدد عناصرها n. ولتكن B مجموعة جزئية من A عدد عناصرها k $(1 \leq k < n)$. نميّز حالتين: إمّا أن تكون a_n تنتمي إلى B أو لا تنتمي إلى B. حسب مبدأ المجموع فإنّ عدد المجموعات الجزئية من A ذات k عنصرًا يساوي عدد المجموعات الجزئية من A ذات k عنصرًا والتي لا تحوي a_n مضافًا إليه عدد المجموعات الجزئية من A ذات k عنصرًا والتي تحوي a_n.
عدد المجموعات الجزئية الأولى يساوي عدد المجموعات الجزئية من $A \setminus \{a_n\}$ ذات k عنصرًا، إذن يساوي C_{n-1}^k، في حين يساوي عدد المجموعات الجزئية الثانية عدد المجموعات الجزئية من $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ ذات $k-1$ عنصرًا، إذن يساوي C_{n-1}^{k-1} و عليه $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

دستور ثنائي الحد

من أجل كل عددين حقيقيين x و y، وأي عدد طبيعي n فإنّ:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \qquad (*)$$

إثبات

نستدل بالتراجع على n. المبرهنة صحيحة عندما $n = 0$ لأنّ الطرف الأيسر يساوي $(x+y)^0 = 1$، كما أنّ الطرف الأيمن يساوي $C_0^0 x^0 y^0 = 1$.
لنفترض الآن أنّ العلاقة $(*)$ تظل قائمة إلى غاية رتبة ما k، أي أنّ:

$$\left(x+y\right)^{k}=C_{k}^{0}y^{k}+C_{k}^{1}xy^{k-1}+C_{k}^{2}x^{2}y^{k-2}+\cdots+C_{k}^{k}x^{k}$$

ولنثبت أنّ هذه الأخيرة تبقى سارية من أجل الرتبة التي تليها أي $k+1$ نريد إذن إثبات صحة المساواة التالية:

$$\left(x+y\right)^{k+1}=C_{k+1}^{0}y^{k+1}+C_{k+1}^{1}xy^{k}+C_{k+1}^{2}x^{2}y^{k-1}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}x^{k+1}$$

نلاحظ أنّ

$$\left(x+y\right)^{k+1}=\left(x+y\right)\left(x+y\right)^{k}$$

ومن فرضية التراجع نجد

$$\begin{aligned}\left(x+y\right)^{k+1}&=\left(x+y\right)\left[C_{k}^{0}y^{k}+C_{k}^{1}xy^{k-1}+C_{k}^{2}x^{2}y^{k-2}+\cdots+C_{k}^{k}x^{k}\right]\\&=C_{k}^{0}xy^{k}+C_{k}^{1}x^{2}y^{k-1}+\cdots+C_{k}^{k-1}x^{k}y+C_{k}^{k}x^{k+1}+C_{k}^{0}y^{k+1}+\\&\quad+C_{k}^{1}xy^{k}+\cdots+C_{k}^{k-1}x^{k-1}y^{2}+C_{k}^{k}x^{k}y\\&=C_{k}^{0}y^{k+1}+\left(C_{k}^{0}+C_{k}^{1}\right)xy^{k}+\cdots+\left(C_{k}^{k}+C_{k}^{k-1}\right)x^{k}y+C_{k}^{k}x^{k+1}\\&=C_{k+1}^{0}y^{k+1}+C_{k+1}^{1}xy^{k}+\cdots+C_{k+1}^{k}x^{k}y+C_{k+1}^{k+1}x^{k+1}\end{aligned}$$

علمًا أننا حصلنا على المساواة الأخيرة باستخدام متطابقة الكرجي وباسكال

نلاحظ أنّ عدد الحدود المختلفة في تفكيك $\left(x+y\right)^{n}$ يساوي $n+1$.

مثال1

$$2^{n}=\left(1+1\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}$$

$$\left(x-y\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}x^{k}\left(-1\right)^{n-k}\ y^{n-k}$$

لاحظ أنّ 2^{n} هو عدد كل أجزاء أي مجموعة ذات n عنصرًا.

مثال2

$$C_{n}^{0}+C_{n}^{2}+C_{n}^{4}+\cdots=C_{n}^{1}+C_{n}^{3}+C_{n}^{5}+\cdots=2^{n-1}$$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^{*}$.

