التوبولوجي العام

General Topology

تأليف

أ.د. أحمد عبد القادر رمضان   د. طه مرسي العدوي

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة الملك سعود – فرع القصيم

ما هو التوبولوجى ؟
What is topology?

مـــن المعلوم أن علاقة التطابق congruence لمثلثين في المستوى X تتم بواسطة بعـــض الدوال (التحويلات) مثل دالة الإزاحة ، دالة الانعكاس ، دالة الدوران وهذه الـــدوال تحـــافظ على المسافة وعلى قياس الزوايا وبالتالي فان ا لمسافة تعتبر لا متغير Invariant ولهـــذا فـــان المسافة تسمى خاصية هندسية. الخواص الهندسية هي تلك الخـــواص التي لا تتغير تحت تأ ثير هذه الدوال ، وبمعنى أ خر الخصائص الهندسية هي التي تظل ثابتة تحت تأثير الحركات المتماسكة(انسحاب ، دوران ، انعكاس).
علاقـــة الـــتطابق هـــي علاقـــة تكـــافؤ عـــلى المجموعة X وتجزئ X إلي فصول تكـــافؤ(تطـــابق) وكل فصل تكافؤ هو مجموعة كل الأشكال الهندسية المتطابقة ويمكن القول أن الخواص الهندسية هي تلك الخواص المشتركة بين جميع عناصر فصل التكافؤ الواحـــد. بإدخال دوال متصلة وذات معكوسات متصلة في الهندسة فان وظيفة هذه الدوال هي تجميع كل الأشكال الهندسية المتكافئة في فصل تكافؤ واحد، عملية التعرف على فصول التكافؤ واللامتغيرات هي ما يسمى بعلم التوبولوجى Topology الدوال المتصـــلة ذات المعكوسات المتصلة تعرف باسم الهوميومورفزم Homeomorphism ، والهومـــيومورفزم يحـــافظ عـــلى خاصية الجوار أي النقاط المتجاورة تظل متجاورة، والأشـــياء التي يمكن تحويل إحداها إلى الأخرى بالهوميومورفزم تعرف على أنها فصل تكـــافؤ توبولوجى Topological equivalent class واللامتغيرات ، الخواص الثابتة تحـــت تأثير الحركات المرنة(المط أو اللي) تسمى بالخواص التوبولوجيه Topological properties. يُعرف التوبولوجى على أنه ذلك العلم الذي يهتم بدراسة الخواص التي لا تتغير تحت تأثير دالة الهوميومورفزم والمعنى اللغوي لكلمة توبولوجى هو علم دراسة المكان (الموضع) ولهذا نجد تطابق المعنى اللغوي والعلمي ويمكن القول أن التوبولوجى هو دراسة لعلاقات القرب near relations بين المجموعات والنقاط.

مقدمة الكتاب

الحمـــد لله القائل" قل هل يستوى الذين يعلمون والذين لا يعلمون" والصلاة والسلام على نبينا محمد القائل " من سلك طريقاً يلتمس فيه علما سهل الله له طريقا إلي الجنة".

كلـــنا يعرف ما يعانية طلابنا من مشقة في دراسة العلوم بلغه غير لغتهم ونحن إذ نضع هذا الكتاب باللغة العربية بين يدي طلابنا نهدف في المقام الأول إلي إثراء المكتبة العربية بكتب اكثر تعمقاً واكثر تخصصاً حتى نواكب ركب الحضارة والعلوم ونهدف في المقام الـــثاني إلي أن يكون هذا الكتاب مرجعاً في التوبولوجى العام ، لكونه ضرورياً لطلاب كلـــيات العلـــوم والتربـــية. انطلاقـــاً مـــن ذلك تم وضع هذا الكتاب ليغطى مقرر الـــتوبولوجى ، قدمنا فيه عرض متماسك وشامل للمفاهيم الأساسية ، وحاولنا تقديم أســـهل الطرق وأقصرها في إثبات النظريات ، وتتويجاً لهذا العمل وزيادة في التعمق في فهـــم المقـــرر اعتنينا بكثرة الأمثلة وتنويعها. قدمنا للقارئ في الفصل الأول المفاهيم الأساســـية التي سيحتاجها والتي تمثل العمود الفقري للمادة العلمية لهذا الكتاب ويجد ذلـــك موظفـــاً في الفصـــل الثاني عند تقديم مفهوم الفضاءت التوبولوجية وأنواعها والمفاهيم الأساسية التي تمت دراستها بصورة تفصيلية لأهميتها القصوى، كما سيجد في الفصل الثالث دراسة لأهم طرق توليد التوبولوجيات التي يكون لها صفات معينة مثل أنظمـــة الجـــوار– الأساس – الأساس الجزئي بالإضافة إلي صنف معين من الفضاءات التوبولوجـــية الـــتي تتمتع بقابلية العد الأولى أو الثانية وهذا يتعلق بقدرة المجموعات الكثـــيفة وبقـــدرة الأساس . واخيراً طريقة بناء فضاء جزئي **Subspace** من الفضاء الكـــلى وسوف يجد القارئ أن هناك بعض الخواص التي تنقل بشكل آلي من الفضاء الكـــلى إلي أي فضاء جزئي منه وتسمى الخاصية الوراثية (**hereditary property**). يتضـــمن الـــباب الرابع دراسة لمفهوم الدالة: المتصلة– المفتوحة– المغلقة والخواص التوبولوجـــية التي تتركز على البنية التوبولوجية للفضاء وبالتالي نكون قد حققنا الغاية المرجوة لدراسة علم التوبولوجى ألا وهى دراسة الخواص التوبولوجية **Topological** property مـــن ناحـــية ومعرفة متى تكون الفضاءات التوبولوجيه متكافئة من ناحية أخـــري . ســـيجد القارئ في الفصل الخامس تعميم لمفهوم دالة المسافة من الفضاءات الإقليدية إلي الفضاءات المترية Metric spaces، وبينا أن كل فضاء متري يكون فضاء توبولوجـــى وكذلـــك الشروط اللازمة لكي يكون الفضاء التوبولوجى فضاء متري وبذلـــك نكون قد انتقلنا من التحليل الرياضي إلي التوبولوجى والعكس، ووجدنا أن دالـــة المســـافة ليست هي المعيار الجوهري لتحديد اتصال الدوال ورأينا أن الاتصال يعتمد على عائلة المجموعات الجزئية من الفضاء وبذلك أمكن تعميم الفضاءات المترية إلي فضـــاءات أخري تشملها ألا وهى الفضاءات التوبولوجية. من اجل الحصول على نتائج اعمق في دراسة الفضاء التوبولوجى تم إضافة بعض الشروط التي تتعلق بإمكانية فصـــل نقطـــتين أو مجموعـــتين بواسطة مجموعات مفتوحة وهذا ما يسمى بمسلمات الانفصال Separation Axioms التي أوردناها في الفصل السادس. سيجد القارئ في الفصـــلين السابع والثامن نوع خاص من الفضاءات التوبولوجية ألا وهى الفضاءات المحكمـــة (المتراصة) Compact spaces والفضاءات المترابطة Connected spaces التي تعمم بعض الصفات الهامة لمجموعات محدودة ومغلقة من مجموعة الأعداد الحقيقية. في الـــباب الأخـــير قدمنا مفهوم فضاء حاصل الضرب وفضاء القسمة وكذلك نبذة مختصـــرة عن التوبولوجى الجبري ومتى تكون المفاهيم التي وردت في الفصول السابقة محققه في هذه الفضاءات.

آخيراً نأمل أن يكون هذا الكتاب سهل الفهم سلس الأسلوب واسهاماً متميزاً ويؤدى الغايـــة المـــرجوة من تاليفة وان كان هناك اوجه للخطأ والقصور فارجو التنبيه إلي مواضـــعها حتى نتمكن من تلافى ذلك في المستقبل إن شاء الله والله نسأل أن يوفقنا لما فـــيه الخـــير لبلادنا العربية والإسلامية ويجعل هذا العمل خالصاً لوجهة الكريم والله الموفق والمستعان.

المؤلفان : أ.د. احمد عبد القادر رمضان - د. طه مرسى العدوى

المحتويات

الصفحة

الصفحة

الباب الأول

مفاهيم أساسية

(Basic concepts)

الباب الأول

مفاهيم أساسية (Basic concepts)

التوبولوجى (Topology) هو أحد فروع الرياضيات الحديثة حيث أن نظرية المجموعات (set theory) تلعب دوراً رئيسياً في هذا المقرر. في حقيقية الأمر فإن نظرية المجموعات تعتبر لغة (language) التوبولوجى. في هذا الباب نستعرض أهم المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات والتى سوف تستخدم خلال دراسة هذا المقرر. ولمزيد من المعلومات عن نظرية المجموعات على القارئ الرجوع لبعض مراجع الكتاب.

بند (١) : المجموعات والمجموعات الجزئية : (Sets and Subsets)

تعريف (١. ١. ١) : (مفهوم كانتور للمجموعة)

المجموعة هى تجمع من الأشياء المعرفة تعريفاً تاماً . وهذه الأشياء قد تكون متجانسة أو غير متجانسة ، ونعنى بكلمة معرفة أننا نستطيع لأى شيء مهما كان أن نحدد هل هو موجود في المجموعة أم لا.

الأشياء التى تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة (elements of the set)، ونرمز عادة للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة (Capital letters) مثل :

$$A, B, C, \dots; X, Y, \dots$$

ونرمز لعناصرها بحروف لاتينية صغيرة (Small letters) مثل :

$$a, b, c, \dots; x, y, \dots$$

نكتب $X = \{a, b, c, d\}$ لتعنى أن المجموعة X تتكون من أربعة عناصر هى: a, b, c, d وتوضع عناصر المجموعة بين قوسين من النوع $\{\ \}$. ونكتب $x \in X$ لتعنى أن العنصر x ينتمى إلى (belongs to) المجموعة X كما أننا سنكتب $y \notin X$ لتعنى أن العنصر y ليس أحد عناصر المجموعة X أو لاينتمى إلى المجموعة X.

تعريف (١ . ١ . ٢): (المجموعات المنتهية وغير المنتهية– Finite and Infinite Sets)

يقال إن المجموعة A مجموعة منتهية إذا كانت تحتوى على عدد نهائى من العناصر (عدد محدد من العناصر) ، ويقال إنها مجموعة غير منتهية إذا كانت تحتوى على عدد لانهائى من العناصر.

فـيما يـلى سـوف نذكر الرموز الشائعة الإستخدام لبعض المجموعات والتى سوف تستخدم خلال هذا المقرر :

١ – مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) وهى :

$$N = \{1 , 2 , 3 , 4 , ...\}$$

٢ – مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers) وهى ::

$$Z = \{0 , \pm 1 , \pm 2 , ...\}$$

٣ – مجموعة الأعداد القياسية (Rational Numbers) وهى :

$$Q = \{\frac{a}{b} : a \in Z , b \in N\}$$

٤ – مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة (Non-negative Numbers) وهى :

$$Z^+ = \{0 , 1 , 2 , 3 , ...\}$$

٥ – مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers) ويرمز لها بالرمز R.

٦ – مجموعة الأعداد المركبة (Complex Numbers) وهى:

$$C = \{x = a + ib : a , b \in R ; i = \sqrt{-1}\}$$

تعريف (١ . ١ . ٣) : (المجموعة الخالية – The empty set)

المجموعة الخالية هى المجموعة التى لاتحتوى على أى عنصر. ويرمز لها بالرمز " ϕ " وقد تكتب { } .

تعريف (١ . ١ . ٤) : (المجموعات الجزئية – Subsets)

يقال إن المجموعة A مجموعة جزئية (Subset) من المجموعة B إذا كان كل

عنصر من عناصر A ينتمي إلى المجموعة B ونكتب $A \subseteq B$ وتقرأ A مجموعة جزئـية مـن المجموعـة B ، وقـد تكتـب $B \supseteq A$ ويقال أن B تحتوى (Contains) المجموعـة A (أو تتضمن المجموعة A). ونعبر عن ذلك رياضياً على النحو التالى :

$$(\forall \ x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

وهذا يكافئ أن :

$$\forall \ x \notin B \Rightarrow x \notin A$$

تعريف (١. ١. ٥) : (تساوى المجموعات – **Equality of Sets**)

يقـال إن المجموعـتان A , B متساويتان إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر وتكتـب $A = B$. أى أن A تساوى B إذا كان كل عنصر منتمى إلى A ينتمى إلى B وكذلـك كل عنصر منتمى إلى B ينتمى إلى A . ونعبر عن التساوى رياضياً على النحو التالى :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A)$$

الرمـز $\Leftrightarrow$ يعنى " إذا وفقط إذا كان " (**if and only if**) وقد تكتب " **iff** "، أى أن "$\Leftrightarrow$" تعنى تكافؤ التقريرين .

تعريف (١. ١. ٦) :

يقـال إن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (**proper subset**) من المجموعة B (وتكتب $A \subset B$) إذا كان: $A \neq B \ , \ A \subseteq B$. ونكتب $A \not\subset B$ لتعنى أن A ليست مجموعة جزئية من المجموعة B.

نلاحظ أن

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

تعريف (١. ١. ٧) : (المجموعة الشاملة – **Universal Set**)

المجموعة الشاملة هى المجموعة غير الخالية والتى تحتوى على جميع المجموعات الجزئية في مسـألة ما تحت الإعتبار . فمثلا عند دراسة مجموعات من الأعداد الصحيحة فإنه يوجد مجموعة شاملة وهى في هذه الحالة المجموعة Z. نرمز للمجموعة الشاملة بالرمز U .

تعريف (١. ١. ٨) : (الاتحاد – Union)

اتحـــاد المجموعتان A , B يعرف على أنه المجموعة المكونة من جميع العناصر التى في المجموعة A أو في المجموعة B ويرمز لها بالرمز $A\cup B$ أى أن

$$A\cup B = \{ x\in U : x \in A \ or \ x \in B \}$$

ونلاحظ أن : $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \, and \, x \notin B$

تعريف (١. ١. ٩) : (التقاطع – Intersection)

تقـــاطع المجموعـــتان A , B هى المجموعة التى تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين A , B. ويرمز لها بالرمز $A\cap B$ وتقرأ A تقاطع B ونعبر عن ذلك رياضيا كالتالى :

$$A\cap B = \{ x\in U : x \in A \ and \ x \in B \}$$

ونلاحظ أن : $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \ or \ x \notin B$

تعريف (١. ١. ١٠) : (الانفصال – The disjoint)

يقـــال أن المجموعتين A , B غير متقاطعتان (منفصلتان) إذا لم يوجد بينهما عناصر مشتركة. أى إذا تحقق أن $A\cap B = \phi$.

نظرية (١. ١. ١١) :

لأى ثلاث مجموعات A , B , C القوانين التالية صحيحة :

$(i)\, A\cup \phi = A \,;\, A\cap\phi = \phi \quad (ii)\, A \subseteq A\cup B \,;\, B \subseteq A\cup B$

$(iii)\, A\cap B \subseteq A \,;\, A\cap B \subseteq B \quad (iv)\, A\cup A = A \,;\, A\cap A = A$

$(v)\, A \cup B = B \cup A \,;\, A \cap B = B \cap A$

$(vi)\, (A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) \,;\, (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

$(vii)\, A \cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C);$

$\qquad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$(viii)\, A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i);$

$\qquad A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i) \,,\, B_i \subseteq U$

حيث

$$\bigcap_i A_i = \{x \in U : x \in A_i \ \ for\ every\ \ i \in I\}$$

$$\bigcup_i A_i = \{x \in U : x \in A_i \ \ for\ some\ \ i \in I\}$$

I تسمى مجموعة الدليل .

تعريف (١. ١. ١٢) :

(The difference between two sets – الفرق بين مجموعتين)

إذا كانت المجموعتان A , B جزئيتين من المجموعة الشاملة U. فإننا نعرف الفرق **(The difference)** ، ويرمز له بالرمز $A-B$ على أنه المجموعة الجديدة :

$$A-B = \{x : x \in A \ \ and \ \ x \notin B\}$$

وكذلك نعرف

$$B-A = \{x : x \in B \ \ and \ \ x \notin A\}$$

ملاحظة :

يلاحظ أنه على وجه العموم $A-B \neq B-A$

تعريف (١. ١. ١٣) : (Complement of a set – مكملة مجموعة)

نفرض أن U هى المجموعة الشاملة ، ونفرض $A \subseteq U$. مكملة المجموعة A بالنسبة إلى المجموعة الشاملة U هى المجموعة التى عناصرها هى جميع عناصر المجموعة الشاملة U ماعدا العناصر المنتمية للمجموعة A . ويرمز لها بالرمز A^c ونعبر عنها رياضيا كما يلى :

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\} = U - A$$

نظرية (١. ١. ١٤) :

لأى مجموعتين A , B من المجموعة الشاملة U الآتى صحيح :

(i) $\phi^c = U$ (ii) $U^c = \phi$ (iii) $(A^c)^c = A$

(iv) $A \cap A^c = \phi$; $A \cup A^c = U$

(v) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(vi)\ A-B=A\cap B^c$

$(vi)\ U-\underset{i\in I}{\cap} B_i=\underset{i}{\cup}(U-B_i)\ ;\quad U-\underset{i\in I}{\cup} B_i=\underset{i}{\cap}(U-B_i)$

ويجب أن نلاحظ أنه إذا كانت $I=\phi$ فإن :

$$\cap A_i=U\ \ ,\cup A_i=\phi\ \ ,\ \ A_i\subseteq U$$

القانونان في (v) يسميان قانونى ديمورجان **(De Morgan's laws)** .

تعريف (١ . ١ . ١٥) : (مجموعة القوة – **The power set**)

إذا كانت X مجموعة ، فإن مجموعة القوة للمجموعة X هى المجموعة التى عناصرها جميع المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة X ونرمز لها بالرمز $P(X)$.

أى أن : $P(X)=\{A:\ A\subseteq X\}$

تعريف (١ . ١ . ١٦) : (الفترات – **Intervals**)

نفرض I مجموعة جزئية من R. يقال أن I فترة من خط الأعداد الحقيقية R إذا كان لكل $x,y\in I$ ، $x<z<y$ فإن $z\in I$.

لأى $a,b\in R$ نعرف المجموعات التالية :

$(i)\ \ (a,b)=\{x\in R:\ a<x<b\}$

تسمى فترة مفتوحة **(open interval)**

$(ii)\ \ [a,b]=\{x\in R:\ a\le x\le b\}$

تسمى فترة مغلقة **(closed interval)**

$(iii)\ \ (a,b]=\{x\in R:\ a<x\le b\}$

$(iv)\ \ [a,b)=\{x\in R:\ a\le x<b$

تسمى نصف مفتوحة **(half open)** أو نصف مغلقة **(half closed)** .

خط الأعداد الحقيقية هو الفترة المفتوحة $(-\infty,\infty)$.

نكتب $x>a$ لتعنى $x\in(a,\infty)$ ونكتب $x\geq a$ لتعنى $x\in[a,\infty)$.

كما نكتب $x<b$ لتعنى $x\in(-\infty,b)$ ونكتب $x\leq b$ لتعنى $x\in(-\infty,b]$.

بند (٢) : **العلاقات** : Relations

تعريف (١ . ٢ . ١) : (حاصل الضرب الكارتيزى **Cartesian Product**)

حاصل الضرب الكارتيزى (أو الديكارتى) للمجموعتين $A\,,\,B$ " يرمز له بالرمز $A\times B$ " يعرف على أنه مجموعة جميع الأزواج المرتبه (a,b) حيث أن $a\in A$ ، $b\in B$. أى أن $A\times B=\{(a,b):a\in A\,,b\in B\}$

بالمثل يمكن تعريف حاصل الضرب الكارتيزى للمجموعات $A_1\,,A_2\,,\ldots,A_n$ بالصورة :

$$\prod_{i=1}^{n} A_i=\{(a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n):\ a_i\in A_i\}$$

أيضا

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i=\{(a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n\,,\ldots):\ a_i\in A_i\}$$

نظرية (١ . ٢ . ٢) :

إذا كانت X هى المجموعة الشاملة ، $A,B,C\subseteq X$ فإن

(1) $A\times\phi=\phi\times A=\phi$

(2) $A\times B\neq B\times A$ ($A\neq\phi$ ، $B\neq\phi$ حيث)

(3) $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B$

(4) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

(5) $(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_1\times B_2)$

$$\forall\ A_1,\ A_2\,,B_1\,,B_2\subseteq X$$

في الحالة الخاصة عندما $A=B$ فإنه يمكن تعريف حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة A في نفسها بالصورة :

$$A^2 = A\times A = \{(a,b):\ a,b\in A\}$$

تعريف (١. ٢. ٢) :

نفرض المجموعتان A,B ، إذا كانت $\delta \subseteq A\times B$ فإن δ تسمى علاقة ثنائية **(Binary Relation)** مـــن A إلى B ، ونكتب $(a,b)\in\delta$ أو $a\,\delta\, b$ لتعني أن العنصـــر a مرتـــبط بالعنصر b تحت تأثير العلاقة δ . كما نكتب $(a,b)\notin\delta$ لتعنى أن العنصر a غير مرتبط مع العنصر b وفق العلاقة δ.

في الحالـــة الخاصة ، إذا كانت $\delta\subseteq A\times A$ فإننا نقول أن δ علاقة ثنائية على المجموعة A.

إذا كانت δ علاقة ثنائية على المجموعة A فإن :

$$\delta^{-1}=\{(b,a)\in A^2:\ (a,b)\in\delta\}$$

تسمى بالعلاقة العكسية للعلاقة δ.

المجموعة $\Delta=\{(a,a):a\in A\}$ تسمى قطر المجموعة A^2 .

تعريف (١. ٢. ٣) :

نفرض δ علاقة ثنائية على المجموعة A فإن :

(١) يقال أن العلاقة δ عاكسة **(Reflexive)** إذا كان $(x,x)\in\delta$ لكل $x\in A$، وبصورة أخرى إذا كانت $\Delta\subseteq\delta$.

(٢) يقـــال أن العلاقـــة δ مـــتماثلة **(Symmetric)** إذا كـــان $(x,y)\in\delta$ فإن $(y,x)\in\delta$ ، لكل $x,y\in A$ ، وبصورة أخرى إذا كانت $\delta=\delta^{-1}$.

(٣) يقـــال أن العلاقـــة δ متعدية (ناقلة) **(transitive)** إذا كان $(x,y)\in\delta$ ، $(y,z)\in\delta$ فإن $(x,z)\in\delta$ لكل $x,y,z\in\delta$.

(٤) يقـــال أن العلاقـــة مـــتخالفة **(antisymmetric)** إذا كـــان $(x,y)\in\delta$ ، $(y,x)\in\delta$ فإن $x=y$ ، وبصورة أخرى إذا كانت $\delta\cap\delta^{-1}\subseteq\Delta$.

تعريف (١. ٢. ٤) :

العلاقة δ تسمى علاقة تكافؤ (equivelent relation) إذا كانت عاكسة ومتماثلة ومـــتعدية. في هـــذه الحالة إذا كانت $x\,\delta\,y$ نقول أن العنصر x يكافئ العنصر y ونكتب $x \approx y$ بدلا من $x\,\delta\,y$.

فصل التكافؤ الممثل بالعنصر a هو مجموعة كل العناصر المكافئة للعنصر $a \in A$ (مجموعة العناصر من A المرتبطة بالعنصر a وفق علاقة التكافؤ δ)

ويرمز له بالرمز $[a]$ أى أن : $[a]=\{x\in A: x\,\delta\,a\}$

تســـمى مجموعـــة فصول التكافؤ بمجموعة القسمة (quotient set) ويرمز لها بالرمز A/δ أى أن : $A/\delta=\{[a]:\ a\in A\}$

نظرية (١. ٢. ٥) :

إذا كانت δ علاقة تكافؤ على المجموعة A فإن :

(1) $a\in[a]\,,\forall\, a\in A$

(2) $a\delta b \Leftrightarrow [a]=[b]$

(3) $a\,\delta\,b \Leftrightarrow [a]\cap[b]\neq\phi,$ ($a\neq b$ حيث)

نظرية (١. ٢. ٦) :

مجموعة فصول التكافؤ A/δ لعلاقة التكافؤ δ المعرفة على المجموعة A تشكل تجزيـــئاً للمجموعة A . أى أن فصول التكافؤ غير متقاطعة مثنى مثنى وأتحادها يساوى المجموعـــة A . ويجـــب أن نلاحـــظ أن عكـــس الـــنظرية صحيح ، أى إذا كانت $P=\{P_i\}_{i\in I}$ عائلـــة من المجموعات الجزئية من A غير متقاطعة مثنى مثنى وأتحادها يساوى A فانها تعرف علاقة تكافؤ δ على A بالصورة :

$$a\,\delta\,b \Leftrightarrow \exists P_i\in P : a,b\in P_i$$

فصول تكافؤها تتطابق مع عناصر التجزئ أى مع عناصر العائلة P.

تعريف (١. ٢. ٧) :

تسمى العلاقة δ بعلاقة ترتيب جزئى (Partial order relation) على المجموعة A إذا كانــت عاكســة ومــتخالفة ومتعدية. في هذه الحالة نكتب $a \leq b$ بدلا من $a\,\delta\,b$ ونقول أن b أكبر من أو يساوى a أو b يلى a.

إذا كانــت $\leq$ علاقة ترتيب جزئى على المجموعة A فنقول أن A مجموعة مرتبة جزئياً.

تعريف (١. ٢. ٨) :

تسمى المجموعة A مرتبة كلياً (totally order) إذا كانت المجموعة A مرتبة جزئياً وأى عنصرين فيها متقارنين (العنصرين a,b متقارنين إذا كان $a \leq b$ أو $a \geq b$) وفي هذه الحالة نكتب $(A,\leq)$ للدلالة علي علاقة الترتيب الكلي.

مجموعــة الأعــداد الحقيقية مع علاقة الترتيب الطبيعية $\leq$ هىمجموعة مرتبة جزئياً وفيها أى عنصرين متقاربين ، كذلك علاقة الاحتواء "$\subseteq$" المعرفة على $P(X)$ هى علاقــة ترتيب جزئى وعلى هذا فإن $(R,\leq)$ مرتبة كلياً بينما $(P(X),\subseteq)$ مرتبة ترتيباً جزئياً.

تعريف (١. ٢. ٩) :

إذا كانــت $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة كلياً فإننا نقول أن المجموعة A مرتبة تماماً أو مرتبة ترتيباً حسناً (well orderd set) إذا كانت أى مجموعة جزئية وغير خالية من A تحتوى عنصر أصغر.

تعريف (١. ٢. ١٠) :

لتكن $(X,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، $S \subseteq X$

يقال إن العنصر $L \in X$ حد علوى (upper bound) للمجموعة S إذا تحقق :

$$x \leq L \; ; \;\; \forall \, x \in S$$

ويقال إن العنصر $\ell \in X$ حد سفلى (lower bound) للمجموعة S إذا تحقق:

$$x \geq \ell \,;\, \forall\, x \in S$$

تعريف (١. ٢. ١١) :

يقـــال لـــلمجموعة $S \subseteq X$ أنها محدودة من أعلى **(bounded from above)** إذا كان لها حد علوى، ويقال أنها محدودة من أسفل **(bounded from below)** إذا كان لها حد سفلى. ويقال للمجموعة S انها محدودة **(bounded)** إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

ملاحظة (١. ٢. ١٢) :

يلاحـــظ أنـــه إذا كان للمجموعة S حد علوى فإنه يوجد لها عدد لا نهائى من الحدود العلوية، وأصغر هذه الحدود يسمى أصغر حد علوى للمجموعة S، وإذا كان للمجموعة S حد سفلى فإنه يوجد لها عدد لا نهائى من الحدود السفلية، وأكبر هذه الحدود يسمى أكبر حد سفلى للمجموعة S.

فيما يلى سوف نسرد التعريف الرياضى لأصغر حد علوى وأكبر حد سفلى.

تعريف (١. ٢. ١٣) :

يقـــال إن العنصر L_0 أصغر حد علوى **(supremum)** للمجموعة $S \subseteq X$ إذا تحقق :

(i) L_0 حد علوى للمجموعة S.

(ii) لا يوجـــد للمجموعة S حد علوى أصغر من L_0. أى أنه إذا كان L حد علوى للمجموعة S فإن $L_0 \leq L$.

نرمز لأصغر حد علوى للمجموعة S بالرمز $L_0 = \sup S$.

أى أن $L_0 = \sup S$ إذا تحقق :

(i) إذا كان $x \leq L_0$ ، لجميع قيم $x \in S$

(ii) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $x \in S$ بحيث أن $x > L_0 + \varepsilon$

يقال إن العنصر ℓ_0 أكبر حد سفلي (infimum) للمجموعة $S \subseteq X$ إذا تحقق :

(i) ℓ_0 حد سفلي للمجموعة S .

(ii) لا يوجـــد لـــلمجموعة S حد سفلي أكبر من ℓ_0. أى أنه إذا كان ℓ حد سفلي للمجموعة S فإن $\ell_0 \geq \ell$.

نرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة S بالرمز $\ell_0 = \inf S$.

أى أن $\ell_0 = \inf S$ إذا تحقق :

(i) إذا كان $x \leq L_0$ ، لجميع قيم $x \in S$

(ii) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $x \in S$ بحيث أن $x > L_0 + \varepsilon$

تعريف (١. ٢. ١٤) :

يقـــال إن M قـــيمة عظمـــى (maximum) للمجموعة $S \subseteq X$ (وتكتب $M = \max S$) إذا تحقق :

(i) M حد علوى للمجموعة S (ii) $M \in S$.

ويقال أن m قيمة صغرى أو عنصر أصغر (minimum) للمجموعة $S \subseteq X$ (وتكتب $m = \min S$) إذا تحقق :

(i) m حد سفلي للمجموعة S (ii) $m \in S$.

نظرية (١. ٢. ١٥) :

إذا وجدت القيمة العظمى (الصغرى) فإن القيمة العظمى (الصغرى) للمجموعة S هى أصغر حد علوى (أكبر حد سفلي) لهذه المجموعة.

البرهان :

لـــتكن M هى القيمة العظمى للمجموعة S. إذاً من التعريف M حد علوى وإذا كانت L حد علوى للمجموعة فإن $M \leq L$ وذلك لأن $M \in S$ وبالتالى يكون M هو أصغر حد علوى للمجموعة S.

بالمـــثل يمكـــن برهـــنة أن القـــيمة الصغرى للمجموعة S هى أكبر حد سفلي

للمجموعة S.

ملاحظة (١. ٢. ١٦) :

النظرية السابقة تنص على أنه إذا وجدت القيمة العظمى M والقيمة الصغرى m للمجموعة S فإن $M=\sup S$, $m=\inf S$.

بديهية زورن (١. ٢. ١٧) : (Zorn's Lemma)

إذا كانت A مجموعة غير خالية ومرتبة جزئياً وكانت المجموعات الجزئية من A والمرتبة كلياً محدودة من أعلى (أسفل) فإن المجموعة A تحتوى على عنصر أكبر (أصغر).

بند (٣) : الدوال : Functions

تعريف (١. ٣. ١) :

الدالة (أو الراسم) هى علاقة من المجموعة غير الخالية X إلى المجموعة غير الخالية Y بحيث أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر وحيد في Y.

ونكتب $f:X\to Y$ لتعنى أن f دالة من X إلى Y. كما نكتب $y=f(x)$ (أو $(x,y)\in f$) لتعنى أن العنصر y الذى ينتمى إلى المجموعة Y هو صورة العنصر x الذى ينتمى إلى المجموعة X تحت تأثير الدالة أو الراسم f، ويقال إن المتغير y دالة في المتغير x. x تسمى بالمتغير المستقل، y تسمى بالمتغير التابع. وعليه فإن f تكون دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y إذا حققت:

لكل عنصر $x\in X$ بحيث $(x,y)\in f$ ، $(x,z)\in f$ ، فإن $y = z$.

المجموعة X تسمى نطاق تعريف الدالة f أو إختصارا نطاق **(domain)** الدالة ويرمز لها بالرمز D_f ، والمجموعة Y تسمى بالنطاق المصاحب **(co-domain)** للدالة. عناصر المجموعة Y والمرتبطة بعناصر من المجموعة X تحت تأثير الدالة f تسمى مدى**(range)** الدالة، ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $f(X)$ أو R_f ، أى أن :

$$R_f = \{ f(x) \ : \ \forall \ x \ \in X \}$$

وعلية فإن الدالة هى علاقة بين متغيرين متغير مستقل ومتغير تابع ، وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة المتغير الواحد (single variable function). والدوال ذات المتغير الواحد والتى نطاقها ونطاقها المصاحب مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R تسمى بالدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقى الواحد.

وعليه إذا كانت $y = f(x)$ فإن نطاق الدالة f هو قيم x الحقيقية التى تجعل قيمة الدالة $f(x)$ حقيقية. أما مدى الدالة فهو القيم الحقيقية التى تأخذها الدالة $f(x)$. وإذا لم يذكر نطاق الدالة f فإننا نعتبر نطاقها هو أقصى مجموعة جزئية ممكنة من مجموعة الأعداد الحقيقية R والتى عناصرها x تجعل قيم الدالة $f(x)$ حقيقية.

تعريف (١. ٣. ٢) :

يقال إن المجموعة الجزئية A من مجموعة الأعداد الحقيقية R متماثله حول نقطة الأصل إذا تحقق :
$$\forall x : \ x \in A \Rightarrow -x \in A$$

تعريف (١. ٣. ٣) :

يقال إن الدالة $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة زوجية **(even function)** إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق :
$$f(-x) = f(x) \, ; \ \forall \ x \in A$$

ونلاحظ أن منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلا حول محور الصادات.

يقال إن الدالة $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ داله فردية **(odd function)** إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق :
$$f(-x) = -f(x) \ ; \ \forall \ \mathrm{x} \in \mathrm{A}$$

وعليه فإن منحنى الدالة الفردية يكون متماثلا حول نقطة الأصل.

تعريف (١. ٣. ٤) :

يقال للدالة $f : A \to B$ أنها تزايدية **(increasing)** إذا حققت:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$$

ويقال للدالة $f : A \to B$ أنها تناقصية (decreasing) إذا حققت:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2)$$

ويقال للدالة $f : A \to B$ أنها تزايدية فعلا أو مطردة الزيادة (monotonic increasing) إذا حققت:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

ويقال للدالة $f : A \to B$ أنها تناقصية فعلا أو مطردة النقصان (monotonic decreasing) إذا حققت :

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

<u>تعريف (١. ٣. ٥) :</u>

يقال إن L حد علوى للدالة $f : A \to B$ إذا كان L حد علوى لمدى الدالة R_f. أى أن $y \le L \;;\; \forall\, y \in R_f$

ويقال إن ℓ حد سفلى للدالة f إذا كان ℓ حد سفلى لمدى الدالة R_f.

أى أن $y \ge \ell \;;\; \forall\, y \in R_f$

إذا كان للدالة حد علوى فإننا نقول أن الدالة محدودة من أعلى ، وإذا كان للدالة حد سفلى فإننا نقول أن الدالة محدودة من أسفل. الدالة f تكون محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أى أن الدالة f تكون محدودة إذا وجد L , ℓ بحيث أن : $\ell \le y \le L \;; \forall\, y \in R_f$

وعليه تكون الدالة f محدودة إذا وفقط إذا وجد M بحيث :

$$|f(x)| \le M \;; \forall\, x \in D_f$$

<u>تعريف (١. ٣. ٦) :</u>

يقال إن L_0 أصغر حد علوى للدالة $f: A \to B$ إذا كان L_0 أصغر حد علوى لمدى الدالة. ويقال إن ℓ_0 أكبر حد سفلى للدالة f إذا كان ℓ_0 أكبر حد

ســفلى لمدى الدالة . ويمكن تعريف القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة بالمثل.

وعليه فإن: $L_0 = \sup f = \sup R_f \; ; \; \ell_0 = \inf f = \inf R_f \; ;$

$M = \max f = \max R_f \; ; \; m = \min f = \min R_f .$

<u>مثال (١. ٣. ٧) :</u>

إذا كانت $h(x) = 7 - 3\sqrt{4 - x^2}$ إدرس ما يلى:

(أ) هل الدالة محدودة أم لا؟

(ب) أوجد $\max h ,\; \min h ,\; \sup h \; ; \; \inf h$ إن وجدت؟

<u>الحل :</u>

نطــاق هــذه الدالــة هو $D_h = [-2,2]$ ومداها هو $R_h = [1,7]$ (برهن ذلك؟).

(أ) الدالة محدودة لأن مداها محدود من أعلى بالعدد 7، ومن أسفل بالعدد واحد.

(ب) حيث أن $1 , 7 \in R_h$ إذاً

$$\sup h = \max h = 7 \; ; \; \inf h = \min h = 1 .$$

<u>تعريف (١. ٣. ٨) :</u>

نفــرض الدالــتين $f : A \to B ; g : B \to C$. نعــرف الدالة التركيبية من الدالتين f , g والتى يرمز لها بالرمز gof على النحو التالى :

$$(gof)(x) = g(f(x)) \; ; \; \forall \, x \in A$$

في هــذه الحالــة يتضــح أن نطــاق الدالة التركيبية gof هو المجموعة A ونطاقها المصاحب هو C.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "gof"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
$$x \xrightarrow{gof} g(f(x))$$

وعلى وجه العموم إذا كان: $f : A \to B; g : C \to D$. فإن نطاق الدالة التركيبية gof يتكون فقط من العناصر $x \in A$ بحيث أن $f(x) \in C$ ، أى أن:

$$D_{gof} = \{x \in A : f(x) \in D_g\}$$

ونطاق الدالة fog يعطى من العلاقة:

$$D_{fog} = \{x \in C : g(x) \in D_f\}$$

ملاحظة (١. ٣. ٩) :

إذا كان $R_f \subseteq D_g$ فإن نطاق الدالة gof هو نفسه نطاق f . أى أن $D_{gof} = D_f$. وإذا كان $R_g \subseteq D_f$ فإن نطاق الدالة fog هو نفسه نطاق g . أى أن $D_{fog} = D_g$.

تعريف (١. ٣. ١٠) :

يقال إن الدالة $f : A \to B$ دالة أحادية أو واحد لواحد (**one to one** أو **injective**) إذا تحقق :

$$\forall\, x_1, x_2 \in A :\; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq (x_2)$$

وهذا يكافئ منطقياً :

$$\forall\, x_1, x_2 \in A :\; f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

تعريف (١. ٣. ١١) :

يقال إن الدالة $f : A \to B$ دالة فوقية أو غامرة **(onto,surjective)** إذا كان مداها يساوى النطاق المصاحب لها ، أى إذا تحقق: $R_f = B$. وهذا يعنى أنه لكل عنصر $y \in B$ يوجد عنصر $x \in A$ بحيث أن $f(x) = y$.

تعريف (١. ٣. ١٢) :

يقال للدالة $f: A \rightarrow B$ أنها تناظر أحادى (**bijective**) إذا كانت أحادية وغامرة.

أي أن تناظر أحادى $\Leftrightarrow$ أحادية + غامرة (أو فوقية)

$$bijective \Leftrightarrow injective + surjective$$

ملاحظات (١. ٣. ١٣) :

١ - على وجه العموم الدالة الزوجية لا تكون أحادية على نطاقها المتماثل.

٢- إذا كانت الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة تزايدية فعلا (أو تناقصية فعلا) على المجموعة A فإنها تكون أحادية.

تعريف (١. ٣. ١٤) :

يقال إن الدالتين $y = f(x)\,,\ y = g(x)$ كلاهما دالة عكسية للأخرى إذا تحقق أن :

$$(fog)(x) = x \;; \forall\, x \in D_g \quad \&$$
$$(gof)(x) = x \;; \forall\, x \in D_f$$

يرمز للدالة العكسية للدالة $y = f(x)$ بالرمز $y = f^{-1}(x)$.

من هذا التعريف نستنتج أنه إذا كانت الدالة $f: A \rightarrow B$ تناظر أحادى فإن لها دالة عكسية هى : $f^{-1}: B \rightarrow A$ ، $(f^{-1})^{-1} = f$

ملاحظة (١. ٣. ١٥) :

إذا كانت $f: A \rightarrow B$ دالة تناظر أحادى ، فإن الدالة العكسية لها هى $f^{-1}: B \rightarrow A$ تكون تناظر أحادى أيضا ويكون : $D_f = R_{f^{-1}}$ ، $D_{f^{-1}} = R_f$. ونجد أن

$$(f^{-1} o\, f)(x) = x \;; \forall\, x \in A\,;$$
$$(f o f^{-1})(x) = x \;; \forall\, x \in B$$

نظرية (١. ٣. ١٦) :

نفرض الدالة $f: X \to Y$. إذا كان $A, B \subseteq X$ ، $C, D \subseteq Y$ فإن

$(i)\ \ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$(ii)\ \ f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$(iii)\ \ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$(iv)\ \ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$(v)\ f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$

$(vi)\ f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

$(vii)\ A \subseteq f^{-1} f(A)\ ,\ \forall\ A \subseteq X$

في العلاقات (ii) ، (v) ، (vii) يحدث التساوى إذا وفقط إذا كانت f أحادية .

$(viii)\ f\, f^{-1}(D) \subseteq D\ ;\ \forall\ D \subseteq Y$

في العلاقة السابقة يحدث التساوى إذا وفقط إذا كانت f شاملة.

$$(ix)\ \ f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(D_i)\ \ ;\ D_i \subseteq Y$$

$$(x)\ \ f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(D_i)\ \ ;\ \ ;\ D_i \subseteq Y$$

$$(xi)\ \ f(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A_i)\ \ ;\ \ A_i \subseteq X$$

$$(xii)\ \ f(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)\ \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i)\ \ ;\ \ A_i \subseteq X$$

تعريف (١. ٣. ١٧) :

يقال للمجموعة S أنها قابلة للعد **(countable)** إذا كانت منتهية أو يوجد راسم تناظر أحادى f من مجموعة الأعداد الطبيعية N إلى المجموعة S ، أى إذا أمكن

ترقيم (denumerable) عناصرها بواسطة N أو بصورة أخرى إذا أمكن كتابة S في صورة متتابعة لا نهائية من العناصر المختلفة $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

من أهم المجموعات القابلة للعد مجموعة الأعداد الطبيعية N، ومجموعة الأعداد الصحيحة Z، ومجموعة الأعداد القياسية Q . أما مجموعة الأعداد الحقيقية R فهى غير قابلة للعد . كذلك أى فترة مفتوحة أو مغلقة من مجموعة الأعداد الحقيقية R تكون غير قابلة للعد .

تعريف (١. ٣. ١٨) :

يقال إن الدالة $f: G \to R$ متصلة (Continuous) عند النقطة a حيث $a \in R \subseteq R$ إذا كان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

وهذا يعنى أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G: \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

ويقال أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند جميع نقاط المجموعة G . وهذا التعريف يكافئ القول بأن :

$$x \in f(a-\delta, a+\delta) \ \Rightarrow \ f(x) \in f(f(a)-\delta, f(a)+\delta)$$

أى أنه إذا كان لكل فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) V تحتوى $f(a)$ توجد فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) U تحتوى a بحيث أن $f(U) \subseteq V$.

نظرية (١. ٣. ١٩) :

الدالة f متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هى مجموعة مفتوحة.

بند (٤) : **الدوال وعلاقة التكافؤ** : **(Functions and Equivalence Relations)**

إذا كانت $f: X \to Y$ دالة ، ρ علاقة معرفة على X بالصورة :

$$x \rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \ ; \forall \ x, y \in X$$

. فإن

(١) العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على X تسمى علاقة تكافؤ ناتجة عن الدالة X

(Equivalence relation determined by f)

(٢) إذا كانت $x \in X$ فإن فصل التكافؤ هو $[x]=f^{-1}(f(x))=\rho_x$.

لأن $y \in [x] \Leftrightarrow y \,\rho\, x \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow y \in f^{-1}(f(x))$

<u>مثال (١ . ٤ . ١) :</u>

لتكن $X=\{0,1,2,3\}$ ، $X=\{1,2,4,6\}$. $f:X \to Y$ معرفة بالصورة : $f(n)=n! \; ; \forall n \in X$

إذا كانت ρ علاقة معرفة على X بالصورة :

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow f(x)=f(y) \;\; ; \forall \; x,y \in X$$

فإن $\rho=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

واضح أن ρ علاقة تكافؤ فصول التكافؤ

$$[0]=\{0,1\}=f^{-1}f(0) \; ,$$
$$[2]=\{2\}=f^{-1}f(2) \; ,$$
$$[3]=\{3\}=f^{-1}f(3)$$

<u>نظرية (١ . ٤ . ٢) :</u>

إذا كانت ρ علاقة تكافؤ على المجموعة X وكانت X/ρ $f:X \to X/\rho$ حيث $f(x)=[x] \;, \forall x \in X$ فإن f دالة شاملة. وإذا كانت σ علاقة تكافؤ على X ، $f:X \to X/\sigma$ حيث $f(x)=\sigma_x$ لكل $x \in X$ فإن σ علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f .

<u>البرهان :</u>

حيث أن $D_f=X$ ، $R_f=X/\rho$. فإذا كانت $x=y$ فإن $[x]=[y]$ ومنها نجد أن $f(x)=f(y)$ وعليه فإن f دالة.

$$[x]\in X/\rho \Rightarrow x\in X \;\&\; f(x)=[x]$$

أي أن f دالة شاملة.

كذلك إذا كانت σ علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f فإن

$$(x,y)\in\sigma \Leftrightarrow \sigma_x=\sigma_y \Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow(x,y)\in\rho$$

ومن ثم فإن $\sigma=\rho$.

تعريف (١. ٤. ٣) :

تسمى الدالة $\pi:X\to X/\rho$ حيث $\pi(x)=[x]\,,\ \forall x\in X$

بالدالة الطبيعية أو القانونية **(Natural or Canonical function)**

نظرية (١. ٤. ٤) :

إذا كانـــت $f:X\to Y$ دالـــة ، η علاقة تكافؤ على X ناتجة عن f ، ρ علاقـــة تكافؤ على X حيث $\rho\subseteq\eta$ فإن η/ρ علاقة تكافؤ على X/ρ ناتجة عن الدالة $f/\rho:X/\eta\to Y$.

الباب الثاني

الفضاءات التوبولوجية

Topological Spaces

الباب الثاني
الفضاءات التوبولوجية
Topological Spaces

سنقدم فى هذا الباب مفهوم الفضاء التوبولوجى ، ثم نتعرض لبعض أنواع الفضاءات التوبولوجية . ثم ندرس المفاهيم الأساسية المتعلقة بالفضاء التوبولوجى. ونسوق بعض الأمثلة التى توضح هذه المفاهيم. والجدير بالذكر أن كثيراً من المفاهيم التى نتعرض لها ما هى الا تعميماً لمفاهيم مشابهه في التحليل الحقيقي.

بند(١) : الفضاء التوبولوجى : **(Topological Spaces)**

نفرض أن X مجموعة غير خالية. ونفرض τ تجمع من المجموعات الجزئية من X التى تحقق الشروط الآتية :

$$(01)\ X, \phi \in \tau$$
$$(02)\ If\ A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$$
$$(03)\ If\ A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \tau$$

نلاحظ أن : الشرط الأول (01) يعنى أن τ تحتوى X, ϕ والشرط الثانى (02) يعنى أن تقاطع أى عنصرين من عناصر τ يعطى عنصراً في τ. أما الشرط الثالث (03) يعنى أن أتحاد أى عدد من عناصر τ يعطى عنصراً في τ .