مبرهنة

إذا كان لدينا n من العناصر المأخوذة من k نوعًا بحيث عدد العناصر المأخوذة من النوع رقم i هو r_i لكل i من $\{1,\ldots,k\}$، فإنّ عدد تشكيلات هذه العناصر يساوي $\dfrac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$.

إثبات

لدينا n مكانًا للعناصر من النوع الأول والتي عددها r_1 يمكن أن نختار r_1 مكانًا من n مكانًا بـ $C_n^{r_1}$ طريقة.

أمّا العناصر من النوع الثاني والتي عددها r_2 يمكن أن نختار r_2 مكانًا من $n-r_1$ مكانًا بـ $C_{n-r_1}^{r_2}$ طريقة بعد اختيار r_1 مكان من n مكان. وعمومًا للعناصر من النوع رقم i والتي عددها r_i يمكن أن نختار r_i مكانًا من $n-(r_1+r_2+\cdots+r_{i-1})$ مكانًا بـ $C_{n-(r_1+r_2+\cdots+r_{i-1})}^{r_i}$ طريقة، لكل i من $\{2,\ldots,k\}$. ومن مبدأ حاصل الضرب ينتج المطلوب.

مثال

كم عدد الكلمات الممكن تشكيلها (أو تكوينها) من حروف كلمة $ABACDDEFA$ ؟

الجواب

عدد الكلمات هو: $30240=\dfrac{9!}{3!\times 2!\times 1!}$ كلمة.

نموذج التوزيع للعد

يهدف هذا البند إلى تقديم نموذج التوزيع للعد.

لدينا r كرة نريد توزيعها على n صندوقًا، ثلاثة أسئلة مهمّة في هذا السياق:

الأوّل: هل الكرات مختلفة أم متطابقة؟

التحليل التوفيقي

الثاني: هل من الممكن أن يحوي الصندوق أكثر من كرة؟
الثالث: هل الصناديق مختلفة أم متطابقة؟
في هذا البند سنفترض أنّ الصناديق مختلفة. إذن لدينا أربع حالات يوضحها المثال التالي:

مثال

يوضح الجدول التالي كل التوزيعات الممكنة لكرتين على ثلاثة صناديق مختلفة.

	لا شروط على عدد الكرات في كل صندوق	كل صندوق يحوي كرة على الأكثر
الكرات مختلفة	$[b_1 b_2]\ [\ ]\ [\ ]$ $[\ ]\ [b_1 b_2]\ [\ ]$ $[\ ]\ [\ ]\ [b_1 b_2]$ $[b_1]\ [b_2]\ [\ ]$ $[b_1]\ [\ ]\ [b_2]$ $[b_2]\ [b_1]\ [\ ]$ $[b_2]\ [\ ]\ [b_1]$ $[\ ]\ [b_1]\ [b_2]$ $[\ ]\ [b_2]\ [b_1]$	$[b_1]\ [b_2]\ [\ ]$ $[b_1]\ [\ ]\ [b_2]$ $[b_2]\ [\ ]\ [b_1]$ $[b_2]\ [b_1]\ [\ ]$ $[\ ]\ [b_1]\ [b_2]$ $[\ ]\ [b_2]\ [b_1]$
الكرات متطابقة	$[bb]\ [\ ]\ [\ ]$ $[\ ]\ [bb]\ [\ ]$ $[\ ]\ [\ ]\ [bb]$ $[b]\ [b]\ [\ ]$ $[b]\ [\ ]\ [b]$ $[\ ]\ [b]\ [b]$	$[b]\ [b]\ [\ ]$ $[b]\ [\ ]\ [b]$ $[\ ]\ [b]\ [b]$

التحليل التوفيقي

ليكن لدينا توزيع لـ r كرة مختلفة $\{b_1,\ldots,b_r\}$ على n صندوق من الصناديق المختلفة $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

نكوّن ترتيبة بتكرار $(x_1,\ldots,x_r)$ من الرتبة r من المجموعة $\{a_1,\ldots,a_n\}$ مستخدمين التوزيع المعطى كما يلي:

x_i هو الصندوق الذي يحوي الكرة b_i لكل i من $\{1,\ldots,r\}$.

وبالعكس، إذا كانت $(x_1,\ldots,x_r)$ ترتيبة بتكرار من الرتبة r من مجموعة الصناديق $\{a_1,\ldots,a_n\}$ فإننا نكوّن توزيعًا للكرات المختلفة $\{b_1,\ldots,b_r\}$ على الصناديق مستخدمين التوزيع التالي:

نضع الكرة b_i في الصندوق x_i لكل i من $\{1,\ldots,r\}$.