تسمى τ توبولوجى **(Topology)** على X ويسمى الزوج المرتب (X, τ) فضاء توبولوجى وأختصاراً نقول أن X فضاء توبولوجى. ويسمى كل عنصر فى τ مجموعة مفتوحة **(open set)**.

ملاحظة (٢-١-١) :

يتضح من التعريف أن :

(١) $\tau \subseteq P(X)$, $\tau \in P(P(X))$.

(٢) $U \in \tau \iff U$ مجموعة مفتوحة.

ترمز $P(X)$ إلى مجموعة القوة للمجموعة X والتى تعرف على النحو التالى:

$$P(X)=\{U:U\subseteq X\}$$

(٣) الشرط الثاني يكافيء القول بأن تقاطع عدد منته من عناصر τ هو عنصر في τ.

أى أن $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$

مثال (٢-١-٢) :

لتكن $X=\{a,b\}$ فإن التجمعات التالية تشكل توبولوجى على X :

$(i)\ \tau_1=\{X,\phi\}$

$(ii)\ \tau_2=\{X,\phi,\{a\}\}$

$(iii)\ \tau_3=\{X,\phi,\{b\}\}$

$(iv)\ \tau_4=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}=P(X)$

مثال (٢. ١. ٣) :

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ بين أى من التجمعات التالية تشكل توبولوجى على X:

$(i)\ \tau_1=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

$(ii)\ \tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,d\},\{a,b,d\}\}$

$(iii)\ \tau_3=\{X,\phi,\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$

$(iv)\ \tau_4=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\}\}$

الحل :

(i) واضح أن τ_1 لا تشكل توبولوجى على X لأن :

$\{a,b\},\{b,c\} \in \tau_1$ ولكن $\{a,b\}\cup\{b,c\}\}=\{a,b,c\}\notin\tau_1$

أى أن τ_1 لا تحقق الشرط (03).

(ii) τ_2 تشكل توبولوجى على X لأن τ_2 تحقق الشروط من (03) $\rightarrow$ (01)

وبذلك يكون (X,τ_2) فضاء توبولوجى.

(iii) τ_3 لا تشكل توبولوجى على X لأن :

$\{a,b\},\{a,c\} \in \tau_3$ ولكن $\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}\notin\tau_3$

(iv) τ_4 تشكل توبولوجى على X لأن τ_4 تحقق جميع الشروط .

تعريف (٢. ١. ٤) :

حيث أن رتبة المجموعة هى عدد عناصرها فإن رتبة التوبولوجى المكون من عدد منته من العناصر هى عدد العناصر المكونه له.

ويلاحظ أنه فى المثالين السابقين أن : فى مثال(٢. ١. ٢) أن رتبة τ_1 هى 2 ورتبة τ_2 هى 3 ورتبة τ_4 هى 4 . وفى مثال(٢. ١. ٣) رتبة τ_4 هى 6 .

أمثلة هامة للفضاءات التوبولوجية :

(Important examples of topological spaces)

(١) الفضاء المنفصل (أو المتقطع) : **(Discrete Space)**

نفــرض أن X مجموعــة غير خالية ، $\tau=P(X)$ هى مجموعة جميع المجموعات الجزئــية مــن X . مــن الواضــح أن τ تشكل توبولوجى على X . يسمى هذا الــتوبولوجى بالتوبولوجى المنفصل وهو أوسع (أكبر أو أقوى) توبولوجى يعرف على X . ويسمى (X,τ) بالفضاء المنفصل ويرمز له بالرمز (X,D) .

ملاحظة :

يجــب أن نلاحظ هنا أن الفضاء المنفصل (X,D) ينفرد بخاصية هامة جداً وهى تطــابق مجموعاته المفتوحة مع مجموعاته الجزئيه من X أى أن كل مجموعة جزئيه من X هى مجموعة مفتوحه.

(٢) الفضاء الغير منفصل (غير المتقطع) : **(Indiscrete Space)**

نفــرض أن X مجموعة غير خالية ، $\tau=\{X,\phi\}$. إذاً τ تشكل توبولوجى عــلى X . يســمى هذا التوبولوجى بالتوبولوجى الغير منفصل وهو أصغر توبولوجى يعــرف عــلى X . ويســمى (X,τ) بالفضــاء الغير منفصل ويرمز له بالرمز (X,I).

ومن هذا يتضح أن X, ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان فى τ .

(٣) فضاء المكملات المنتهية : (Cofinite Topology)

نفرض أن X مجموعة لا نهائيه. ونفرض

$$\tau = \{\phi, U \subseteq X : U^c \ finite\}$$
$$= \{\phi, U \subseteq X : |X - U| < \infty\}$$

أى أن τ هـــى عائلـــة كل المجموعات الجزئية من X والتى مكملاتها تكون منتهيه ، بالإضافة إلى المجموعة الخالية ϕ .

وفيما يلى نبرهن أن τ تمثل توبولوجى على X :

(01) $\phi \in \tau$ مـــن الـــتعريف ، وحيـــث أن $X^c = \phi$ وهى مجموعة منتهيه إذاً $X \in \tau$ وعليه فإن $X, \phi \in \tau$.

(02) نفرض أن $U_1, U_2 \in \tau$ والمطلوب إثبات أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$ ؟

حيـــث أن $U_1, U_2 \in \tau$ فـــإن U_1^c, U_2^c مجموعـــتان منتهيـــتان ومـــن ثم فإن $U_1^c \cup U_2^c$ مجموعـــة منتهـــية ولكـــن باســـتخدام ديمورجـــان نعـــلم أن $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$، وبالـــتالى فـــإن $(U_1 \cap U_2)^c$ مجموعة منتهية وعلى هذا يتضح أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(03) نفرض أن $U_i \in \tau \ , \forall i = 1, 2, 3, \ldots$ ونحاول إثبات أن $\bigcup_i U_i \in \tau$

حيـــث أن $U_i \in \tau$ لكل i فإن U_i^c مجموعة منتهية ومن ثم فإن $\bigcap_i U_i^c$ مجموعة منتهـــية ولكن $\bigcap_i U_i^c = (\bigcup_i U_i)^c$ وبالتالى فإن $(\bigcup_i U_i)^c$ مجموعة منتهية وبناء على ذلك فإن $\bigcup_i U_i \in \tau$.

إذاً يمكن القول بأن τ تمثل توبولوجى على X يسمى هذا التوبولوجى توبولوجى

المكملات المنتهية ويسمى الزوج (X,τ) بفضاء المكملات المنتهية **(Cofinite Topological Space)** وسوف نرمز لهذا الفضاء بالرمز (X,C).

(٤) فضاء المكملات القابلة للعد : (Complement Countable Space)

بفرض أن X مجموعة غير خالية ونفرض

$$\tau = \{\phi, A \subseteq X : A^c \text{ is countable قابلة للعد} \}$$

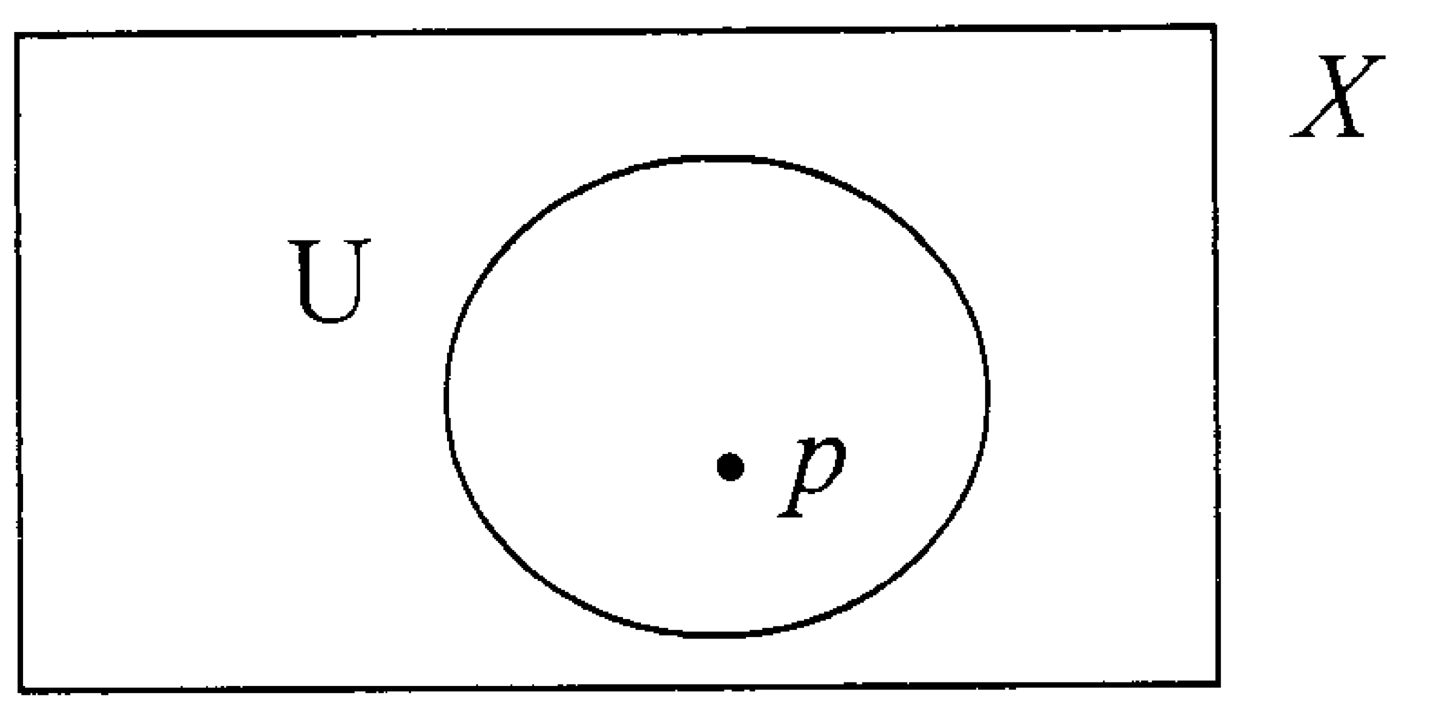
واضح أن τ تشكل توبولوجي على X .

(٥) فضاء توبولوجي النقطة المختارة : (Particular Point Topology)

بفرض أن X مجموعة غير خالية ، $p \in X$ وبفرض

$$\text{P} = \{\phi, U \subseteq X : p \in U\}$$

سوف نبرهن أن P توبولوجي على X.



(01) $\phi \in \text{P}$ من التعريف وكذلك حيث أن $p \in X$ فإن $X \in \text{P}$ وبالتالى فإن $X, \phi \in \text{P}$.

(02) إذا كانت $U_1, U_2 \in \text{P}$ فإن $p \in U_1 \cap U_2$ وعلى ذلك يكون $U_1 \cap U_2 \in \text{P}$.

(03) إذا كانت $U_i \in \text{P}$ لكل i فإن $p \in U_i$ وعليه فإن $p \in \bigcup_i U_i$ أى أن $\bigcup_i U_i \in \text{P}$.

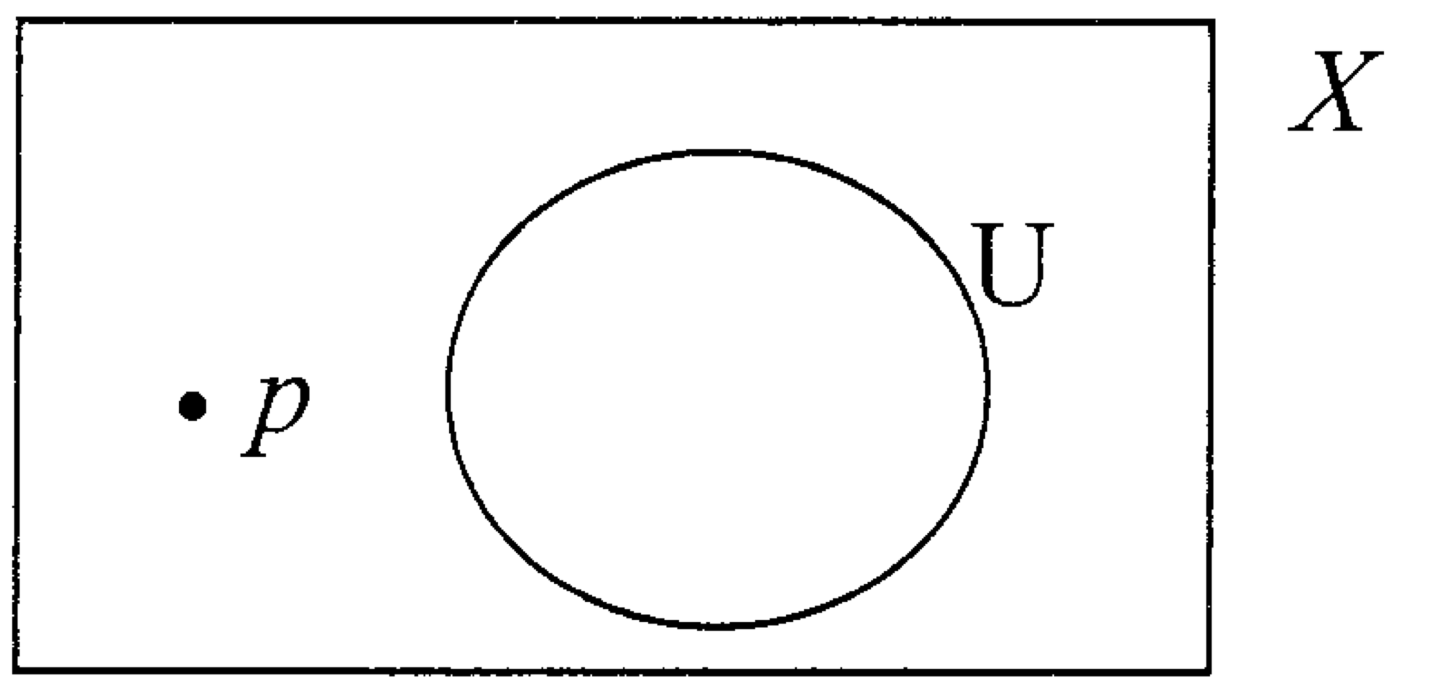
إذاً P توبولوجى على X ويسمى توبولوجى النقطة المختارة ويسمى الزوج

(X, P) فضاء النقطة المختارة **(Particular Point Topology)** .

(٦) فضاء توبولوجي النقطة المستبعدة : **(Excluding Point Topological Space)**

بفرض أن X مجموعة غير خالية ، $p \in X$ ، وبفرض

$$E = \{X \,,\, U \subseteq X : p \notin U\}$$



مـــن الســـهل إثبات أن E توبولوجي على X ويسمى توبولوجي النقطة المستبعدة ويسمى الزوج (X, E) فضاء النقطة المستبعدة.

(٧) الفضاء التوبولوجي العادى (الطبيعي أو المعتاد أو الأقليدى) :

(Usual Topoligical Spaces)

بفرض أن $X = R$ هى مجموعة الأعداد الحقيقية ، ونفرض

$$\tau = \{U \subseteq R : \forall\, x \in U \;\exists\, \delta > 0 \textit{ such that } (x - \delta, x + \delta) \subseteq U\}$$

أى أن τ هـــى مجموعـــة كـــل المجموعات الجزئية U من R التى تحقق أن لكل $x \in U$ توجـــــد فـــــترة مفـــــتوحة $(x - \delta, x + \delta)$ بحيـــــث أن $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U$.

سوف نبرهن الآن أن τ تشكل توبولوجي على R .

(01) واضح أن $R \,,\, \phi \in U$

(02) بفـــرض أن $U_1, U_2 \in \tau$ ، $x \in U_1 \cap U_2$ نحصـــل على $x \in U_1$ أو $x \in U_2$. وعليه فإنه يوجد $\delta_1 \,, \delta_2 > 0$ بحيث أن

$$(x - \delta_1, x + \delta_1) \subseteq U_1 \text{ و } (x - \delta_2, x + \delta_2) \subseteq U_2$$

باختيار $\delta = \min\{\delta_1 \,, \delta_2\}$ ومنها نجد أن

$$(x-\delta, x+\delta)\subseteq U_1 \text{ و } (x-\delta, x+\delta)\subseteq U_2$$

إذاً $(x-\delta, x+\delta)\subseteq U_1 \cap U_2 \;\; ,\forall\, x\in U_1 \cap U_2$

وعليه فإن $U_1 \cap U_2 \in \tau$

(03) بفرض أن $\{U_i : i\in I\}\subseteq \tau$ ، $x\in \bigcup_i U_i$.

إذاً يوجد U_{i_o} بحيث أن $x\in U_{i_o}$ ، ولكن $U_{i_o}\in \tau$ إذاً يوجد $\delta>0$ بحيث أن $(x-\delta, x+\delta)\subseteq U_{i_o}$ وحيث أن $U_{i_o} \subseteq \bigcup_i U_i$

فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث أن :

$$(x-\delta, x+\delta)\subseteq \bigcup_i U_i \;\; ,\forall\, x\in \bigcup_i U_i$$

إذاً $\bigcup_i U_i \in U$.

إذاً τ تمثل توبولوجي على R وهذا التوبولوجي يسمى التوبولوجي المعتاد (العادى أو الأقليدى) والزوج (R,τ) يسمى الفضاء العادى وسوف نرمز لهذا الفضاء بالرمز $(R,\mathcal{U})$. يمكن اعتبار $\mathcal{U}$ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من R المساوية لاتحاد فترات مفتوحة.

ملاحظات (٢. ١. ٥) :

(١) كل فترة مفتوحة في R هي مجموعة مفتوحة.

(٢) تقاطع فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة.

(٣) اتحاد فترتين مفتوحتين هو مجموعة مفتوحة ولكنه ليس بالضرورة أن تكون فترة مفتوحة فمثلا $U=(0,1)\cup(2,5)$ مجموعة مفتوحة ولكنها ليست فترة مفتوحة.

مثال (٢. ١. ٦) :

لتكن $X=N$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية . نفرض

$$\tau=\{\,\phi, N, A_n=\{1,2,\ldots,n\}:\; n\in N\}$$

بين أن العائلة τ تشكل توبولوجي علي X .

الحل :

(01) واضح أن $\phi, N \in \tau$

(02) بفرض أن $A_i , A_j \in \tau$ حيث $i , j \in N$ ، وعليه نحصل علي $A_i \cap A_j = A_k \in \tau$ حيث $k = \min\{i , j\}$.

(03) بفرض أن $A_{n_i} \in \tau$ حيث $i \in N$ ، وبالتالي فإن $A_{n_i} = \{1, 2, \ldots, n_i\}$ وعليه يكون $\cup A_{n_i} = \{1, 2, \ldots, k\} \in \tau$ حيث $k = \max\{n_i : i \in I\}$.

ملاحظات :

(١) إذا أخذت القيم n القيم $\{1, 2, \ldots, n\}$ فإننا نحصل على عدد لانهائى من التوبولوجيات المختلفة على X وهى $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots\}$ حيث

$$\tau_n = \{\phi, N, A_n = \{1, 2, \ldots, n\} : n \in N\}$$

(٢) يمكن تعريف أكثر من توبولوجى على R يختلف عن التوبولوجى العادى.

تعريف (٢. ١. ٧) : (القرص المفتوح **Open Disk**)

القرص المفتوح D في المستوى R^2 هو مجموعة النقاط التى تقع داخل الدائرة التى مركزها $P(x_o, y_o)$ ونصف قطرها $r > 0$. أى أن:

$$D = \{(x, y) : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r\}$$
$$= \{q \in R^2 : d(p, q) < r\}$$

حيث $d(p, q)$ ترمز إلى المسافة بين نقطتين في المستوى أى أن :

حيث $q = (x, y)$, $d(p, q) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$

تعريف (٢. ١. ٨) :

المجموعـــة $A \subseteq R^2$ تســمى مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كانت لكل $x \in A$ يوجد قرص مفتوح D بحيث أن $x \in D \subseteq A$.

تعريف (٢. ١. ٩) :

العائلـــة $\mathcal{U}$ المكونه من كل المجموعات المفتوحة على R^2 تشكل توبولوجى على R^2 ويسمى الزوج المرتب $(R^2, \mathcal{U})$ بالفضاء التوبولوجى العادى على المستوى.

البرهان :

تترك للقارئ كتمرين

المــثال التالى يوضح أنه ليس من الضرورى أن يكون اتحاد عدد من التوبولوجيات على مجموعة ما X يمثل توبولوجى.

مثال (٢. ١. ١٠) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c\}$ نعرف

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}\} \ , \tau_2 = \{X, \phi, \{b\}\}$$

من الواضح أن كل من τ_2 , τ_1 تمثل توبولوجي على X. ونجد أن

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$$

لا تمثل توبولوجى على X. حيث أن $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$

نظرية (٢. ١. ١١) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية . ونفرض τ_i عائلة توبولوجيه على X إذاً $\bigcap_i \tau_i$ تمثل توبولوجى على X.

البرهان :

لإثبات أن $\bigcap_i \tau_i$ تمثل توبولوجى على X نجد أن

(01) حيث أن $X, \phi \in \tau_i \; ; \forall i$ إذاً $X, \phi \in \bigcap_i \tau_i$

(02) نفــرض أن $A_1, A_2 \in \bigcap_i \tau_i$ إذاً $A_1, A_2 \in \tau_i \; , \forall i$ وعلــيه يكــون $A_1 \cap A_2 \in \tau_i \; , \forall i$. إذاً $A_1 \cap A_2 \in \bigcap_i \tau_i$

(03) نفرض أن $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap_i \tau_i$. وبالتالى فإن $A_1, A_2, \ldots \in \tau_i \; \forall i$ وعليه يكون $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \tau_i \; \forall i$. إذاً $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \bigcap_i \tau_i$

تعريف (٢. ١. ١٢) :

نفرض τ_1, τ_2 توبولوجيان على المجموعة غير الخالية X . يقال أن τ_1 أضعف **Coarser (or Weaker)** مــن τ_2 أو τ_2 أقــوى **finer (Stronger)** من τ_1 إذا كان $\tau_1 \subset \tau_2$ أى أن $\forall A \in \tau_1 \Rightarrow A \in \tau_2$

ملاحظة :

إذا كــان $\tau_1 \not\subseteq \tau_2$ أو $\tau_2 \not\subseteq \tau_1$ فإنــنا نقول أن هذه التوبولوجيات غير قابلة للمقارنة **(incomparable)**.

مثال (٢. ١. ١٣) :

(١) الــتوبولوجى غــير المتقطع **(indiscrete)** على المجموعة الغير خالية X والذى يعرف بالصورة $I = \{X, \phi\}$ ، هو مجموعة جزئية من أى توبولوجى أخر على X وعليه فهو أضعف توبولوجى **(Coarsest Topology)** على X .

وعــلى الجانــب الآخــر التوبولوجى المتقطع **(discrete topology)** يحتوى على أى توبولوجى آخر من X . وعليه فهو أقوى توبولوجى **(finest topology)** على X .

(٢) نفرض $X = \{a, b, c, d\}$. ونفرض

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}\} \; , \; \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$
$$\tau_3 = \{X, \phi, \{a, b\}\} \; , \; \tau_4 = I \; , \; \tau_5 = D$$

نلاحظ أن $\tau_1 \subset \tau_2 \;,\; \tau_2 \not\subset \tau_1 \;, \tau_1 \not\subset \tau_3$

وهذا يعنى أن τ_1 أضعف من τ_2 أو τ_2 أقوى من τ_1.

بديهية (٢. ١. ١٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى فإن $A \in \tau$ إذا وفقط إذا كان لكل $x \in A$ توجد $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U \subseteq A$

البرهان :

أولا : نفرض أن $A \in \tau$ وبوضع $U = A$ فإننا نحصل على $x \in U \subseteq A$.

ثانـيا : بفرض أن لكل $x \in A$ توجد $U \in \tau$ بحيث أن $x \in U \subseteq A$ وبالتالى فإن $A = \underset{x \in A}{\cup} U$. أى أن $A \in \tau$ لأنها عبارة عن أتحاد لمجموعات مفتوحة.

والآن نرى كيف يمكن توليد توبولوجى بواسطة الدوال.

نظرية (٢. ١. ١٥) :

إذا كانت $f : X \to Y$ داله معرفه من المجموعة X إلى المجموعة Y، نفرض τ توبولوجى على Y فإن

$$\tau^* = \{U \subseteq X : U = f^{-1}(V) \; and \; V \in \tau\}$$

تمثل توبولوجى على X.

البرهان :

(01) بمـا أن $Y, \phi \in \tau$. إذاً $f^{-1}(Y) = X \;\&\; f^{-1}(\phi) = \phi$ وعليه يكون $X, \phi \in \tau^*$.

(02) نفـــرض $U_1, U_2 \in \tau^*$. إذاً يوجـــد $V_1, V_2 \in \tau$ بحيـــث $U_1 = f^{-1}(V_1) \;\; \& \; U_2 = f^{-1}(V_2)$. ومنها نحصل على

$$U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

وحيث أن $V_1 \cap V_2 \in \tau$ إذاً $U_1 \cap U_2 \in \tau^*$.

(03) نفـــرض $U_i \in \tau^* \quad \forall i=1,2,...$ إذاً يوجد $V_i \in \tau \, \forall i=1,2,...$ بحيث أن $U_i = f^{-1}(V_i) \quad \forall i=1,2,...$. إذاً

$$\bigcup_i U_i = \bigcup_i f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup_i V_i)$$

ولكن $\bigcup_i V_i \in \tau$ ومنها $\bigcup_i U_i \in \tau^*$.

إذاً τ^* تمثل توبولوجي على X .

تمارين (٢ . ١)

(١) أعط كل التوبولوجيات الممكنه على المجموعة $X = \{a, b, c\}$.

(٢) هل العائلة : $\tau = \{\phi, N, E_n = \{n, n+1, n+2, ...,\} : n \in N\}$ تشكل توبولوجي على N .

(٣) هل العائلة $\tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$ تشكل توبولوجي على R؟ إذا كان الامر كذلك بين أن $\tau \subseteq \mathcal{U}$.

(٤) بفرض أن $f : X \to Y$ داله شاملة (غامرة) ، (X, τ) فضاء توبولوجي. هل العائلة $\tau^* = \{f(U) : U \in \tau\}$ تعرف توبولوجي على Y ؟ ولماذا؟

(٥) بفـــرض أن X لانهائـــية و τ توبولوجي معرف على X بحيث أن المجموعات الجزئية اللانهائية من X مفتوحة. بين أن τ هو التوبولوجي المنفصل.

(٦) بفـــرض أن X لانهائـــية و τ تتكون من ϕ والمجموعات الجزئية من X التي تكون مكملاتها قابلة للعد .

(i) بين أن τ توبولوجي على X .

(ii) إذا كانت X قابلة للعد، صف التوبولوجي المعين بواسطة τ .

(٧) بفرض أن X مجموعة غير قابلة للعد وأن ∞ نقطة معينة في X وأن τ عائلة كل المجموعات الجزئية من G بحيث أن :

$(i)\quad \infty \notin G \quad (ii)\ \infty \in G$ بشرط أن تكون G^c منتهيه .

برهن أن τ توبولوجى على X .

(٨) إذا كانت $A, B \subseteq X$ مجموعتين غير خاليتين ، $\tau = \{X, \phi, A, B\}$

فما هى الشروط التى يجب أن تتوفر في A, B كى تكون τ توبولوجى على X .

(٩) إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ أوجد كل التوبولوجيات التى تتكون من أربعة عناصر يمكن تعريفها على X .

بند (٢) : بعض المفاهيم التوبولوجية :

تعريف(٢. ٢. ١) : نقطة التراكم (النهاية-التجمع) **(limit (accumulation)point)**

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجى ، $p \in X$. يقال أن النقطة p هى نقطة تــراكم (أو نقطــة نهاية) للمجموعة $A \subseteq X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى العنصر p تحتوى على نقطة واحدة على الأقل من A بخلاف النقطة p .أى أن

$$\forall\ U \in \tau,\ p \in U \Rightarrow (U - \{p\}) \cap A \neq \phi$$

مجموعة جميع نقاط التراكم (أو النهاية) للمجموعة A تسمى مشتقة A **(derived set of A)** ويرمز لها بالرمز A' أو $d(A)$.

ويقال أن النقطه p نقطة مفردة أو منعزلة **(isolated point)** إذا تحقق أن :

$$p \notin A'\ ;\ p \in A$$

ومما سبق نجد أن :

$$p \in A' \Leftrightarrow (U - \{p\}) \cap A \neq \phi\ ;\ \forall U \in \tau, p \in U$$

من هذا المفهوم يتضح أن :

$$(i)\ p \notin A' \Leftrightarrow \exists\, U \in \tau, p \in U \ \text{such that}\ (U - \{p\}) \cap A = \phi$$

$$(ii)\ p \notin A, p \notin A' \Leftrightarrow \exists U \in \tau, p \in U\ \text{such that}\ U \cap A = \phi$$

$(iii)\ p \notin A, p \in A' \Leftrightarrow U \cap A \neq \phi\ \forall U \in \tau, p \in U$

مثال (٢. ٢. ٢) :

نفرض المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. نعرف التوبولوجى τ على X على النحو التالى : $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$

إذا كانت $A=\{a,b,d\}, B=\{a,b\}, C=\{c,e\}$. أوجد A', B', C' ؟

الحل :

اولا: بالنسبة للمجموعة $A=\{a,b,d\}$ نجد أن

العنصر $a \notin A'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة $\{a\}$ تحتوى على العنصر a ولا تحتوى على نقاط من A غير العنصر a نفسه.

والعنصر $b \in A'$ حيث لا يوجد سوى مجموعتين مفتوحتين للنقطة b هما $X, \{b,c,d,e\}$ وكلا منهما تحتوى على نقاط غير b من المجموعة A أى أن

$$(X-\{b\}) \cap A \neq \phi, (\{b,c,d,e\}-\{b\}) \cap A \neq \phi$$

العنصر $c \in A'$ لأن المجموعات المفتوحة التى تحتوى على c هى $\{b,c,d,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{c,d\}$ وجميعها تحتوى على نقاط من A .

والعنصر $d \notin A'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة $\{c,d\}$ وتحقق :

$$(\{c,d\}-\{c\}) \cap A = \phi$$

والعنصر $e \in A'$ لأن المجموعات المفتوحة التى تحتوى e هى $X, \{b,c,d,e\}$ وتتقاطع مع A فى نقاط خلاف e .

وعليه مجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة A هى $A'=\{b,c,e\}$.

ثانيا: بالنسبة للمجموعة $B=\{a,b\}$ نستطيع أن نرى أن $B'=\{e\}$

ثالثا: بالنسبة للمجموعة $C=\{c,e\}$ نجد أن

العنصر $a \notin C'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة $\{a\}$ وتحقق أن :

$$(\{a\}-\{a\}) \cap C = \phi$$

والعنصر $b \in C'$ لأن المجموعات المفتوحة التى تحتوى b هى: $X ,\{b,c,d,e\}$ وهذه المجموعات تحتوى على نقاط من C وهى النقاط e, c .

والعنصر $c \notin C'$ لأنه توجد مجموعة مفتوحة وهى $\{c,d\}$ تحتوى على العنصر c ولا تحتوى على نقاط من المجموعة C خلاف العنصر c .

والعنصران $d ,e \in C'$ لانهما يحققا التعريف ، وعليه يكون $C' = \{b,d,e\}$

ويلاحظ فى هذا المثال أن : $B \subseteq A \Leftarrow B' \subseteq A'$

<u>مثال (٢. ٢. ٣) :</u>

أوجد A' للمجموعة A الجزئية من X بالنسبة للفضاء المتقطع (X,D).

<u>الحل :</u>

نعـــلم أن $D = P(X)$ أى أن كل مجموعة جزئية من X هى مجموعة مفتوحة . إذاً $\forall\, p \in X \Rightarrow \{p\} \in D$. أى أن $(\{p\}-\{p\}) \cap A = \phi$. وبالتالى فإن $\forall\, p \in X ,\, p \notin A'$. وعليه تكون $A' = \phi$.

<u>مثال (٢. ٢. ٤) :</u>

أوجد A' للمجموعة A الجزئية من X بالنسبة للفضاء الغير متقطع (X,I).

<u>الحل :</u>

نعلم أن $I = \{X,\phi\}$ أى أن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان . فإذا كانـــت المجموعـــة A تحتوى على عنصر واحد فقط p أى أن $A = \{p\}$ فنجد أن المجموعـــة المفـــتوحة الوحـــيدة الـــتى تحـــتوى p هـــى X. وعلـــيه نجـــد أن $(X-\{p\}) \cap A = \phi$ إذاً $p \notin A'$. ولأى نقطـــة أخرى q حيث $q \neq p$

نجـد أن $(X-\{q\})\cap A=\{p\}\neq\phi$ إذاً $q\in A'$ وحيث أن q أختيارية فإن $A'=X-\{p\}=\{p\}^c$.

أما إذا كانت المجموعة A تحتوى على أكثر من عنصر فإننا نجد أن $A'=X$.

وفى ضوء ما تقدم يتضح أن :

$$A'=\begin{cases} X-\{p\} & ; if \quad A=\{p\} \\ X & ; \quad o.w. \end{cases}$$

ملاحظة : الأختصار $o.w.$ (أى $otherwise$) وتعنى خلاف ذلك أى أن المجموعة A تحتوى على أكثر من عنصر.

مثال (٢. ٢. ٥) :

إذا كانت $A\subseteq X$ مجموعة جزئية من فضاء النقطة المختارة (X,P) أوجد A'.

الحل :

إذا كانت $p\in X$ فإنه يوجد لدينا إحتمالان :

أولا: نفـرض أن $p\in A$ وعلـيه توجـد $\{p\}\in\mathrm{P}$ وتحقـق $(\{p\}-\{p\})\cap A=\phi$. إذاً نحصل على $p\notin A'$.

ونجـد أنـه ولأى نقطة $x\in X$ بحيث أن $x\neq p$ نجد أن كل مجموعة مفتوحة U تحـتوى x سوف تحتوى على p فى نفس الوقت (وذلك حسب تعريف توبولوجى النقطة المختارة) . وعليه نجد أن $x\in A'$. أى أن $A'=X-\{p\}$

ثانـيا: نفـرض أن $p\notin A$ وبالـتالى لكـل $x\in X$ توجـد مجموعـة مفتوحة $U=\{x,p\}$ وتحقق $(U-\{x\})\cap A=\phi$. إذاً $x\notin A'$.

وعليه من أولا وثانيا نستنتج أن :

$$A'=\begin{cases} X-\{p\} & ; if \quad p\in A \\ \phi & ; if \; p\notin A \end{cases}$$

نظرية (٢. ٢. ٦) :

أوجد A' حيث $A \subseteq R$ مجموعة جزئية من الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$. إذا كانت

$(i)\ \ A=(0,1)$

$(ii)\ A=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

$(iii)\ A=Q$ مجموعة الاعداد القياسية

$(iv)\ A=Z$ مجموعة الاعداد الصحيحة

الحل :

(i) بفرض أن $x \in A=(0,1)$ وحيث أن أى فترة مفتوحة $G=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ حول النقطة x تحقق $\{G-\{x\}\} \cap (0,1) \neq \phi$ فإن $x \in A'$. من جانب آخر بأخذ الفترة المفتوحة $(-\varepsilon, \varepsilon)$ حول الصفر نجد أن $\{(-\varepsilon, \varepsilon)-\{0\}\} \cap (0,1) \neq \phi$ إذاً $0 \in A'$. أيضا يلاحظ أن $1 \in A'$. أخيرا بفرض أن $x \in R$ بحيث أن $x \notin [0,1]$ نستطيع أن نرى أن $|x-0|<\varepsilon_1$ ، $|x-1|<\varepsilon_2$ حيث $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ فإذا أخذنا $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ فإن $(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \cap (0,1) = \phi$ وبالتالى فإن $x \notin A'$ ومن ذلك نستنتج أن $A' = [0,1]$.

(ii) نترك للقارئ لاثبات أن $A' = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}' = \{0\}$

(iii) نترك للقارئ لاثبات أن $A' = Q' = R$

(iv) نترك للقارئ لاثبات أن $A' = Z' = \phi$

نظرية (٢. ٢. ٧) :

نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجى. إذا كانت $A, B \subseteq X$ ، فإن :

$(i)\ A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

$(ii)\ (A \cup B)' = A' \cup B'$

$(iii)\ (A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

$(iv)\ If\ \ x \in A' \Rightarrow x \in (A - \{x\})'$

البرهان :

$(i)\ Let\ A \subset B\ and\ p \in A' \Rightarrow \forall\ U \in \tau, p \in U\ \ s.t.$

$$(U - \{p\}) \cap A \neq \phi\ , A \subset B$$

$$\Rightarrow \forall U \in \tau\ , p \in U\ \ \ s.t.\ (U - \{p\}) \cap B \neq \phi$$

$$\Rightarrow p \in B' \Rightarrow A' \subset B'$$

$(ii)\ \ A \subseteq A \cup B\ ;\ B \subseteq A \cup B$ من المعلوم أن

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $A' \subseteq (A \cup B)'\ ;\ B' \subseteq (A \cup B)'$

إذاً $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'\ \ \dots\dots\dots\ (*)$

ولاثبات أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$

$Let\ p \notin A' \cup B' \Rightarrow\ \ p \notin A'\ \ and\ p \notin B'$

$$\Rightarrow \exists\ U, V \in \tau\ ,\ p \in U\ , p \in V\ \ such\ that$$

$$(U - \{p\}) \cap A = \phi\ , (V - \{p\}) \cap B = \phi$$

ولكن $p \in U \cap V\ \in \tau$ فى الوقت الذى فيه

$$((U \cap V) - \{p\}) \cap (A \cup B) = \phi$$

إذاً $p \notin (A \cup B)'$. وعليه فإن

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'\ \ \ \dots\dots\dots\ (**)$$

ومن $(*)$ ، $(**)$ نحصل على $(A \cup B)' = A' \cup B'$

من المعلوم أن $(iii)\ \ A \cap B \subseteq A\ ;\ A \cap B \subseteq B$

باستخدام العلاقة (i) نجد أن $(A \cap B)' \subseteq A'\ ;\ (A \cap B)' \subseteq B'$

إذاً $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

$$(iv)\ \ Let\ x \in A' \Rightarrow \forall U \in \tau\ , x \in U\ , (U - \{x\}) \cap A \neq \phi$$

$$\Rightarrow (U \cap \{x\}^c) \cap A \neq \phi\ , \forall U \in \tau\ , x \in U$$

$$\Rightarrow (U \cap \{x\}^c) \cap (A - \{x\}) \neq \phi$$

$$\Rightarrow x \in (A - \{x\})'$$

المثال التالى يوضح أن العلاقة العكسية فى الجزء (iii) من النظرية السابقة ليست بالضرورة صحيحة . أى أن المثال التالى يوضح أن $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$

<u>مثال (٢. ٢. ٨) :</u>

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c\}$. ونفرض $B = \{b, c\}$, $A = \{a, c\}$.

نعرف التوبولوجى τ على X على النحو التالى: $\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{a, b\}\}$.

نجد أن $B' = \{a, c\}$, $A' = \{c\}$.

وبما أن $A \cap B = \{c\}$. إذاً $(A \cap B)' = \{c\}' = \phi$

وعليه يتضح أن $(A \cap B)' = \phi \neq (A' \cap B') = \{c\}$

<u>نظرية (٢. ٢. ٩) :</u>

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجى. إذاً

$$(i) \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i' \qquad (ii) \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i'$$

$$(ii) \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' \neq \bigcap_{i=1}^{n} A_i'$$

<u>البرهان :</u>

من المعلوم أن $(i)\ A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i\ ;\ \forall i=1,2,\ldots,n$

إذاً

$$A_i' \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)'\ ;\ \forall i=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i' \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)' \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

ولبرهان أن $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)' \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$. نفرض $p \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$. إذاً

إذاً يوجد $U_i \in \tau\ ,\ p \in U$ بحيث أن $(U_i - \{p\}) \cap A_i = \phi$ لجميع قيم $i=1,2,\ \ldots,n$. نضع $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. إذاً يوجد $U \in \tau\ ,\ p \in U$ بحيث أن $(U-\{p\}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \phi$. وعليه نحصل على $p \notin (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)'$. إذاً

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)' \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i' \quad \ldots\ldots\ldots (**)$$

من $(**),(*)$ نحصل على المطلوب .

من المعلوم أن $(ii)\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_i\ ;\ \forall i=1,2,\ldots,n$

$$\Rightarrow\ (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)' \subseteq A_i'\ ;\ \forall i=1,2,\ldots,n$$

$$\Rightarrow\ (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)' \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i'$$

بفرض أن $(iii)\ A_1=(1,3)\ ,\ A_2=(3,5)$

$$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \phi \Rightarrow (A_1 \cap A_2)' = \phi \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

ونجد أن $A_1' = [1,3]\ ,\ A_2' = [3,5]$. إذاً

$$A_1' \cap A_2' = \{3\} \quad \dots\dots\dots \quad (**)$$

من $(**),(*)$ نجد أن $(A_1 \cap A_2)' \neq A_1' \cap A_2'$

<u>مثال (٢. ٢. ١٠) :</u>

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجى. إذا كانت $U \in \tau$ برهن أن :

$$U \cup A' \subseteq (U \cap A)'$$

<u>الحل :</u>

نفـــرض $x \in U \cap A'$ ، ومـــنها $x \in U \;\&\; x \in A'$. إذاً يوجـــد $x \in V$, $V \in \tau$ بحيـــث أن $(V - \{x\}) \cap A \neq \phi$. وحيـــث أن $x \in V$, $x \in U$ فـإن $U \cap V \in \tau$، $x \in U \cap V$ لكل $x \in V$. ومن ذلك نحصل على أن :

$$(U \cap V - \{x\}) \cap A = (V - \{x\}) \cap (U \cap A) \neq \phi$$
$$; \forall V \in \tau \;, x \in V$$

وهذا يؤدى إلى $p \in (U \cap A)'$ وعليه فإن $U \cap A' \subseteq (U \cap A)'$.

<u>تعريف (٢. ٢. ١١) :</u> (المجموعات المغلقة **Closed Sets**)

نفـــرض (X, τ) فضـــاء توبولوجى. المجموعة $A \subseteq X$ تسمى مجموعة مغلقة **(closed)** إذا وفقط إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة. أى أن

A مجموعة مغلقة **(closed)** $\Leftrightarrow$ A^c مجموعة مفتوحة **(Open)**

A مجموعة مفتوحة **(Open)** $\Leftrightarrow$ A^c مجموعة مغلقة **(closed)**

سوف نرمز لمجموعة المجموعات المغلقة فى الفضاء التوبولوجى (X, τ) بالرمز $\Im_X$ أو $\Im$.

<u>مثال (٢. ٢. ١٢) :</u>

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$. نعرف التوبولوجى τ على X

على النحو التالى :

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

إذاً $\Im_X=\{\phi,X,\{b,c,d,e\},\ \{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}\}$

مثال (٢. ٢. ١٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجى المتقطع (X,D) . نجد أن كل مجموعة جزئية A من (X,D) هى مفتوحة ومغلقة فى نفس الوقت لأن :

$$P(X)=D,\forall A\subseteq X\Leftrightarrow A\in D\Leftrightarrow A^c \text{ مغلقة}$$

مثال (٢. ٢. ١٤) :

في الفضاء التوبولوجى الغير متقطع (X,I) ، المجموعتان X,ϕ هما المجموعتان المغلقتان فقط.

مثال (٢. ٢. ١٥) :

فى الفضـــاء التوبولوجى للمكملات المنتهية (X,C). نجد أن المجموعات المغلقة هى كـــل المجموعات الجزئية المنتهية بالاضافة الى المجموعة X (وهى المجموعة الوحيدة اللانهائية) . أى أن $\Im_X=\{F\subseteq X:F\ (finite)\ \text{منتهية}\}$

مثال (٢. ٢. ١٦) :

فى الفضاء التوبولوجى للنقطة المختارة (X,P). نجد أن

$$\mathrm{P}=\{\phi,U\subseteq X:p\in U\}\ ;\ \Im=\{X,F\subseteq X:p\notin F\}$$

ونلاحظ أن X,ϕ مجموعتان مغلقتان.

وكذلك أى مجموعة $A\subseteq X$ بحيث أن $p\notin A$.

مثال (٢. ٢. ١٧) :

في الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$ المجموعة $Z\subseteq R$ مغلقة لأن

$$Z^c=\bigcup_{n\in Z}(n,n+1)=R-Z$$

$$\therefore\ Z^c = \ldots \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \ldots$$

وهي أتحاد عدد لانهائى من المجموعات المفتوحة.

وفي الفضاء التوبولوجى (R,τ) . حيث

$$\tau = \{R, \phi, E_a \subset R : E_a = (a,\infty),\ a \in R\}$$

نجد أن
$$\Im = \{\phi, R,\ E_a^c \subset R : E_a^c = (-\infty, a],\ a \in R\}$$

النظرية التالية توضح خصائص المجموعات المغلقة في أى فضاء توبولوجى (X,τ) حيث أن :

(١) المجموعتان X, ϕ مغلقتان

(٢) تقاطع أى عدد من المجموعات المغلقة يعطى مجموعة مغلقة.

(٣) اتحاد عدد محدد من المجموعات المغلقة يعطى مجموعة مغلقة.

يتضح مما سبق ذكرة في بند(١) أنه لكى نشكل فضاء توبولوجى (X,τ) يجب أن نُعرف أولاً العائلة τ ، أى عائلة المجموعات المفتوحة. وتوجد أكثر من طريقة لتعريف توبولوجى على المجموعة X (كما سنرى في الباب الثالث) أحدى هذه الطرق بواسطة المجموعات المغلقة وهذه الطريقة هي الأكثر أستعمالاً بعد طريقة المجموعات المفتوحة ، والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية (٢. ٢. ١٨) :

إذا كانت X مجموعة غير خالية ، نفرض $\Im$ عائلة من المجموعات الجزئية من X وتحقق الشروط التالية :

$$(C1)\ \ X, \phi \in \Im$$
$$(C2)\ \ \bigcap_i F_i \in \Im,\ \forall\ F_i \in \Im,\ i = 1,2,\ldots$$
$$(C3)\ \ If\ \ F_1, F_2 \in \Im \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \Im$$

فإنه يمكن إيجاد توبولوجى τ على X حيث $\tau = \{U \subseteq X : U^C \in \Im\}$ هو التوبولوجى الوحيد الذى تتطابق فيه عائلة المجموعات المغلقة مع العائلة $\Im$.

البرهان :

اولاً : نـــبرهن أن $\mathcal{T}$ تعــرف توبولوجى على X . لذلك نفرض أن $U_i \in \mathcal{T}$ من ذلــك نــرى أن $U_i^c \in \Im$ لكل $i \in I$. وباستخدام الخواص $(C1) \to (C2)$ وأعتماداً على قانون دي مورجان نحصل على : $(\bigcup_i U_i)^c = \bigcap_i U_i^c \in \Im$

وهذا يكافئ القول بأن $\cup U_i \in \mathcal{T}$. بنفس الطريقة يمكن أثبات بقية الشروط.

ثانــياً : نبرهن أن عائلة المجموعات المغلقة في $(X, \mathcal{T})$ تطابق العائلة $\Im$. إذا كانت $F \in \Im$ فــإن $F^c \in \mathcal{T}$ وهـــذا يعنى أن المجموعة F مغلقة في الفضاء التوبولوجى $(X, \mathcal{T})$. العكس ، لتكن F مجموعة مغلقة في الفضاء التوبولوجى $(X, \mathcal{T})$ ومن تعــريف المجموعة المغلقة نجد أن $F^c \in \mathcal{T}$ وهذا يؤدى إلى أن $F = (F^c)^c \in \Im$ وهو المطلوب.