وعليه، توزيعات r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة تقابل الترتيبات بتكرار من الرتبة r من n.

وبالمثل يمكن توضيح أنّ توزيعات r كرة مختلفة $\{b_1,\ldots,b_r\}$ على n من الصناديق المختلفة $\{a_1,\ldots,a_n\}$ والتي لا يحوي فيها صندوق أكثر من كرة تقابل الترتيبات من الرتبة r من المجموعة $\{a_1,\ldots,a_n\}$. وعليه، حسب ما سبق ينتج أنّ:

مبرهنة

1) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n صندوقًا مختلفًا يساوي:

$$A^r_{R_n} = n^r$$

2) عدد طرق توزيع r كرة مختلفة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة واحدة، يساوي:

$$A^r_n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

لتكن لدينا r كرة متطابقة موزعة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1,\dots,a_n\}$.
لكل توزيع نأخذ عينة $\lfloor x_1,\dots,x_r \rfloor$ من المجموعة $\{a_1,\dots,a_n\}$ الترتيب فيها غير مهم ويسمح فيها بالتكرار وسعتها r حيث x_1، ...، x_r هي الصناديق التي تحوي الكرات.
وبالعكس، كل عينة $\lfloor x_1,\dots,x_r \rfloor$ سعتها r من المجموعة $\{a_1,\dots,a_n\}$ لا يكون فيها الترتيب مهمًا ويسمح فيها بالتكرار تقابل توزيعًا لكرات متطابقة عددها r على n من الصناديق المختلفة $\{a_1,\dots,a_n\}$ كما يلي:
نوزع الكرات بحيث يكون عدد الكرات في الصندوق a_i يساوي عدد مرات ظهور العنصر a_i في العينة $\lfloor x_1,\dots,x_r \rfloor$. وعليه، يوجد تقابل بين توزيعات r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة $\{a_1,\dots,a_n\}$ والعينات التي سعتها r والتي لا يكون فيها الترتيب مهمًا والمأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n.
لاحظ أنّه إذا كان كل صندوق يحوي كرة على الأكثر، فإنّ العينات في هذه الحالة تكون مجموعات. أمّا إذا لم يكن هناك شروط على عدد الكرات في الصناديق فإنّ العينات في هذه الحالة تكون توفيقات بتكرار. من ذلك وما سبق نستنتج أنّ:

مبرهنة
1) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة يساوي:
$$K_n^r = C_{n+r-1}^r$$
2) عدد طرق توزيع r كرة متطابقة على n من الصناديق المختلفة بحيث لا يحوي أي صندوق أكثر من كرة يساوي:
$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
لنلخّص ما توصلنا إليه:

التحليل التوفيقي

نموذج العينة للعد

	التكرار مقبول	التكرار غير مقبول
الترتيب مهم	ترتيبات بتكرار $A_{R_n}^r = n^r$	ترتيبات $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
الترتيب غير مهم	توفيقات بتكرار $K_n^r = C_{n+r-1}^r$	توفيقات $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

خواص مهمّة

1) $C_n^r = C_n^{n-r}$ ،

2) $C_n^r = \dfrac{n}{n-r} C_{n-1}^r$ ، $(r<n)$

3) $C_n^n = C_n^0 = 1$ ،

4) $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$ ،

5) $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$ ، $(1 \le r < n)$

6) $A_n^r = r! C_n^r$ ،

7) $A_n^0 = C_n^0 = 1$ ،

8) $A_n^n = A_n^{n-1} = n! = P_n$ ،

9) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ ، $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$.

التحليل التوفيقي

نموذج التوزيع للعد

عدد الصناديق هو n / عدد الكرات هو r	لا شروط على عدد الكرات في الصندوق	كل صندوق يحوي كرة على الأكثر
الكرات مختلفة	$A_{R_n}^r = n^r$	$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
الكرات متطابقة	$K_n^r = C_{n+r-1}^r$	$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مصطلحات مهمّة في السحب

"السحب بدون إرجاع": التكرار غير مقبول.

"السحب بإرجاع": التكرار مقبول.

"السحب تلو الأخرى": الترتيب مهم.

"السحب دفعة واحدة": الترتيب غير مهم.