ثالــثاً : لأثــبات وحدانية $\mathcal{T}$ نفرض أن $\mathcal{T}^*$ توبولوجى آخر معرف على X وتحقق الشروط $(C1) \to (C2)$ ومن ثانياً نرى أن المجموعات المغلقة في الفضاء $(X, \mathcal{T})$ تطابق المجموعات المغلقة في الفضاء $(X, \mathcal{T}^*)$ لأن كل منها يطابق العائلة $\Im$ ، وهذا يؤدى إلى أن $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ وهو المطلوب.

نظرية (٢. ٢. ١٩) :

نفرض $(X, \mathcal{T})$ فضاء توبولوجى. إذا كانت $A \subseteq X$ فإن

(١) A مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت $A' \subseteq A$

(٢) $A \cup A'$ مجموعة مغلقة.

البرهان :

(١) أولا : نفرض أن A مجموعة مغلقة سوف نثبت أن $A' \subseteq A$ ، ولذلك نفرض أن $p \notin A$ إذاً $p \in A^c \in \mathcal{T}$. وعليه يوجد مجموعة مفتوحة A^c تحتوى p بحيث

يكون $A \cap A^c = \phi$. إذاً $p \notin A'$. ومنها نحصل على $A' \subseteq A$.

ثانيا : نفرض أن $A' \subseteq A$ وسوف نبرهن أن A مجموعة مغلقة ويكفى لبرهان ذلك إثبات أن A^C مجموعة مفتوحة.

نفـــرض $p \in A^C$ نقطة أختيارية. إذاً $p \notin A$ وبما أن $A' \subseteq A$. فإن $p \notin A'$. إذاً يوجد $U_p \in \tau$ ، $p \in U_p$ بحيث أن $U_p \cap A = \phi$. ومنها نحصل علي $p \in U_p \subset A^C$. ومن ثم فإن $A^C = \cup \{U_p : p \in A^C\}$.

وهذا يعنى أن المجموعة A^C مجموعة مفتوحة حيت أنها اتحاد مجموعات مفتوحة .

(٣) لأثبات أن $A \cup A'$ مجموعة مغلقة سوف نبرهن أن: $(A \cup A')' \subseteq A \cup A'$

نفرض أن $p \notin A \cup A'$. ومنها $p \notin A \ \& \ p \notin A'$. وهذا يؤدى إلى أنه توجد $G \in \tau$ ، $p \in G$ بحيـــث أن $(G - \{p\}) \cap A = \phi$ ، وحيث أن $p \notin A$. فإن $G \cap A = \phi$. ويجب أن نلاحظ أن G لا تحتوى على نقاط تراكم للمجموعة A' طالما $G \cap A = \phi$ لأن:

$$p \in G \in \tau, G \cap A = \phi \Rightarrow p \notin A \Rightarrow (G - \{p\}) \cap A = \phi$$

$$\Rightarrow p \notin A' \Rightarrow G \cap A' = \phi$$

ويكون لدينا $G \cap A = \phi \ \& \ G \cap A' = \phi$ ، وعليه نحصل على

$$G \cap (A \cup A') = \phi \Rightarrow p \notin (A \cup A')'$$

وهذا يؤدى إلى $(A \cup A')' \subseteq A \cup A'$ وهو المطلوب.

الآن نسوق لك بعض الأمثلة على الخواص.

<u>مثال (٢. ٢. ٢٠) :</u>

إذا كانت المجموعة A مغلقة فإن المجموعة A' تكون مغلقة . عكس هذه العلاقة

ليس بالضرورة صحيح.

الحل :

أولا : حيث أن A مجموعة مغلقة فإن $A' \subseteq A$. ومنها نجد أن $(A')' \subseteq A'$.

وبالتالى فإن A' مجموعة مغلقة.

ثانيا : نفرض الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$. إذا كانت $A=]a,b[\subset R$.

فـإن $A'=[a,b]$. فى هذا المثال يلاحظ أن A' مجموعة مغلقة ولكن A مجموعة مفتوحة.

مثال (٢. ٢. ٢١) :

فى فضـاء المكمـلات المنتهية (X,C) حيث X مجموعة لانهائية . بين أنه لاى مجموعـة جزئية A من X تكون A' مجموعة مغلقة. وأن $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)' \neq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i'$ حيث $A_i \subseteq X$.

الحل :

(i) إذا كانت A مجموعة منتهية (finite) فإن A تكون مغلقة. إذاً $A' \subseteq A$ ومنها تكون A' مجموعة منتهية . أى أن A' مجموعة مغلقة.

(ii) إذا كانت A مجموعة لانهائية (Infinite) سوف نثبت أن A' مجموعة مغلقة.

نفرض أن $p \in X , p \notin A'$. إذاً يوجد $U \in C , p \in U$ بحيث أن

$$(U-\{p\}) \cap A=\phi \quad \dots \quad \dots \dots \quad (*)$$

وحيث أن U مجموعة مفتوحة . فإن U^C مجموعة منتهية ومن (*) نجد أن :

$$A \subseteq (U-\{p\})^C$$

وهـــذا تعارض (لأن A مجموعة لانهائية) وبالتالى فإن $p \in A' ; \forall p \in X$ ومنها نجد أن $A' = X$ وحيث أن X مجموعة مغلقة ، فإن A' مجموعة مغلقة.

والآن بفرض أن (X, C) فضاء المكملات المنتهية حيث X مجموعة لانهائية.

نفرض أن $A_i = \{x_i\}$ لجميع قيم i الطبيعية ولكل $x_i \in X$ فإن $A_i' = \phi$. لأن $\{x_i\}$ مغلقة لجمبع قيم i . إذاً

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' = \phi \quad \dots\dots\dots \quad (*)$$

بأخذ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = B$

وحيث أن B مجموعة لا نهائية مرقمة . إذاً $B' = X$. وعليه نجد أن

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)' = X \quad \dots\dots\dots \quad (**)$$

من $(*), (**)$ نجد أن : $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)' \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$

تمارين (٢ . ٢)

(١) بين أنه إذ اكانت A مجموعة جزئيه منتهيه من مجموعة الأعداد الحقيقية R فإن $A' = \phi$.

(٢) برهن أن كل مجموعة جزئية منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية R تكون مغلقة.

(٣) عين نقاط التراكم للمجموعات التالية : $N, Z, (a,b], Q^c$

(٤) بفرض أن $\tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$

(i) عين المجموعات المغلقة في τ . (ii) أوجد $[3,7)'$ ، $\{2, 5, 9, \dots\}'$.

(٥) بفرض أن $\tau = \{\phi, N, E_n = \{n, n+1, n+2, \dots,\} : n \in N\}$

(i) أوجد المجموعات المفتوحة التى تحتوى على العدد 8 .

(ii) أوجد N' ، $\{4,13,28,37\}'$ ، $\{1,2,4,6\}'$.

(٦) نفرض المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$. نعرف التوبولوجى τ على المجموعة X على النحو التالى :

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\,d\},\{a,b,c,d,e\},\{a,b,e\}\}$$

إذا كانت $C=\{a\}$, $B=\{b\}$, $A=\{c,d,e\}$ مجموعات جزئيه من X .
أوجد A',B',C' .

(٧) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ أوجد توبولوجي ذا أصغر رتبة على X بحيث يحتوى على كل من المجموعتين $\{a,b,c\}$ ، $\{b,c,d\}$ ويحقق أن $A'=\{a,b,c\}$ ، $A=\{b,c\}$.

(٨) إذا كانت $A\subseteq F$ حيث F مجموعة مغلقة فى الفضاء التوبولوجى (X,τ) بين أن $A'\subseteq F$.

(٩) بفرض أن (X,C) هو فضاء المكملات المنتهيه. أثبت أن A' مغلقة لأى مجموعة جزئية A من X .

(١٠) إذا كانت U مجموعة مفتوحة فى الفضاء التوبولوجى (X,τ) ، $U\cap A=\phi$ ، أثبت أن $U\cap A'=\phi$.

(١١) في أى فضاء توبولوجى (X,τ) إذا كانت $A'=\phi$ لأى $A\subseteq X$. بين أن A تكون مغلقة.

(١٢) في الفضاء التوبولوجى (X,τ) بين أن $\{x\}'\subset\{x\}^c$ لكل $x\in X$.

(١٣) بين أن مجموعة الأعداد الصحيحة Z تكون مغلقة في الفراغ التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$ بطريقتين.

بند (٣) : الإغلاق (اللصاقة) للمجموعات : (The closure of Sets)

تعريف (٢. ٣. ١) :

نفرض (X,τ) فضاء توبولوجى ونفرض المجموعة $A \subseteq X$. يعرف الإغلاق للمجموعة A (يرمز لها بالرمز $\overline{A}$) على أنه تقاطع جميع المجموعات المغلقة فى X والتى تحتوى المجموعة A . أى أن

$$\overline{A} = \bigcap_i \{ F_i : \ A \subseteq F_i \, , \, F_i \subseteq X \, , \, F_i \text{ مغلقة } \forall i \}$$

ملاحظات (٢. ٣. ٢) : من التعريف يتضح ما يلى :

(١) $\overline{A}$ مجموعة مغلقة لأنها تقاطع لمجموعات مغلقة.

(٢) $\overline{A}$ هـى أصغر مجموعة مغلقة تحتوى A أى أنه لأى مجموعة مغلقة F تحتوى المجموعة A فإن $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$.

مثال (٢. ٣. ٣) :

نفرض المجموعة $X = \{a,b,c,d,e\}$. نعرف التوبولوجى τ على X كما يلى : $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$

إذا كانت $A = \{a\}, B = \{b,c\}, C = \{b,d\}, D = \{a,b,c\}$

أوجد $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ ؟

الحل :

نجد أن مجموعة جميع المجموعات المغلقة فى X هى:

$$\Im = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$$

وعليه يكون $\overline{A} = \{a\} \; , \; \overline{B} = \{b,c,d,e\} = \overline{C} \;\&\; \overline{D} = X$

مثال (٢. ٣. ٤) :

نفرض أن A مجموعة جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X,C). مجموعة جميع المجموعات الجزئية المغلقة من X هى :

$$\Im=\{X, F\subseteq X : F \text{ finite منتهية}\}$$

وهـــذا يعـــنى أن $\overline{A}=A$ إذا كانت A مجموعة منتهية ، $\overline{A}=X$ إذا كانت A مجموعة غير منتهية .

مثال (٢. ٣. ٥) :

نفرض الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$. إذا كانت $A=(a,b)$ أو $A=[a,b)$ أو $A=(a,b]$ أو $A=[a,b]$. فإن $\overline{A}=[a,b]$.

مثال (٢. ٣. ٦) :

نفـــرض أن A مجموعـــة جزئية غير خالية من فضاء النقطة المختارة (X,P). أوجد $\overline{A}$.

الحل :

حيـــث أن $\mathrm{P}=\{\phi, U\subseteq X : p\in U\}$. إذاً مجموعة جميع المجموعات الجزئية المغلقة من X هى : $\Im=\{X, F\subseteq X : p\notin F\}$

أى هى العائله التى تحتوى المجموعتان X,ϕ وكذلك أى مجموعة جزئية F من X بحيث أن $p\notin F$. وإذا كانت $A\subseteq X$ فإن

$$\overline{A}=\begin{cases} A & , p\notin A \\ X & , p\in A \end{cases}$$

نظرية (٢. ٣. ٧) :

نفرض (X,τ) فضاء توبولوجى. إذا كانت $A\subseteq X$ فإن :

$(i)\ A\subseteq \overline{A}$

$(ii)\ \overline{A}=A \Leftrightarrow A$ مغلقة

$(iii)\ \overline{A}=A\cup A'$

$(iv)\ A\subseteq B \Rightarrow \overline{A}\subseteq \overline{B}$

الحل :

برهان $(i),(ii)$ يأتي مباشرة من التعريف. والان نبرهن العلاقة (iii) .

سوف نبرهن أولا أن $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

بما أن $A \subseteq \overline{A}$ إذاً باستخدام نظرية (٢. ٢. ٧) نجد أن $A' \subseteq (\overline{A})'$ وحيث أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة فإن $(\overline{A})' \subseteq \overline{A}$. وعليه نجد أن $A \subseteq \overline{A}$, $A' \subseteq \overline{A}$. إذاً نحصل على

$$A \cup A' \subseteq \overline{A} \ldots\ldots\ldots (*)$$

والآن سوف نبرهن أن $\overline{A} \subseteq A \cup A'$

سبق وأن برهنا أن $A \cup A'$ مجموعة مغلقة وهي تحتوى المجموعة A . وعليه نجد أن

$$\overline{A} \subseteq A \cup A' \ldots\ldots\ldots (**)$$

من $(*),(**)$ نحصل على $\overline{A} = A \cup A'$.

(iv) بما أن $A \subseteq B$. إذاً باستخدام نظرية (٢. ٢. ٧) نجد أن $A' \subseteq B'$. إذاً $A \cup A' \subseteq B \cup B'$. وعليه نجد أن $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

<u>نظرية (٢. ٣. ٨) :</u>

في الفضاء التوبولوجى (X,τ). إذا كانت $A \subseteq X$ ، $p \in X$. فإن $p \in \overline{A}$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى p تحتوى على الأقل عنصر من A . أى أن :

$$p \in \overline{A} \Leftrightarrow U \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau , p \in U$$

<u>البرهان :</u>

<u>أولا :</u> نفرض أن $p \in \overline{A} = A \cup A'$. إذاً $p \in A$ أو $p \in A'$

إذا كانت $p \in A$. فإن $U \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau \ , \ p \in U$

وإذا كانت $p \in A'$. فإن $(U - \{p\}) \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau \ , \ p \in U$

ومن ثم فإن $U \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau \ , \ p \in U$

ثانيا : نفرض $U \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau \ , \ p \in U$. إذاً $p \in A$ أو $p \notin A$

إذا كانت $p \in A$ فإن $p \in \overline{A}$ (وذلك لأن $A \subseteq \overline{A}$)

وإذا كانت $p \notin A$ ، $U \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau \ , \ p \in U$. فإن

$$(U - \{p\}) \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau \ , \ p \in U$$

وعليه نحصل على $p \in A'$. وحيث أن $\overline{A} = A \cup A'$. إذاً $p \in \overline{A}$

ملاحظة (٢. ٣. ٩) :

(i) إذا كانت $p \notin \overline{A}$ فإنه يوجد $U \in \tau \ , p \in U$ بحيث أن $U \cap A = \phi$

(ii) إذا كانت $p \in A'$ فإن $p \in \overline{A}$ وعليه يكون $A' \subseteq \overline{A}$.

(iii) يمكن برهان النظرية(٢. ٣. ٨) بطريقة أخرى كالتالى:

نفرض أن $p \notin \overline{A}$ ، وهذا يعنى أن $p \in (\overline{A})^c$ ولكن $A \cap (\overline{A})^c = \phi$ وحيث أن $U = (\overline{A})^c$ مجموعة مفتوحة تحتوى p فإن $A \cap U = \phi$ وهذا يؤدى إلى انه إذا كان $A \cap U \neq \phi$ لكل مجموعة مفتوحه U تحتوى p فإن $p \in \overline{A}$.

والعكـــس ، نفرض أنه توجد مجموعة مفتوحه U تحتوى على p $(p \notin U^c)$ بحيث يكون $A \cap U = \phi$ ومن ثم فإن $A \subseteq U^c$ وبالتالى فإن $\overline{A} \subseteq \overline{U^c} = U^c$ لأن U^c مجموعـــة مغلقـــة ومن ذلك نحصل على أن $p \notin \overline{A}$. وهذا يعنى انه إذا كانت $p \in \overline{A}$ فإن $A \cap U \neq \phi$ لكل مجموعة مفتوحه U تحتوى p .

نظرية (٢. ٣. ١٠) :

إذا كانت A, B مجموعتان جزئيتان من الفضاء التوبولوجى (X, τ) . فإن

$$(C1) \ \ \overline{\phi} = \phi \qquad (C2) \ \ A \subseteq \overline{A} \qquad (C3) \ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(C4) \ \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (C5) \ \ \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

البرهان :

العلاقات $(C1),(C2)$ تأتى من التعريف.

$(C3)$ بما أن $A\subseteq A\cup B$. إذاً من نظرية(٢. ٣. ٧) نحصل على $\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$

وبما أن $B\subseteq A\cup B$. إذاً $\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$. وبالتالى نحصل على

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}\quad \dots\dots\dots\ (*)$$

وكذلك من نظرية(٢. ٣. ٧) ، $(C2)$ نجد أن $A\subseteq\overline{A}\ ,B\subseteq\overline{B}$ وعليه نحصل على : $A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$. إذاً $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{B}$. أى أن

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}\ \dots\dots\dots\ (**)$$

من $(**),(*)$ نحصل على : $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$(C4)$ بما أن $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$. إذاً $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}, \overline{A\cap B}\subseteq\overline{B}$. وعليه نحصل على $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$

$(C5)$ نفرض $\overline{A}=F$ مجموعة مغلقة . إذاً $\overline{F}=F$. وعليه فإن $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

فـيما يلى نعطى بعض الأمثلة التى توضح أن عكس العلاقة $(C4)$ فى النظرية السابقة ليست بالضرورة صحيحة.

مثال (٢. ٣. ١١) :

نفـرض A,B مجموعتان جزئيتان من الفضاء الغير متقطع (X,I) . إذا كان $A\cap B=\phi$. فإن $\overline{A\cap B}=\overline{\phi}=\phi$ ولكن $\overline{A}=X,\overline{B}=X$ وعليه نجد أن

$$\overline{A}\cap\overline{B}=X\neq\overline{A\cap B}=\phi$$

مثال (٢. ٣. ١٢) :

في الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$. إذا كانت $A=(1,3)\ ;\ B=(3,5)$. فإن

$$A\cap B=\phi\Rightarrow\overline{A\cap B}=\overline{\phi}=\phi$$

ولكن $\overline{A}=[1,3]\ ;\ \overline{B}=[3,5]$. ومن ثم فإن $\overline{A}\cap\overline{B}=\{3\}$. وبالتالى نحصل على $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

مثال (٢. ٣. ١٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجى (X,τ) ، حيث

$$X=\{a,b,c\}\ ,\ \tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$$

إذا كانت $A=\{a,c\}\ ,\ B=\{b,c\}$. نجد أن $A\cap B=\{c\}$

عائلة جميع المجموعات المغلقة فى X هى : $\Im=\{X,\phi,\{b,c\},\{c\}\}$

إذاً $\overline{A}=\overline{\{a,c\}}=X;\ \overline{B}=X\cap\{b,c\}=\{b,c\}=B$

ومنها $\overline{A}\cap\overline{B}=X\cap B=B=\{b,c\}$. ولكن $\overline{A\cap B}=\overline{\{c\}}=\{c\}$.

إذاً $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$.

النظرية التالية هى تعميم للخواص المذكورة فى نظرية(٢. ٣. ١٠) .

نظرية (٢. ٣. ١٤) :

نفرض (X,τ) فضاء توبولوجى. نفرض المجموعات الجزئية $\{A_i\}_{i\in I}$ من X.

إذاً :

$$(i)\ \overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$(ii)\ \overline{(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$(iii)\ \overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)}\neq\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

البرهان :

نترك $(i),(ii)$ للدارس كتمرين . وسوف نبرهن العلاقة (iii) .

نفرض (X,C) فضاء المكملات المنتهية ، X لانهائية. بفرض أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الجزئية من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فإن :

إذا كانـــت $\{A_i\}_{i\in I}$ منتهـــية . إذاً $\{A_i\}_{i\in I}$ مغلقـــة . وعلـــيه يكـــون

$\overline{A_i}=A_i\ ,\forall i$. إذاً $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}\overline{A_i}=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}A_i$

ولكـــن $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}A_i=\{x_1,x_2,\ldots\}$ مجموعـــة لانهائية ، ومن مثال(٢. ٣. ٤) نحصل

على $\overline{(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}A_i)}=X$ ، أى أن $\overline{(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}A_i)}\neq\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}\overline{A_i}$.

والآن نـــدرس مفهـــوم مؤثـــر الإغـــلاق الـــذى يحمل اسم العالم كوراتوفسكى **(Kuratowski)** الذى يعرف توبولوجى على المجموعه باستخدام خواص الإغلاق.

<u>نظرية (٢. ٣. ١٥) :</u>

إذا كـــان (X,τ) فضـــاء توبولوجـــي معـــرف على المجموعة X فإن المؤثر $cl:P(X)\to P(X)$ والذي يسمي مؤثراً أغلاقياً يحقق الشروط الآتية :

$$(cl1)\quad cl(\phi)=\phi$$
$$(cl2)\quad A\subseteq cl(A)\ ;\ \forall\ A\subseteq X$$
$$(cl3)\quad cl(A\cup B)=cl(A)\cup cl(B)\ \ ;\ \forall\ A,B\subseteq X$$
$$(cl4)\quad cl(cl(A))=cl(A)\ ;\ \forall\ A\subseteq X$$

وعلى العكس إذا كان cl مؤثر أغلاقى يحقق الشروط من $(cl1)$ إلى $(cl4)$ فإن العائلـــة $\Im=\{F\subseteq X: cl(F)\subseteq F\}$ هي عائلة المجموعات المغلقة في X ، والعائلـــة $\tau=\{G\subseteq X: cl(G^c)=G^c\}$ تعرف توبولوجي وحيد علي X وأن cl هو مؤثر الأغلاقي بالنسبة إلى X أى أن $cl(A)=\overline{A}$ لكل $A\subseteq X$.

<u>البرهان :</u>

سبق وأن برهنا الشروط $(cl1)-(cl4)$. والآن سوف نثبت أن τ يشكل توبولوجى على X.

(01) بمـا أن $X \subseteq cl(X) = X$ إذاً $cl(X) = X$. مـن ذلك نجد أن $cl(\phi) = \phi$. وبالتالى فإن $X, \phi \in \tau$.

(02) إذا كانت $G_1, G_2 \in \tau$. فإن $cl(G_1^c) = G_1^c ; cl(G_2^c) = G_2^c$

وعليه نحصل على أن

$$\begin{aligned} cl((G_1 \cap G_2)^c) &= cl(G_1^c \cup G_2^c) = cl(G_1^c) \cup cl(G_2^c) \\ &= G_1^c \cup G_2^c \qquad (\text{من } cl3) \\ &= (G_1 \cap G_2)^c \end{aligned}$$

إذاً $G_1 \cap G_2 \in \tau$

(03) نفرض $G_i \in \tau \; ; \forall i$. إذاً $cl(G_i^c) = G_i^c \; ; \forall i$.

وبما أن $\underset{i}{\cap} G_i^c \subseteq G_i^c$ إذاً $cl(\underset{i}{\cap} G_i^c) \subseteq cl(G_i^c) = G_i^c \; ; \forall i$.

وعليه يكون $cl(\underset{i}{\cap} G_i^c) \subseteq \underset{i}{\cap} cl(G_i^c) = \underset{i}{\cap} G_i^c = (\underset{i}{\cup} G_i)^c$

ولكن $\underset{i}{\cap} G_i^c = (\underset{i}{\cup} G_i)^c$.

ومن ذلك نحصل على $cl(\underset{i}{\cap} G_i^c) \subseteq (\underset{i}{\cup} G_i)^c$.

إذاً $cl((\underset{i}{\cup} G_i)^c) = (\underset{i}{\cup} G_i)^c$. أى أن $\underset{i}{\cup} G_i \in \tau$.

والآن نثبـت أن cl مـا هو الا مؤثر الاغلاق بالنسبة للتوبولوجى τ أى المطلوب أثـبات أن $cl(A) = \overline{A}$ لأى مجموعـة جزئية A من X . وذلك باثبات أن عائلة المجموعـات المغلقـة في (X, τ) تطـابق المجموعـات المغلقـة $\Im = \{F \subseteq X : F^c = F\}$ والتى تحقق الشروط $cl1$ إلى $cl4$ وذلك كما يلى :

(i) حيـث أن $cl(cl(A)) = cl(A)$ (مـن $cl4$) فإن $cl(A)$ مجموعة مغلقة تحوى A وبالتالى فإن $\overline{A} \subseteq cl(A)$ لأن $\overline{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوى A .

(ii) حيث أن $\overline{A} \cup A = \overline{A}$ فإنه من $(cl3)$ نحصل على

$$cl(\overline{A} \cup A) = cl(\overline{A}) \cup cl(A) = cl(\overline{A})$$

وهـــذا يـــؤدى إلى أن $cl(A) \subseteq cl(\overline{A})$ ولكـــن $\overline{A}$ مجموعـــه مغلقة في الفضاء (X, τ) نجد أن $cl(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$ ومنها $cl(A) \subseteq \overline{A}$.

من (i) ، (ii) نستنتج أن $cl(A) = \overline{A}$.

ولاثـــبات وحدانـــية τ نفرض أن τ^* توبولوجى آخر على X تحقق شروط الـــنظرية ومن ثم فإن المجموعات المغلقة في الفضاء (X, τ) تطابق المجموعات المغلقة في الفضاء (X, τ^*) ومن ثم فإن $\tau = \tau^*$.

بالـــرجوع إلى بعـــض الأمثلة التى أوردناها في بداية هذا البند نجد أن هناك بعض المجموعات لصاقتها تطابق الفضاء X هذه المجموعات تلعب دوراً مهماً في الفضاءات التوبولوجية ، من أجل ذلك نعطى التعريف التالى :

تعريف (٢. ٣. ١٦) : (المجموعة الكثيفة **Dense Set**)

في الفضاء التوبولوجى (X, τ) إذا كانت $A, B \subseteq X$ فإن :

(١) يقال إن A كثيفة (**dense**) فى B إذا كانت $B \subseteq \overline{A}$.

(٢) يقال إن A كثيفة (**dense**) فى X إذا كانت $\overline{A} = X$.

ملاحظة (٢. ٣. ١٧) :

المجموعـــة X كثـــيفة فى أى مجموعـــة جزئـــية منها لأنه لأى $A \subseteq X$ يكون $A \subseteq X = \overline{X}$.

مثال (٢. ٣. ١٨) :

فى الفضـــاء الغـــير متقطع (X, I) إذا كانت $A \subseteq X$ حيث $A \neq \phi$ فإن A كثـــيفة فى X لأن X هـــى المجموعة الوحيدة المغلقة التى تحتوى A . ومن ثم فإن $\overline{A} = X$.

مثال (٢. ٣. ١٩) :

فى الفضـــاء المتقطع (X,D) لا توجد مجموعة جزئية فعلية وتكون كثيفة فى X لأن $A \subseteq X$ $\forall$; $\overline{A}=A$.

مثال (٢. ٣. ٢٠) :

في الفضاء التوبولوجى (R,τ) حيث

$$\tau=\{R,\phi,E_a=(a,\infty):a\in R\}$$

اثبت أن المجموعتين $A=\{2,4,6,...\}$, $B=\{1,3,5,...\}$ مجموعات كثيفة فى R بينما المجموعة $C=\{-2,-4,-6,...\}$ ليست كثيفة فى R .

الحل :

المجموعات المغلقة فى (R,τ) هى العائلة

$$\Im=\{\phi,R\ ,E_a^c=(-\infty,a]:a\in R\}$$

وبالتالى فإن R هى المجموعة المغلقة التى تحتوى كلا من A,B ولهذا يكون $\overline{A}=R$, $\overline{B}=R$. إذاً A,B كثيفة فى R ولكن

$$\overline{C}=\overline{\{-2,-4,...\}}=(-\infty,-2]$$

أى أن $\overline{C}\neq R$ ولهذا فإن C ليست كثيفة فى R .

مثال (٢. ٣. ٢١) :

فى فضاء النقطة المختارة (X,P) ، $A\subseteq X$ نعلم أن

$$\overline{A}=\begin{cases} A & , if\ p\notin A \\ X & , if\ p\in A \end{cases}$$

وهذا يعنى أن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت $p\in A$.

مثال (٢. ٣. ٢٢) :

فى فضاء المكملات المنتهية (X,C) ، $A\subseteq X$ نعلم أن

$$\overline{A} = \begin{cases} A & , if\ A \text{ finite} \\ X & , if\ A \text{ infinite} \end{cases}$$

وهذا يعنى أن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت A لانهائية.

نظرية (٢. ٣. ٢٣) :

إذا كـان (X, τ) فضـاء توبولوجى وكانت $A \subseteq X$ فإن الخواص التالية متكافئة :

(١) A كثيفة فى X

(٢) إذا كانت F مجموعة مغلقة تحتوى A فإن $F = X$.

(٣) لكـل $p \in X$ ولكـل مجموعـة مفـتوحة U بحيـث أن $p \in U$ فـإن $A \cap U \neq \phi$.

البرهان : (١) $\Rightarrow$ (٢)

نفرض أن F مجموعة مغلقة تحتوى A إذاً $\overline{A} \subseteq F$ وباستخدام (١) نحصل على أن $X = \overline{A} \subseteq F$ ومنها نجد أن $X = F$.

(٢) $\Leftarrow$ (٣)

نفـرض أن $p \in X$ ، U مجموعة مفتوحة بحيث أن $p \in U$ ، $A \cap U = \phi$.

إذاً $A \subseteq U^c$ وحيث أن U^c مجموعة مغلقة فإنه من (٢) نجد أن $X = U^c$ وهذا يؤدى إلى أن $U = \phi$ وهذا تناقض لأن $U \neq \phi$ ومن ثم فإن $A \cap U \neq \phi$.

(٣) $\Leftarrow$ (١)

نفرض $\forall p \in X, U \in \tau, p \in U$. إذاً $U \cap A \neq \phi ; \forall U \in \tau, p \in U$

إذاً من (٣) ونظرية(٢. ٣. ٨) نجد ان $p \in \overline{A}$ إى أن $X \subseteq \overline{A}$ ولكن $\overline{A} \subseteq X$

وبالتالى نحصل على $\overline{A} = X$. أى أن المجموعة A كثيفة فى X .

مثال (٢. ٣. ٢٤) :

فى الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$. أثبت أن مجموعة الأعداد القياسية (أو

النسبية) Q كثيفة فى R.

الحل :

المطلوب اثبات أن $R \subseteq \overline{Q}$ حيث $\overline{Q} \subseteq R$ ؟

نفرض $x \in R$. إذاً يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $x \in (x-\delta, x+\delta)$. وهذه فترة مفتوحة تحتوى x ونصف قطرها δ وتحتوى عدد لانهائى من الاعداد القياسية. إذاً $Q \cap (x-\delta, x+\delta) \neq \phi$. وهــذا يتحقق لكل فترة مفتوحة (مجموعة مفتوحة) تحتوى x ، وهذا يعنى أن $x \in \overline{Q}\ ; \forall x \in R$. ومنها نجد أن $R \subseteq \overline{Q}$.

وعليه يكون $\overline{Q} = R$. أى أن Q كثيفة فى R.

تمارين (٢ . ٣)

(١) فى الفضاء التوبولوجى (R, τ) حيث $\tau = \{R, \phi, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$

أثبت أن $\overline{\{7,24,47,85\}} = (-\infty, 85]$, $\overline{[3,4)} = (-\infty, 4]$

(٢) فى الفضاء التوبولوجى (N, τ) حيث

$$\tau = \{\phi, N, E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots,\} : n \in N\}$$

أوجد (i) $\overline{\{3,6,9,12,\ldots\}}$, $\overline{\{7,24,47,85\}}$

(ii) عين المجموعات الجزئية الكثيفة في N.

(٣) أثبت أن $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$.

(٤) إذا كانت $A \cap B \neq \phi$. أثبت أن $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$

(٥) نفرض أن F مجموعة مغلقة. أثبت أن $\overline{F \cap A} \subseteq F \cap \overline{A}\ ; \forall A \subseteq X$

(٦) نفرض أن U مجموعة مفتوحه. أثبت أن $U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A}\ \forall A \subseteq X$.

(٧) بفرض أن U مجموعة مفتوحة ، A كثيفة في X. أثبت أن $U \subseteq \overline{U \cap A}$

(٨) بين أن A كثيفة في X إذا وفقط إذا كانت $A^c \cap (A')^c = \phi$.

بند(٤) : **النقاط الداخلية والخارجية والحدية :**

(Interior , exterior and boundary points of a set)

تعريف (٢. ٤. ١) :

لتكن A مجموعة جزئيه من الفضاء (X,τ). النقطة $p\in A$ تسمى نقطة داخلية **(interior point)** لـلمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U\in\tau$ بحيث أن $p\in U\subseteq A$.

مجموعة جميع النقاط الداخلية للمجموعة A يرمز لها بالرمز A^o (أو $\text{int}(A)$) وتقرأ داخلية A. أى أن $p\in A^o \Leftrightarrow \exists U\in\tau, p\in U \;\; s.t. \;\; p\in U\subseteq A$

تعريف (٢. ٤. ٢) :

لتكن A مجموعة جزئيه من الفضاء (X,τ). النقطة $p\in X$ تسمى نقطة خارجية **(exterior point)** لـلمجموعة A إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U\in\tau$ بحيث أن $p\in U\subseteq A^c=X-A$. أى إذا كانت $p\in(A^c)^o$.

مجموعة جميع النقاط الخارجية للمجموعة A يرمز لها بالرمز $ext(A)$ وتقرأ خارجية A. أى أن

$$p\in ext(A) \Leftrightarrow \exists U\in\tau, p\in U \;\; s.t. \;\; p\in U\subseteq A^c$$

تعريف (٢. ٤. ٣) :

لتكن A مجموعة جزئيه من الفضاء (X,τ). النقطة $p\in X$ تسمى نقطة حدية **(boundary point)** للمجموعة A إذا وفقط إذا كانت $p\in X$ ليست نقطة داخلية وليست نقطة خارجية. يرمز لمجموعة جميع النقاط الحدية للمجموعة A بالرمز $b(A)$. وعليه يكون

$$p\in b(A) \;\Leftrightarrow\; p\notin A^o \;\&\; p\notin ext(A)$$

أى أن

$$b(A)=X-(A^o\cup ext(A))$$

مثال (٢. ٤. ٤) :

نفرض (X,τ) فضاء توبولوجي. حيث $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$. إذا كانت $A=\{b,c,d\}$ أوجد A^o , $ext(A),b(A)$ ؟

الحل :

واضح أن $c,d\in A$ هما العنصران الوحيدان اللذان يحققان وجود $\{c,d\}\in\tau$ بحيث أن $\{c,d\}\subseteq A$ ومن ثم فإن $A^o=\{c,d\}$.
وبالمثل $A^c=\{a,e\}$ نجد أن $a\in A^c$ هو العنصر الوحيد الذى يحقق وجود $\{a\}\in\tau$ بحيث أن $\{a\}\subseteq A^c$ ومن ثم فإن $ext(A)=\{a\}$. وحيث أن $A^o\cup ext(A)=\{a,c,d\}$ نحصل على $b(A)=\{b,e\}$.

مثال (٢. ٤. ٥) :

في الفضاء التوبولوجي العادى $(R,\mathcal{U})$ إذا كان :

$$A=[a,b),B=(a,b),C=(a,b],D=[a,b]\ ,E=Q$$

فإن

$$A^o=B^o=C^o=D^o=(a,b),E^o=\phi$$
$$ext(A)=ext(B)=ext(C)=ext(D)=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$$
$$ext(E)=\phi$$
$$b(A)=b(B)=b(C)=b(D)=\{a,b\}\ ,\ b(E)=R$$

مثال (٢. ٤. ٦) :

في الفضاء المتقطع (X,D) . إذا كانت $A\subseteq X$ فإن

$$A^o=A,\ ext(A)=A^c\ ,b(A)=\phi$$

مثال (٢. ٤. ٧) :

في الفضاء الغير متقطع (X,I) . إذا كانت $A\subseteq X$ فإن

$$A^{o}=\phi,\ ext(A)=\phi, b(A)=X$$

تعريف (٢. ٤. ٨) :

نفرض (X,τ) فضاء توبولوجي. يقال أن المجموعة $A\subseteq X$ متناثرة (nowher dense) في X إذا تحقق أن $(\overline{A})^{o}=\phi$.

مثال (٢. ٤. ٩) :

في الفضاء التوبولوجي العادى $(R,\mathcal{U})$. المجموعة $A=\{(1/n) : n\in N\}$ متناثرة في R لأن $(\overline{A})^{o}=\phi$.

مثال (٢. ٤. ١٠) :

أثبت أنه إذا كانت المجموعة A الجزئية من الفضاء (X,τ) متناثرة فإن $(\overline{A})^{c}$ تكون كثيفة في X.

البرهان :

بفرض أن A متناثرة وأن $(\overline{A})^{c}$ ليست كثيفة في X وبالتالى من نظرية (٢. ٣. ٨) توجد مجموعة مفتوحة G في X ونقطة $p\in X$ تحقق :

$$p\in G\ ,\ G\cap(\overline{A})^{c}=\phi$$

وهذا بدورة يؤدى إلى أن $p\in G\subseteq\overline{A}$.

أى أن $p\in(\overline{A})^{o}$ وهذا تعارض لأن $(\overline{A})^{o}=\phi$ ، وعليه تكون $(\overline{A})^{c}$ كثيفة في X.

مثال (٢. ٤. ١١) :

(١) أى مجموعة A جزئية من الفضاء (X,C) تكون كثيفة في X إذا كانت لا نهائية وتكون متناثرة إذا كانت A منتهية.

(٢) لا توجد مجموعة جزئية فعليه متناثرة في الفضاء المتقطع أو في الفضاء الغير متقطع.

النظريات التالية توضح بعض خواص المجموعات الداخلية والخارجية والحدية.

نظرية (٢. ٤. ١٢) :

إذا كانــت A مجموعــة جزئيه من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فان الخواص الأتيه محققه:

(١) $A^o = \cup\{G_i : G_i \in \tau , G_i \subseteq A\}$

(٢) A^o هى أكبر مجموعة مفتوحة تقع داخل A .

(٣) $A^o = A$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة .

(٤) $A^o = (\overline{A^c})^c$, $(A^o)^c = (\overline{A^c})$, $(\overline{A})^c = (A^c)^o$

البرهان :

(١) نفــرض أن $x \in A^o$ فانه توجد $G_{i_o} \in \tau$ بحيث أن $x \in G_{i_o} \subseteq A$ إذاً $x \in A^o$ وهذا يؤدى إلى $A^o \subseteq \cup\{G_i : G_i \in \tau , G_i \subseteq A\}$

نفرض $x \in \cup\{G_i : G_i \in \tau , G_i \subseteq A\}$ إذاً يوجد $G_{i_o} \subseteq A$ بحيث $x \in G_{i_o}$. أى أن $x \in A^o$. إذاً $\cup\{G_i : G_i \in \tau , G_i \subseteq A\} \subseteq A^o$

وعليه يكون $A^o = \cup\{G_i : G_i \in \tau , G_i \subseteq A\}$.

(٢) حيــث أن A^o هى أتحاد المجموعات المفتوحة التى تقع داخل A (من(١)) فإن A^o مجموعة مفتوحة وهى أكبر مجموعة مفتوحة تقع داخل A ونوضح ذلك :

إذا كانــت $G \in \tau$ ، $p \in G$ ، $G \subseteq A$ إذاً $p \in G \subseteq A$ وعلــيه يكــون $p \in A^o$ إذاً $G \subseteq A^o$ وأيضا $A^o \subseteq A$.

(٣) نفرض أن $A^o = A$ ومن ثم فإن A مجموعة مفتوحة .

وبفــرض أن A مجموعــة مفــتوحة فإنه لأى $p \in A$ نجد أن $p \in A \subseteq A$ إذاً $p \in A^o$ ومنها نحصل على $A \subseteq A^o$ وحيث أن $A^o \subseteq A$ فإن $A^o = A$.

(٤) سوف نبرهن علاقة واحدة من العلاقات المعطاة بطريقتين مختلفتين:

حيث $A^{o}=\cup\{E: E\in\tau \ and \ E\subseteq A\}$

مغلقة $E\subseteq A \Leftrightarrow A^{c}\subseteq E^{c}=F$

نجد أن $A^{o}=\cup\{F: F \ closed \ and \ A^{c}\subseteq F\}$

$$=(\cap\{F^{c}: F \ closed \ and \ A^{c}\subseteq F\})^{c}=(\overline{A^{c}})^{c}$$

طريقة آخرى :

$$if \ p\in X-\overline{A}\Leftrightarrow p\notin\overline{A}\Leftrightarrow\exists U\in\tau, p\in U \ s.t. \ U\cap A=\phi$$

$$\Leftrightarrow \exists \ U\in\tau \ , p\in U \ s.t. \ p\in U\subseteq A^{c}$$

$$\Leftrightarrow p\in(A^{c})^{o}=(X-A)^{o}$$

أى أن $X-\overline{A}=(X-A)^{o} \ , \ (A^{c})^{o}=(\overline{A})^{c}$

<u>نظرية (٢. ٤. ١٣) :</u>

إذا كانت A مجموعة جزئيه من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فإن الخواص الآتيه محققه :

(١) $b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^{c}}$ (٢) $b(A)$ مجموعة مغلقة

(٣) $b(A)=b(A^{c})$ (٤) $b(A)=\overline{A}-A^{o}$

(٥) $\overline{A}=b(A)\cup A^{o}$

<u>البرهان :</u>

(١) نجد أن $b(A)=\{x\in X: x\notin A^{o} \ \& \ x\notin(A^{c})^{o}\}$

$$=\{x\in X: x\notin(\overline{A^{c}})^{c} \ \& \ x\notin(\overline{A})^{c}\}$$ (من نظرية(٢. ٤. ١٢))

$$=\{x\in X: x\in\overline{A^{c}} \ \& \ x\in\overline{A}\}$$

$$=\{x\in X: x\in\overline{A^{c}}\cap\overline{A}\}=\overline{A}\cap\overline{A^{c}}$$

(٤) نجد أن

$$b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}=\overline{A}\cap(A^o)^c=\overline{A}\cap(X-A^o)$$
$$=\overline{A}\cap X-\overline{A}\cap A^o \qquad (A^o\subseteq A\subseteq\overline{A})$$
$$=\overline{A}-A^o$$

(٥) حيث أن $A^o\subseteq A\subseteq\overline{A}$ فاننا نحصل على

$$b(A)\cup A^o=(\overline{A}-A^o)\cup A^o=\overline{A}$$

نظرية (٢. ٤. ١٤) :

إذا كانت A مجموعة جزئيه من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فان الخواص الأتيه محققه:

(١) $b(A)\cap A^o=\phi$

(٢) $b(A)\cap ext(A)=\phi$

(٣) $A^o\cap ext(A)=\phi$

(٤) $A^o\cup ext(A)\cup b(A)=X$

البرهان :

(١)
$$b(A)\cap A^o=(\overline{A}-A^o)\cap A^o=\overline{A}\cap A^o-A^o\cap A^o$$
$$=A^o-A^o=\phi$$

(٢)
$$b(A)\cap ext(A)=b(A^c)\cap(A^c)^o$$
$$=b(X-A)\cap(X-A)^o=\phi$$

(٣)
$$A^o\cap ext(A)=A^o\cap(A^c)^o=A^o\cap(\overline{A})^c$$
$$=A^o\cap(X-\overline{A})=A^o\cap X-A^o\cap\overline{A}$$
$$=A^o-A^o=\phi$$

(٤)
$$b(A)\cup A^o\cup ext(A)=\overline{A}\cup(A^c)^o=\overline{A}\cup(\overline{A})^c=X$$

ملاحظة :

نستنتج من هذه النظرية أن المجموعة $\{A^o, ext(A), b(A)\}$ تشكل تجزيئاً للمجموعة X في الفضاء التوبولوجى (X, τ).

مثال (٢. ٤. ١٥) :

ليكن (N, τ) فضاء توبولوجى . حيث τ معرفة كما يلى :

$$\tau = \{\phi,\ N,\ A_n = \{1,2,3,...n\} : n \in N\}$$

حيث N مجموعة الأعداد الطبيعيه. أوجد $A^o, ext(A), b(A)$ إذا كان :

$$(i)\ A = \{1,2,4,6\} \qquad (ii)\ A = \{5,7,9,20\}$$

الحل:

(i) حيث ان $A = \{1,2,4,6\}$ فان اكبر مجموعة مفتوحه محتواه في A هي $A_2 = \{1,2\}$ وبذلك تكون $A^o = \{1,2\}$ ومن السهل أن نرى أن $ext(A) = \phi\ ,\ b(A) = \{3,\ 5,7,\ ...\}$.

(ii) حيث أن $A = \{5,7,9,20\}$ وهى لاتحوى أى مجموعة مفتوحة فإن $A^o = \phi$. المجموعات المغلقة في N هى :

$$\phi, N, \{2,3,4,...\}, \{3,4,5,...\}, ..., \{n, n+1, ...\}$$

وأصغر مجموعة مغلقة تحوى A هى $\{5,6,7,...\}$ وبذلك تكون $\overline{A} = \{5,6,7,...\}$ ومنها نجد أن :

$$ext(A) = (A^c)^o = N - \overline{A} = \{1,2,3,4\}$$

ويجب أن نلاحظ أن المجموعة $A_1 = \{1\}$ كثيفة في N وكذلك أى مجموعة جزئية من N تحوى A_1 تكون كثيفة. وهذا بدورة يؤدى إلى أن $N - A$ مجموعة كثيفه في N وعليه تكون :

$$b(A) = \overline{A} \cap \overline{N - A} = \overline{A} \cap N = \overline{A} = \{5,6,7,...\}$$

وبناء على ذلك نرى أن هناك ثلاث مجموعات مرتبطه بأى مجموعة جزئيه A من الفضاء التوبولوجى (N, τ) وهى $A^o, ext(A), b(A)$ وهى تجزئيأ للمجموعة X.

نظرية (٢. ٤. ١٦) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن الخواص الآتية محققة :

$$(i)\ \ ext(A) \subseteq X - A$$
$$(ii)\ \ ext(A) = ext(A - ext(A))$$
$$(iii)\ \ ext(A \cup B) = ext(A) \cap ext(B)$$

البرهان : يترك للقارئ كتمرين

مثال (٢. ٤. ١٧) :

لأى مجموعة A جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X, C) . أوجد :

$A^o,\ ext(A),\ b(A)$ ؟

الحل :

حيث أن $C = \{\phi, U \subseteq X : U^c\ finite\}$ ولأى مجموعة A جزئية من X يكون لدينا حالتان:

(أ) إذا كانت A مجموعة منتهية فإن $A^o = \phi$ لأنه في هذه الحاله A لا تحوى أى مجموعة مفتوحة. وحيث أن A مغلقه فإن $ext(A) = X - \overline{A} = X - A$ وبالتالى نحصل على $b(A) = \overline{A} - A^0 = A - \phi = \phi$.

(ب) إذا كانت A غير منتهيه فإنه توجد حالتان : الأولى A^c منتهيه وفي هذه الحالة A تكون مفتوحة وتكون

$$A^o = A, ext(A) = X - \overline{A} = X - X = \phi,$$

$$b(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = X \cap (X - A) = X - A$$

وفي الحالة الثانية A^C غير منتهية فإننا نجد أن

$$A^o = \phi, ext(A) = \phi, b(A) = X$$

نظرية (٢. ٤. ١٨) :

إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن الخواص الآتيه محققه:

(1) $\phi^o = \phi \ , \ X^o = X$ (2) $A^o \subseteq A$

(3) $A \subseteq B \ \Rightarrow A^o \subseteq B^o$

(4) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$ (5) $(A^o)^o = A^o$

(6) $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$

البرهان :

واضح من التعريف أن (2) , (1) محققة.

(٣) نفرض أن $p \in A^o$ إذاً يوجد $U \in \tau$ ، $p \in U \subseteq A$ وحيث أن $A \subseteq B$ إذاً توجد $U \in \tau$ ، $p \in U \subseteq B$. وعليه فإن $p \in B^o$. إذاً $A^o \subseteq B^o$.

(٤) بما أن $A \cap B \subseteq A \ , \ A \cap B \subseteq B$. إذاً $(A \cap B)^o \subseteq A^o \ , \ (A \cap B)^o \subseteq B^o$. إذاً

$$(A \cap B)^o \subseteq A^o \cap B^o \quad \dots \dots \dots (*)$$

وبما أن $A^o \subseteq A \ , \ B^o \subseteq B$. إذاً $A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)$. إذاً $(A^o \cap B^o)^o = A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o$ وذلك لأن $A^o \cap B^o$ مجموعة مفتوحة. إذاً

$$A^o \cap B^o \subseteq (A \cap B)^o \quad \dots \dots \dots (**)$$

من $(**)$, $(*)$ نحصل على $\quad (A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

(٥) بما أن $A^o = B$ مجموعة مفتوحة . إذاً $B^o = (A^o)^o = B = A^o$. إذاً $(A^o)^o = A^o$.

(٦) بما أن $B \subseteq A \cup B \;,\; A \subseteq A \cup B$. فإنَّ

$A^o \subseteq (A \cup B)^o,\ B^o \subseteq (A \cup B)^o$. إذاً $A^o \cup B^o \subseteq (A \cup B)^o$

المـــثال التالى يوضح أنه ليس من الضرورى تساوى العلاقة رقم (٦) من النظرية السابقة .

مثال (٢. ٤. ١٩) :

نفرض المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$. نعرف التوبولوجى τ على X كما يلى : $\tau = \{X, \phi, \{a,b\}, \{c,d\}\}$. نفرض المجموعتان $B = \{b, d\} \;,\; A = \{a, c\}$. يلاحظ أن $B^o = \phi \;,\; A^o = \phi$ ونجد أن $(A \cup B) = \{a, b, c, d\} = X$. إذاً $(A \cup B)^o = X$

وعليه فإن $\quad (A \cup B)^o = X \neq A^o \cup B^o$

النظرية التالية هى تعميم لبعض النتائج التى حصلنا عليها في النظرية السابقة.

نظرية (٢. ٤. ٢٠) :

إذا كانـــت $\{A_j\}_{j \in N}$ عائلـــة مـــن المجموعات الجزئية من الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن :

$$(1)\quad (\bigcap_{j=1}^{n} A_j)^o = \bigcap_{j=1}^{n} A_j^o$$

$$(2)\quad (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)^o \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j^o$$

$$(3)\ \ (\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)^o \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^o$$

البرهان :

نـــترك للقارىء إثبات العلاقات $(2),(1)$ والبرهان يسلك نفس الأسلوب كما في النظرية السابقة. والمثال التالى يبرهن العلاقة (3) .

نفرض الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$. ونفرض المجموعات الجزئية التالية:

$A_j = (-\frac{1}{j},\frac{1}{j})\ ;\forall\ j\in N$. إذاً $(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \{0\}$ وعليه يكون

$$(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)^o = \phi\ \ \dots\ \dots\ \dots\ (*)$$

وذلك لأنه لا توجد مجموعة مفتوحة تحتوى الصفر وتقع داخل المجموعة $\{0\}$.

ولكن $A_j^o = (-\frac{1}{j},\frac{1}{j})\ ;\forall\ j\in N$ وبالتالى نحصل على:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^o = \{0\}\ \ \dots\ \dots\ \dots\ (**)$$

من $(**)\ ,\ (*)$ نلاحظ أن $(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)^o \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^o$

مثال (٢. ٤. ٢١) :

إذا كان $\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$ فإن $(A\cup B)^o = A^o\cup B^o$

الحل :

لإثبات أن $(A\cup B)^o \subseteq A^o\cup B^o$ نفرض أن $x\notin A^o\cup B^o$.

ونفرض $x\in(A\cup B)^o$ إذاً يوجد $U\in\tau$ بحيث $x\in U\subseteq A\cup B$. إذاً $U\subseteq A$ أو $U\subseteq B$ أو $(U\not\subset A\,\&\,U\not\subset B)$.

(i) إذا كان $U\subseteq A$ فإن $x\in A^o$ إذاً $x\in A^o\cup B^o$

(ii) إذا كان $U \subseteq B$ فإن $x \in B^o$ إذاً $x \in A^o \cup B^o$

(iii) إذا كان $U \not\subset A \& U \not\subset B$ فإن $U \cap B \neq \phi$,$U \cap A \neq \phi$. إذاً لكل $V \in \tau$ ، $x \in V$ نحصل على $x \in \overline{A}$ & $x \in \overline{B}$. إذاً $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

وهذا تعارض للفرض أن $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$.وبالتالى فإن (i) ، (ii) صحيحة ، أى أن $x \in A^o \cup B^o$. إذاً $(A \cup B)^o \subseteq A^o \cup B^o$.

الأمثلة الآتية توضح متى تكون أى مجموعة A جزئية من الفضاء التوبولوجى مغلقة أو مفتوحة وذلك بالاعتماد على حدية A .

مثال (٢. ٤. ٢٢) :

A مفتوحة ومغلقة إذا وفقط إذا كان $b(A) = \phi$

الحل :

$(\Rightarrow)$ نجد أن

$$b(A) = \overline{A} - A^o = \phi \Rightarrow \overline{A} \subset A^o \Rightarrow A \subseteq \overline{A} \subseteq A^o$$

ولكن $A^o \subseteq A \subseteq \overline{A}$ إذاً $A = A^o = \overline{A}$.

أى أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة .

$(\Leftarrow)$

وحيث أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة فإن $A = A^o = \overline{A}$ إذاً $b(A) = \phi$ (لأن $b(A) = \overline{A} - A^o$).

مثال (٢. ٤. ٢٢) :

في أى فضاء توبولوجى المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $b(A) \subseteq A$ وتكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $b(A) \subseteq X - A$.

الحل :

لـــنفرض أن $b(A) \subseteq A$ ومـــن نظـــرية (٢. ٤. ١٣) نجـــد أن $b(A) = \overline{A} - A^o \subseteq A$ وهـــذا يؤدى إلى أن $A \subseteq \overline{A} \subseteq A$ أى أن $A = \overline{A}$ وبالتالى فإن A مغلقة. العكس نفرض أن A مغلقه أى أن $A = \overline{A}$ ومن ثم نجد أن $b(A) = \overline{A} - A^o = A - A^0 \subseteq A$.

مـــن جانب آخر تكون المجموعة A مفتوحه إذا وفقط إذا كانت $X - A$ مغلقه ومـــن الحالـــة الســـابقة نســـتنتج أن $X - A$ تكـــون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $b(X - A) \subseteq X - A$ ولكن $b(A) = b(X - A)$ ومن ثم فإن A مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $b(A) \subseteq X - A$.

مثال (٢. ٤. ٢٤) :

أثبت أن $b(A \cup B) \neq b(A) \cup b(B)$

الحل :

نفرض الفضاء التوبولوجى العادى $(R, \mathcal{U})$. ونفرض

$A = (1,3]$, $B = [3,5)$. إذاً $b(A) = \{1,3\}, b(B) = \{3,5\}$

إذاً $b(A) \cup b(B) = \{1, 3, 5\}$

ونجد أن $A \cup B = (1,5)$. إذاً $b(A \cup B) = \{1,5\}$. وعليه يلاحظ أن

$$(1,5) = b(A \cup B) \neq b(A) \cup b(B) = \{1,3,5\}$$

نظرية (٢. ٤. ٢٥) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي. نفرض $A \subseteq X$. الخواص التالية متكافئه:

(i) A كثيفة في X .

(ii) إذا كانت $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة بحيث $A \subseteq F$ فإن $F = X$

(iii) $ext(A) = \phi$.

لبرهان :

$(ii) \Leftarrow (i)$

حيث أن A كثيفة في X فإن $\overline{A}=X$. ولكن F مجموعة مغلقة تحتوى A أى أن $A \subseteq F \Rightarrow \overline{A} \subseteq F \Rightarrow X \subseteq F \Rightarrow F = X$

$(iii) \Leftarrow (ii)$

حيث أن $\overline{A} \subseteq X$ مجموعة مغلقة وتحقق $A \subseteq \overline{A}$ ومن (ii) نحصل على $\overline{A}=X$. إذا $(A^c)^o = (\overline{A})^c = X - X = \phi$.

إذاً $ext(A) = (A^c)^o = \phi$.

$(i) \Leftarrow (iii)$

حيث أن $(A^c)^o = \phi$ فإن $\phi = X - \overline{A} \Rightarrow \overline{A} = X$

أى أن A كثيفة في X.

ونختتم هذا الباب بمفهوم المؤثر الداخلى والذى عن طريقة يمكن توليد توبولوجي.

تعريف (٢. ٤. ٢٦) :

نفرض (X, τ) فضاء توبولوجى. المؤثر $Int: P(X) \to P(X)$ يسمى مؤثراً داخلياً إذا حقق الشروط التالية :

$(Int.1)\ \ Int(X) = X \ ,\ Int(\phi) = \phi$

$(Int.2)\ Int(A) \subseteq A \ \ ; \forall\ A \subseteq X$

$(Int.3)\ Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)\ ; \forall\ A, B \subseteq X$

$(Int.4)\ \ Int(Int(A)) = Int(A)\ ; \forall\ A \subseteq X$

نظرية (٢. ٤. ٢٧) :

بفرض أن X مجموعة غير خالية وأن $Int: P(X) \to P(X)$ مؤثر داخلى فإن العائلة $\tau = \{A \subseteq X : Int(A) = A\}$ تشكل توبولوجى وحيد على X وأن $Int(A) = A^o$.

<u>البرهان :</u>

<u>أولا:</u> نثبــت أن $\tau=\{A\subseteq X: Int(A)=A\}$ تشكل توبولوجي على X.
واضح أن $X,\phi\in\tau$. لتكن $A_1, A_2\in\tau$ ومن الشرط $(Int.3)$ نجد أن

$$Int(A_1\cap A_2)=Int(A_1)\cap Int(A_2)=A_1\cap A_2$$

ومـــن ذلـــك نحصـــل على أن $A_1\cap A_2\in\tau$. لنفرض أن $A_i\in\tau$ لكل i فإن $A_i=Int(A_i)$ لكل i وحيث أن $A_i\subseteq\underset{i}{\cup}A_i$ فإن

$$A_i=Int(A_i)\subseteq Int(\underset{i}{\cup}A_i) \quad (\text{من } (Int.3))$$

ومـــن ذلـــك نستنتج أن $\underset{i}{\cup}A_i\subseteq Int(\underset{i}{\cup}A_i)$ ، ومن الشرط $(Int.2)$ نجد أن $Int(\underset{i}{\cup}A_i)=\underset{i}{\cup}A_i$. وبالتالى فإن $\underset{i}{\cup}A_i\in\tau$.

<u>ثانــيا</u> : نبرهن أن $Int(A)=A^o$ حيث A^o هى المجموعة الداخلية للمجموعة A في الفضاء التوبولوجى (X,τ).

(i) حيــث أن $Int(A)$ مجموعــة مفــتوحة (من الشرط $(Int.4)$) وأيضاً $Int(A)\subseteq A$ من الشرط $(Int.2)$ فإن $Int(A)\subseteq A^o$.

(ii) حيث أن $A^o\cap A=A^o$ فإنه ينتج من الشرط $(Int.3)$ أن :

$$Int(A^o\cap A)=Int(A^o)\cap Int(A)=Int(A^o)$$

وهذا يؤدى إلى أن $Int(A^o)\subseteq Int(A)$ ولكن A^o مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجى (X,τ). إذاً $A^o\subseteq Int(A)$.

من (i) ، (ii) نحصل على التساوى ، أى أن $Int(A)=A^o$.

<u>مثال (٢ . ٤ . ٢٨) :</u>

لــتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية ، لأى مجموعة جزئية A من N يكون لدينا المجموعة الجزئية A^* المعرفه بالصورة :

$$A^* = \{n \in N : \{1,2,3,\dots,n\} \subseteq A\}$$

أثبت أنه يوجد توبولوجي وحيد τ على N بحيث أن $A^* = A^o$.

الحل :

واضح أن $A^* \subseteq A$ ، $N^* \subseteq N$ ، $\phi^* \subseteq \phi$. أيضاً $(A^*)^* = A^*$.

بفرض أن $A, B \subseteq N$ نجد أن

$$\begin{aligned}(A \cap B)^* &= \{n \in N : \{1,2,3,\dots,n\} \subseteq A \cap B\}\\ &= \{n \in N : \{1,\dots,n\} \subseteq A\} \cap \{n \in N : \{1,\dots,n\} \subseteq B\}\\ &= A^* \cap B^*\end{aligned}$$

وحسب نظرية (٢. ٤. ٢٧) يوجد توبولوجي وحيد τ على N بحيث أن $A^* = A^o$ وبذلك نستنتج أن المجموعة A تكون مفتوحة في الفضاء (N, τ) إذا كانت $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

وبهذا نحصل على التوبولوجي τ المذكور في مثال (٢. ١. ٦).

تمارين (٢. ٤)

(١) نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) حيث أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

إذا كانت $A = \{c, d, e\}$ ، $B = \{b\}$. أوجد

$$A^o, ext(A), b(A), B^o, ext(B), b(B)$$

(٢) نفرض الفضاء التوبولوجي (X, τ) ، إذا كانت $A, B \subseteq X$ بين أن

(i) $b(A^o) \subseteq b(A)$

(ii) $b(A \cup B) \subseteq b(A) \cup b(B)$

(iii) $(\overline{A})^o \supseteq A, \ A \in \tau$

(iv) $(\overline{(\overline{A})^o})^o = (\overline{A})^o$

$(v)\ \overline{(\overline{A^o})^o} = \overline{A^o}$

(٣) أوجد $b(A)$ في الفضاء المنفصل (X,D) حيث $A \subseteq X$.

(٤) برهن أن $b(A) \subset A^c$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة .

(٥) إذا كانت $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ ، $A^c \cap B^c = \phi$ بين أن A, B مجموعتيم مفتوحتين ومغلقتين .

(٦) بين أنه إذا كانت $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ فإن $b(A \cup B) = b(A) \cup b(B)$

(٧) إذا كانت U مجموعة مفتوحة بين أن $\overline{(\overline{U})^o} = \overline{U}$

(٨) إذا كانت F مجموعة مغلقة بين أن $(\overline{F^o})^o = F^o$

(٩) بفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ أوجد توبولوجي ذا أصغر رتبة على X ومجموعة جزئية ذات أصغر رتبة بحيث أن $\overline{A} = \{c, b, e\}$ ، $A^o = \{d, e\}$.

تمارين عامة على الباب الثاني

(١) أى من التجمعات التالية تشكل توبولوجى على المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$(i)\ \tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$
$(ii)\ \tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$
$(iii)\ \tau_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,d\}, \{b,e\}\}$
$(iv)\ \tau_4 = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

٢) لتكن X مجموعة غير خالية ، A مجموعة جزئية من X . برهن أن العائلة $\tau_{(A)} = \{U \subseteq X : A \subseteq U\}$ تشكل توبولوجى على X ثم أوجد المجموعة A كى تطابق $\tau_{(A)}$ التوبولوجى المنفصل ، التوبولوجى الغير منفصل ؟

٣) بفرض أن $\tau = \{R, \phi, E_q = (q, \infty) : q \in Q\}$ حيث Q هى مجموعة الأعداد القياسية. بين أن τ لا تمثل توبولوجى على R .

(٤) بـين أن العائلـة $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ تشكل توبولوجى على المجموعة $X=\{a,b,c,d\}$. إذا كانت $A=\{a,b,c\}$ أوجد $A^o, ext(A), b(A), A', \overline{A}$.

(٥) أعـط مثال في الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$ تكون فيه المجموعات التالية مختلفة :

$$A^o,\ A, A', \overline{A}\cap\overline{B}, A\cap\overline{B}, \overline{A}\cap B,\ b(A), b(A'), b(\overline{A})$$

لأى $A,B\subseteq R$.

(٦) لتكن $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$ ما هو أصغر توبولوجى يمكن تعريفة على X لكى تكون المجموعات التالية مفتوحة $X,\{1,2\},\{3,4,5\}$.

(٧) نفرض أن X هو فضاء المكملات المنتهية. بين أن A' مغلقة لأى مجموعة A جزئية من X .

(٨) بفرض أن $\tau=\{R,\phi,E_a=(a,\infty):\ a\in R\}$

أوجد $[4,10)', Z'$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

إذا كانت $A=[7,\infty)$ أوجد $A^o,\ ext(A),\ b(A)$.

(٩) أعـط مـثال لتوبولوجى لا يكون منفصل بحيث أن المجموعات المغلقة تتطابق مع المجموعات المفتوحة ؟

(١٠) بين أن كل مجموعة جزئية غير منتهية في فضاء المكملات المنتهية اللانهائى تكون كثيفة؟

(١١) إذا كانت U مجموعة مفتوحة ، $V=(\overline{U})^o$ بين أن $\overline{U}=\overline{V}$.

(١٢) بـرهن أن $(\overline{(\overline{A})^o})^o=(\overline{A})^o$ لكل $A\subseteq X$ في الفضاء التوبولوجى (X,τ).

(١٣) إذا كانت F مجموعة مغلقة ، $H=\overline{(F^o)}$ بين أن $H^o=F^o$.

(١٤) لتكن U مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى (X,τ) . تسمى U مجموعة مفـــتوحة بانـــتظام (regular open) إذا كان $\overline{U}^o=U$ وتسمى U مجموعة مغلقة منتظمة (regular closed) إذا كان $\overline{U^o}=U$ سنرمز بـــ $Ro(U)$ ، $Rc(U)$ للمجموعتين $\overline{U}^o$ ، $\overline{U^o}$ على الترتيب.

(i) برهن أنه إذا كانت U مفتوحة فإن $U\subseteq Ro(U)$. وإذا كانت U مغلقة فإن $U\subseteq Rc(U)$.

(ii) برهن أنه إذا كانت U مجموعة مغلقة بانتظام فإن تكون U^c كذلك.

(iii) بـــين أن تقاطع (إتحاد) عدد منتهى من المجموعة المفتوحة (المغلقة) بانتظام يكون كذلك.

(١٥) بفـــرض أن τ_1,τ_2 توبولوجـــين على X بحيث أن $\tau_2\subset\tau_1$. إذا كانت $A\subset X$.

(i) بـــين أن نقـــاط تراكم A في الفضاء (X,τ_2) هى أيضا نقاط تراكم A في لفضاء (X,τ_1).

(ii) أعـــط توبولوجـــيين τ_1,τ_2 عـــلى X بحيث يكون نقاط تراكم $A\subseteq X$ بالنسبة إلى τ_1 لا تكون نقاط تراكم A بالنسبة إلى τ_2 .

(١٦) إذا كانت X مجموعة منتهيه ، (X,C) هو فضاء المكملات المنتهيه. صف هذا الفضاء.

(١٧) بـــين أن $\mathrm{P}\cup E$ هو التوبولوجى المنفصل على X حيث P هو توبولوجى نقطه المختارة ، E هو توبولوجى النقطة المستبعدة على المجموعة X .

(١٨) أعــط مــثال لمجموعتين جزئيتين A, B ومختلفتين في الفضاء (X, τ) بحيث تكون $A' = B'$.

(١٩) إذا كــان τ_1, τ_2 توبولوجـــيين على X بحيث أن $\tau_1 \subseteq \tau_2$ بين أن $\tau_2 - \overline{A} \subseteq \tau_1 - \overline{A}$ لكل $A \subseteq X$.

(٢٠) بــرهن أن عائلـــة كل المجموعات الجزئية من R والمتماثله حول نقطة الأصل تشـــكل توبولوجى على R ثم بين أن المجموعات المفتوحة تطابق المجموعات المغلقة في الفضاء الناتج.

الباب الثالث

طرق توليد التوبولوجيات

Methods of generating topologies

الباب الثالث

طرق توليد التوبولوجيات

Methods of generating topologies

بفرض أن X مجموعة أختيارية وغير خالية . بتوليد توبولوجى معرف على X نعنى بذلك أختيار عائله τ من المجموعات الجزئية من X والتى تحقق الشروط $(01),(02),(03)$ أى العائله τ بحيث يكون (X,τ) فضاء توبولوجى. سوف نتعرض في هذا الباب لعدة طرق لتعريف توبولوجى على مجموعة خلاف التى اوردناها في الباب الثاني وذلك عن طريق تقديم بعض المفاهيم مثل نظم الجوار – الأساس والأساس الجزئى– التوبولوجى النسبى.

بند (١) : الجوار وأنظمة الجوار :

(Neighbourhood and Neighbourhood Systems)

تعريف (٣. ١. ١) : Neighbourhood

في الفضاء التوبولوجى (X,τ)، إذا كانت $p \in X$ ، $N \subseteq X$. يقال أن المجموعة N جواراً للنقطة p **(nbd , for short)** إذا وجدت مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث أن : $p \in U \subseteq N$. أى أن

$$N \text{ is a nbd of } p \Leftrightarrow \exists\, U \in \tau \text{ s.t. } p \in U \subseteq N$$

مجموعة كل مجموعات الجوار للنقطة p تسمى أنظمة الجوار ويرمز لها بالرمز $\mathcal{N}_p$

أى أن :
$$\mathcal{N}_p = \{N \subseteq X : \exists\, U \in \tau,.\ p \in U \subseteq N\}$$

ملاحظة : N جوار للنقطة p يكافئ أن p نقطه داخلية للمجموعة N أى أن :

$$N \in \mathcal{N}_p \Leftrightarrow p \in N^o$$

مثال (٣. ١. ٢) :

(١) نفرض الفضاء التوبولوجى (X,τ) حيث أن $X = \{a,b,c\}$ ، $\tau = \{X,\phi,\{b\},\{b,c\}\}$. أوجد الجوارات للنقاط التى تنتمى إلى المجموعة X .

الحل :

الجوار الوحيد للنقطة a هو المجموعة X.

بالنسبة للنقطة b فإن المجموعات الأربعة : $\{b\}, \{b,c\}, X, \{a,b\}$ هى جوارات للنقطة b حيث أن كل منها يحتوى على المجموعة المفتوحة $\{b\}$ والتى تحتوى على العنصر b .

وبالنسبة للنقطة c فإن المجموعات : $\{b,c\}, X$ هى جوارات للنقطة c .

(٢) نفرض $X = \{a,b,c,d\}$، ونفرض $\tau = \{X, \phi, \{b\}\}$. من الواضح أن (X,τ) فضاء توبولوجى ونجد أن المجموعة $\{b,c\}$ هى جوار للنقطة b حيث $b \in \{b\} \subset \{b,c\}$. ونلاحظ أن المجموعة $\{b,c\}$ ليست مفتوحة حيث أنها لا تنتمى إلى التوبولوجى τ .

(٣) نفرض الفضاء التوبولوجى (X,τ) حيث $X = \{a,b,c,d\}$، $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}, \{a,b\}\}$. المجموعة $A = \{a,b,c\}$ تعتبر جوار للنقاط a,b حيث $a \in \{a\} \subseteq A$، $b \in \{b\} \subseteq A$ أيضا $a,b \in \{a,b\} \subseteq A$. ولكن المجموعة A ليست جوار للنقطة c (وضح ذلك؟). الجوار الوحيد فى هذا المثال للنقطة c هو المجموعة X.

مثال (٣. ١. ٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجى (X,τ) حيث أن

$X = \{a,b,c,d\}$ ، $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$.

أوجد مجموعة الجوارات للنقاط a,b,c,d.

الحل :

$$\mathcal{N}_a = \{N \subseteq X : \exists U \in \tau, a \in U \subseteq N\}$$

$$\mathcal{N}_a = \{N \subseteq X : \{a\} \subseteq N\}$$

$$=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},$$
$$\{a,c,d\},\{a,b,d\},X\}$$

$$\mathcal{N}_b=\{N\subseteq X:\{a\}\subseteq N\}$$
$$=\{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},X\}$$
$$\mathcal{N}_c=\{N\subseteq X:\{a,b,c\}\subseteq N\}=\{\{a,b,c\},X\}$$
$$\mathcal{N}_d=\{N\subseteq X:X\subseteq N\}=\{X\}$$

<u>مثال (٣. ١. ٤) :</u>

في الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$ إذا كانت $N=[0,\frac{3}{2})$ نجد أن $N\in\mathcal{N}_1$ لأن : $1\in(0,\frac{3}{2})\subset N$. ولكـــن $N\notin\mathcal{N}_0$ وأيضـــا $N\notin\mathcal{N}_{3/2}$ حيـــث لا توجد مجموعة مفتوحة (فترة مفتوحة) تحتوى 0 وتقع بأكملها داخل N.

<u>مثال (٣. ١. ٥) :</u>

في الفضاء المنفصل (X,D) ، $\forall p\in X\Rightarrow\mathcal{N}_p=\{N\subseteq X:p\in N\}$

أى أن لكل $N\subseteq X$ إذا كانت $p\in N$ فإن $N\in\mathcal{N}_p$.

<u>مثال (٣. ١. ٦) :</u>

في الفضاء التوبولوجى الغير منفصل (X,I) ، لأى نقطة $p\in X$ نجد أن :

$$\mathcal{N}_p=\{X\}\ ;\forall\ p\in X$$

<u>نظرية (٣. ١. ٧) :</u>

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجى (X,τ) تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت A جوار لجميع نقاطها. أى أن :

$$A\ \text{مفتوحة}\Leftrightarrow A\in\mathcal{N}_p\ ;\forall\ p\in A$$

<u>البرهان :</u> تترك للقارئ كتمرين.

ملاحظة (٣. ١. ٨) :

(١) مـــن البديهى أن نرى أنه إذا كانت N جوار للنقطة p فإن أى مجموعة جزئية من X تحتوى N تكون ايضاً جوار للنقطة p .

(٢) من السهل أن نرى أن تقاطع جوارين للنقطة p هو أيضاً جوار للنقطة p .

الـــنظرية التالية تقدم مسلمات نظام الجوار لنقطة في أى فضاء توبولوجى وبواسطة هذه المسلمات يمكن تكوين توبولوجى يسمى التوبولوجى المولد بواسطة نظام الجوار.

نظرية (٣. ١. ٩) :

بفـــرض أن (X,τ) فضاء توبولوجى فإن نظام الجوار $\{\mathcal{N}_p : p\in X\}$ يحقق المسلمات الآتية :

(N_1) $\mathcal{N}_p \neq \phi$ *and* $p\in N;\ \forall N\in \mathcal{N}_p$

(N_2) *If* $N\in \mathcal{N}_p$, $N\subseteq M \Rightarrow M\in \mathcal{N}_p$

(N_3) *If* $N_1, N_2\in \mathcal{N}_p \Rightarrow N_1\cap N_2\in \mathcal{N}_p$

(N_4) $\forall N\in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists M\subseteq N, M\in \mathcal{N}_p,$

(بحيث أن $M\in \mathcal{N}_q\ ;\forall q\in M$)

البرهان :

(N_1) حيـــث أن X مجموعة مفتوحة تحتوى p لكل $p\in X$ فإن $X\in \mathcal{N}_p$ ومن ثم فإن $\mathcal{N}_p \neq \phi$. أيضا $p\in N$ لكل $N\in \mathcal{N}_p$.

(N_2) نفـــرض أن $N\subseteq M$ ، $N\in \mathcal{N}_p$ فإنـــه يوجـــد $U\in\tau$ بحيـــث $p\in U\subseteq N$. وحيـــث أن $N\subseteq M$ فإنـــه يوجـــد $U\in\tau$ بحيـــث أن $p\in U\subseteq M$ وعليه يكون $M\in \mathcal{N}_p$.

(N_3) نفرض أن $N_1, N_2\in \mathcal{N}_p$ ، فإنه توجد مجموعتان $U,V\in\tau$ بحيث

$p \in U \subseteq N_1$ ، $p \in V \subseteq N_2$ وعلـــيه فـــإن $p \in U \cap V \subseteq N_1 \cap N_2$

وحيث أن $U \cap V \in \tau$. فإن $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_p$

(N_4) نفرض أن $N \in \mathcal{N}_p$ إذاً يوجد $M \in \tau$ بحيث $p \in M \subseteq N$. إذاً

$M \subseteq N$ ، ومن ذلك نجد ان $p \in M \subseteq M$ اى ان $M \in N_p$. وحيث أن

M مجموعة مفتوحة فعلية تكون أى نقطة $q \in M$ هى نقطة داخلية للمجموعة M

ومن ثم فإن $M \in \mathcal{N}_q \; ; \forall q \in M$.

ملاحظـــات (٣. ١. ١٠) :

(١) مـــن الخاصية (N_3) يمكن القول بإنه إذا كانت $N_1, N_2, \ldots, N_n \in \mathcal{N}_p$

فإن $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \in \mathcal{N}_p$ أيضاً.

(٢) مـــن نظرية(٣. ١. ٧) أتضح أن كل مجموعة مفتوحة هى جوار لكل النقاط التى تنـــتمى اليها ، والسؤال الآن هو هل العملية العكسية لهذه النظرية صحيح ؟ أى هل يمكـــن تكوين توبولوجى على X باعتبار أن المجموعات المفتوحة هى تلك المجموعات التى تكون جوارات لكل نقاطها؟ النظرية التالية سوف تجيب على هذا السؤال وتعطى الشروط الواجب أن تحققها أنظمة الجوار لكى تعين توبولوجى على X .

نظرية (٣. ١. ١١) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية. ولكل $p \in X$ نفرض أن M_p هى عائلة كل المجموعات الجزئيه من X التى تحقق الشروط $(N_1)-(N_4)$ فى النظرية (٣. ١. ٩) فإنـــه يوجـــد توبولوجى وحيد $\tau = \{U \subseteq X : \forall\, p \in U \Rightarrow U \in M_p\}$ بحيث أن M_p تتطابق مع أنظمة الجوار للنقطة p .

البرهان :

فيما يلى نبرهن أن العائلة τ تمثل توبولوجى على X .

(01) بمـــا أن $\forall\ p \in X\ ;\ X \in M_p$ فـــإن $X \in \tau$. أيضا ϕ تحقق تعريف الجوار وعليه فإن $\phi \in \tau$.

(02) نفرض أن $U_1, U_2 \in \tau$ وسوف نبرهن أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

نفـــرض $p \in U_1 \cap U_2$ فـــإن $p \in U_1$ ، $p \in U_2$ وعلـــيه $U_1 \in M_p$ ، $U_2 \in M_p$. مـــن $(N3)$ نحصل على $U_1 \cap U_2 \in M_p\ \forall\ p$. وعليه نحصل على $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(03) نفرض أن $U_i \in \tau\ ;\forall i$ وسوف نبرهن أن $\bigcup\limits_i U_i \in \tau$.

بفرض ان $p \in \bigcup\limits_i U_i$ فإنه يوجد U_{i_o} بحيث $p \in U_{i_o}$. إذاً $U_{i_o} \in M_p$ لكل $p \in U_{i_o}$ وحيث أن $U_{i_o} \subseteq \bigcup\limits_i U_i$ وباستخدام $(N2)$ نحصل على :

$\bigcup\limits_i U_i \in M_p$ لكل $p \in \bigcup\limits_i U_i$ اى ان $\bigcup\limits_i U_i \in \tau$. إذاً τ تمثل توبولوجى على X.

والمطلـــوب الآن أثبات أن M_p تتطابق مع أنظمة الجوار في الفضاء التوبولوجى (X, τ) أى أن $M_p = \mathcal{N}_p$. لذلـــك نفرض أن $N \in M_p$ فانه من الشرط (N_4) نجـــد انه توجد M حيث $M \subseteq N$ تحقق $p \in M \subseteq N$ ، $M \in M_p$ لكل $p \in M$ وهذا يعنى أن M جوار لكل نقطه فيها وبالتالى فهى مجموعة مفتوحة $M \in \tau$. ومن ثم فإن $N \in \mathcal{N}_p$ ، أى أن $M_p \subseteq \mathcal{N}_p$.

ومـــن جانـــب آخـــر ، بفرض أن $N \in \mathcal{N}_p$ أى N جوار للنقطة p في الفضاء (X, τ). إذاً توجـــد مجموعة مفتوحة $U \in \tau$ بحيث $p \in U \subseteq N$ وحيث أن $U \in \tau$ فإن $U \in M_p$ ومن الشرط (N_2) نجد أن $N \in M_p$ أى أن $\mathcal{N}_p \subseteq M_p$ ومن ذلك نستنتج ان $\mathcal{N}_p = M_p$ وهو المطلوب.

مثال (٣. ١. ١٢) :

بفرض أن $\mathcal{N}_p$ هي عائلة جوارات النقطة p في الفضاء التوبولوجي (X,τ) ، $N_i \in \mathcal{N}_p$ لجميع قيم $i=1,2,...$. بين أن $\bigcap_i N_i \notin \mathcal{N}_p$.

الحل :

نعتبر الفضاء التوبولوجي العادى $(R,\mathcal{U})$، $\mathcal{N}_n =]\frac{-1}{n},\frac{1}{n}[,\ n \in N, n \neq 0$ وعليه تكون N_n جوار للصفر لكل $n \in N$ أى أن $N_n \in \mathcal{N}_0$ ولكن $\bigcap_n N_n = \{0\}$ ، ولا توجد مجموعة مفتوحة (فترة مفتوحة) تحتوى الصفر وتقع باكملها داخل المجموعة $\{0\}$ ، ومن ثم فإن $\bigcap_n N_n \notin \mathcal{N}_0$.

مثال (٣. ١. ١٣) :

في فضاء المكملات المنتهيه (X,C) ، $p \in X$ أثبت أن $\mathcal{N}_p \subseteq C$.

الحل :

نفرض أن $N \in \mathcal{N}_p$ ومن تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة U تحقق $p \in U \subseteq N$. ومن ذلك نحصل على أن $N^c \subseteq U^c$ ولكن U^c منتهيه (لأن U مجموعة مفتوحة). إذاً N^c منتهيه وبالتالى فإن $N \in C$ وعليه فإن $\mathcal{N}_p \subseteq C$.

مثال (٣. ١. ١٤) :

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية ، $\mathcal{N}_x$ عائلة المجموعات الجزئية من R التى تحوى فترة مفتوحة تحتوى x أى أن :

$$\mathcal{N}_x = \{U \subseteq R : \exists a,b \in R, x \in (a,b) \subseteq U\}$$

نجد أن $\mathcal{N}_x$ تحقق الشروط الواردة في نظرية (٣. ١. ٩) وبالتالى يوجد توبولوجى

وحيد على R بحيث تكون $\mathcal{N}_x$ أنظمة جوار للنقطة x وهو :

$$\mathcal{T}=\{G\subseteq R: \forall x\in G\Rightarrow x\in \mathcal{N}_x \}$$

أى أن المجموعة G تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت لكل نقطة x من G فإن G تحـــوى فترة مفتوحة تحتوى x وهذا يكافئ أن G هى أتحاد فترات مفتوحة. وعليه تكون $\mathcal{T}$ هى التوبولوجى العادى والفضاء $(X,\mathcal{T})$ هو الفضاء العادى.

بند (٢) : الأساس والأساس الجزئى : (Base and Subbase)

تعريف (٣. ٢. ١) : (الأساس Base)

في الفضاء التوبولوجى $(X,\mathcal{T})$. العائلة $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$ تسمى أساس **(base)** للتوبولوجى $\mathcal{T}$ إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة هى عبارة عن اتحاد عناصر من العائله $\mathcal{B}$. أو بمعنى مكافئ يقال أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$ إذا وفقط إذا كان لكل $p\in U$ حيث $U\in\mathcal{T}$ يوجد $B\in\mathcal{B}$ بحيث يكون $p\in B\subseteq U$.

مثال (٣. ٢. ٢) :

في الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$.عائلة الفترات المفتوحة $\mathcal{B}=\{(a,b):a,b\in R\}$ تمثل أساس على R لأنه لأى مجموعة مفتوحة U في R ولأى $p\in U$ توجد فترة مفتوحة $(p-\delta,p+\delta)$ بحيث أن $p\in(p-\delta,p+\delta)\subseteq U$.

مثال (٣. ٢. ٣) :

العائلة $\mathcal{B}=\{\{p\}:p\in X\}$ تمثل أساس للتوبولوجى المنفصل D على X.

مثال (٣. ٢. ٤) :

نفرض الفضاء التوبولوجى $(X,\mathcal{T})$ حيث أن $X=\{a,b,c,d\}$ ، $\mathcal{T}=\{X,\phi,\{a,b\},\{c,d\}\}$. فإن $\mathcal{B}_1=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ تمثل أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$. كذلك المجموعة $\mathcal{B}_2=\{X,\{a,b\},\{c,d\}\}$ تمثل أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$. أما المجموعة $\mathcal{B}_3=\{X,\{a,b\}\}$ لا تمثل أساس للتوبولوجى

$\mathcal{T}$ لأن : $\{c,d\}$ مجموعة مفتوحة ولا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من $\mathcal{B}_3$.

ملاحظة : السؤال الذى يطرح نفسة الآن هو ما هى الشروط التى يجب ان تحققها العائلة $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ لكى تكون أساس لتوبولوجى على X؟ وقبل الإجابة على هذا السؤال نسوق لك المثال التالى.

مثال (٣. ٢. ٥) :

نفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ وأن $\mathcal{B}=\{\{a,b\},\{b,c\}\}\subseteq P(X)$

ولو أفترضنا أن هناك توبولوجى $\mathcal{T}$ معرف على X . هل $\mathcal{B}$ تمثل أساس لهذا التوبولوجى؟ ليكن $\mathcal{T}$ توبولوجى معرف على X فهذا يلزم أن يكون $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ومن ثم فإن $\{a,b\},\{b,c\}\in\mathcal{T}$ إذاً $\{a,b\}\cap\{b,c\}\}=\{b\}\in\mathcal{T}$. لكن المجموعة المفتوحة $\{b\}$ لا يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من $\mathcal{B}$ وكذلك X لا يمكن التعبيرعنها كاتحاد عناصر من $\mathcal{B}$.

ملاحظة (٣. ٢. ٦) :

مثال(٣. ٢. ٥) يجعلنا نستنتج أن أختيار $\mathcal{B}$ يجب ان يتوفر فيه الشروط التالية:

$(i)\ B_1, B_2 \in\mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$

$(ii)\ X=\cup\{B : B\in\mathcal{B}\}$

النظرية التالية تعطى الشروط الضرورية والكافية لكى تكون عائلة من المجموعات الجزئيه من X تمثل أساس لتوبولوجى ما على X .

نظرية (٣. ٢. ٧) :

إذا كانـــت $\mathcal{B}$ عائلـــه من المجموعات الجزئيه غير الخاليه من X فإن $\mathcal{B}$ أساس لتوبولوجى على X إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

$(i)\ X=\cup\{B:B\in\mathcal{B}\}$

$(ii)\ \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$

أو بمعنى أخر

$$\forall B_1 , B_2 \in \mathcal{B}, \forall\, p \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}\ ,\ p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

البرهان :

أولا : نفرض أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى τ على X :

$$(i)\ \because\ X \in \tau \ \Rightarrow\ X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$$

$$(ii)\ If\ B_1 , B_2 \in \mathcal{B} \ \Rightarrow B_1, B_2 \in \tau \Rightarrow\ B_1 \cap B_2 \in \tau$$

$$\Rightarrow B_1 \cap B_2 = \cup\{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$$

ثانيا : نفرض أن $\mathcal{B}$ عائله كل المجموعات الجزئيه من X التى تحقق الشرطين (i) ، (ii) وأن τ عائله كل المجموعات الجزئيه من X التى يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر من $\mathcal{B}$ أى أن : $\tau = \{U \subseteq X : U = \cup B_i\ ,\ B_i \in \mathcal{B}\}$

سوف نبرهن أن τ تشكل توبولوجى على X وبالتالى $\mathcal{B}$ أساس لهذا التوبولوجى.

(01) من التعريف والخاصية (i) نجد أن $X \in \tau\ ,\ \phi = \cup\phi,\ \phi \in \mathcal{B}$

أى أن ϕ هى اتحاد المجموعات الخالية من $\mathcal{B}$ وعليه يكون : $X , \phi \in \tau$

(02) إذا كان $U_1 , U_2 \in \tau$ فإن $U_1 = \cup\{B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$ ، $U_2 = \cup\{B_j : B_j \in \mathcal{B}\}$ ومن ذلك نجد أن :

$$U_1 \cap U_2 = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \cup(B_i \cap B_j)$$

ومن الخاصية (ii) $B_i \cap B_j$ عبارة عن أتحاد عناصر من $\mathcal{B}$. وعليه يكون $U_1 \cap U_2 = \cup\{B_k : B_k \in \mathcal{B}\}$ أى أن $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(03) نفرض أن $U_i \in \tau$ إذاً $U_i = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}\ ,\ \forall i$ وعليه يكون $\cup U_i = \cup[\cup\{B_k : B_k \in \mathcal{B}\}]$ ومنها نحصل على $\cup U_i \in \tau$.

ملاحظة : التوبولوجى τ المعرف في النظرية السابقة يسمى التوبولوجى المولد بواسطة الأساس $\mathcal{B}$. وهو التوبولوجى الوحيد على X الذى له الأساس $\mathcal{B}$.

وبالتالى من هذه النظرية نستنتج أن :

إذا كانــت X مجموعة غير خالية، $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ عائلة من المجموعات الجزئية من X وتحقق الشروط (i) ، (ii) فإن العائلة τ المؤلفة من كل المجموعات الجزئية من X الــتى تساوى أتحاد عناصر من $\mathcal{B}$ تُعرف توبولوجى وحيد على X تكون $\mathcal{B}$ أساس له. ومن أبسط الأمثله على ذلك عائلة الفترات المفتوحة في R تحقق الشروط (i) ، (ii) وبالــتالى يوجــد عــلى R توبولوجى وحيد أساسه هذه العائله وكل مجموعة مفتوحة فيه هى أتحاد لفترات مفتوحة وبالتالى نحصل على الفضاء العادى.

ســـوف نتعرض إلى نوعين من التوبولوجى على خط الأعداد الحقيقية يسمى الأول توبولوجـــى النهاية العليا (**upper limit topology**) والآخر يسمى توبولوجى النهاية السفلى (**lower limit topology**). وهذا كما يلى:

<u>مثال (٣. ٢. ٨) :</u> نفرض أن

$$(i)\ \ \mathcal{B}_1=\{(a,b]:a,b\in R,a<b\}$$

$$(ii)\ \ \mathcal{B}_2=\{[a,b):a,b\in R,a<b\}$$

نثبت الآن أن كلا من $\mathcal{B}_1$ ، $\mathcal{B}_2$ أساسين لتوبولوجين ما على R.

(i) (a) $R=\cup\{B:B\in\mathcal{B}_1\}$ لأن لأى عـــدد حقـــيقى $x\in R$ يوجد له مجموعة نصف مفتوحة $(a,b]$ بحيث أن : $x\in(a,b]\subseteq R$.

(b) إذا كانت $(a,b],(c,d]\in\mathcal{B}_1$ فإن

$$(a,b]\cap(c,d]=\begin{cases}\phi & ; if\ a<b<c<d\\ (c,b] & ; if\ a<c<b<d\\ (a,d] & ; if\ c<a<d<b\\ (a,b] & ; if\ c<a<b<d\end{cases}$$

أى أن تقاطع عنصرين من $\mathcal{B}_1$ هو عنصر من $\mathcal{B}_1$.

إذاً $\mathcal{B}_1$ أساس لتوبولوجي τ على R. وطبقا لنظرية(٣. ٢. ٧) فإن التوبولوجي τ يحتوى على كل العناصر التى هى عبارة عن أتحاد عناصر من $\mathcal{B}_1$. إذاً τ توبولوجى على R يسمى توبولوجي النهاية العليا. ويجب أن نلاحظ أن هذا التوبولوجي ليس هو التوبولوجي العادى $\mathcal{U}$ على R بل $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ لأن أى فترة مفتوحة (a,b) يمكن التعبير عنها كأتحاد عناصر من $\mathcal{B}_1$: $(a,b)=\cup\{(a,b-\frac{1}{n}] : n\in N\}$

والفترات المفتوحة أساس للتوبولوجي $\mathcal{U}$ وبذلك يكون التوبولوجي العادى $\mathcal{U}$ أصغر من توبولوجى النهاية العليا على R.

بالمثل يمكن أثبات أن $\mathcal{B}_2$ هو أساس لتوبولوجى τ على R ويسمى τ توبولوجى النهاية الدنيا.

ملاحظة : يجب أن نلاحظ هنا بأنه على مجموعة الأعداد الحقيقية R يمكن تعريف عديد من التوبولوجيات ولكن عندما نقول التوبولوجى العادى (الحقيقى) نقصد بذلك التوبولوجى $\mathcal{U}$ المعرف في الباب الثاني والذى فيه الفترات المفتوحة هى مجموعات جزئية من المجموعات المفتوحة.

تعريف (٣. ٢. ٩) : (الأساس الجزئى Subbase)

نفرض أن $(X,\mathcal{T})$ فضاء توبولوجى. العائله $S \subseteq \mathcal{T}$ تسمى أساس جزئى للتوبولوجى $\mathcal{T}$ على X إذا وفقط إذا كانت التقاطعات المنتهيه من عناصر S هي أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$.

مثال (٣. ٢. ١٠) :

نفرض $X=\{a,b,c,d\}$ ، نعرف التوبولوجى $\mathcal{T}$ على X كما يلى :

$$\mathcal{T}=\{X,\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,c,d\}\}$$

وبفرض أن $S=\{\{a,c\},\{a,d\}\}$ بالتالى فإن التقاطعات المنتهيه من عناصر S هى $\mathcal{B}=\{\{a\},\{a,c\},\{a,d\},X\}$.

(لاحظ أن $X \in \mathcal{B}$ لانها التقاطعات الخاليه من عناصر S)

وحيث أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$ فإن S أساس جزئى للتوبولوجى $\mathcal{T}$.

نظرية (٣. ٢. ١١) : بفرض أن $(R,\mathcal{U})$ الفضاء العادى فإن :

$$S=\{(a,\infty),(-\infty,b): a,b\in R, a<b\}$$

أساس جزئى للتوبولوجى $\mathcal{U}$ لأن : $(a,\infty)\cap(-\infty,b)=(a,b)$

وحيث أن عائلة الفترات المفتوحه تكون أساس للتوبولوجى على R فإن S أساس جزئى.

ملاحظة : أى أساس للفضاء التوبولوجى يكون أساس جزئى ولكن العكس غير صحيح وهذا يتضح من مثال (٣. ٢. ١١).

مثال (٣. ٢. ١٢) :

في الفضاء المنفصل (X,D)، العائله $S=\{\{a,b\}:a,b\in X\}$. أساس جزئى للتوبولوجى D. ولتوضيح ذلك بفرض أن $X=\{a,b,c\}$ ، D تأخذ الصورة :

$$D=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

فإن العائله $S=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ أساس جزئى وذلك لأن التقاطعات المنتهيه لعناصر S هى $\{a\},\{b\},\{c\}$ التى تشكل أساس للتوبولوجى D.

نظرية (٣. ٢. ١٣) :

العائله $S\subseteq P(X)$ تكون أساس جزئى لتوبولوجى وحيد على X.

البرهان :

بفرض أن العائله $\mathcal{B}$ تتكون عناصرها من التقاطعات المنتهيه من عناصر S ومن ثم فإن المطلوب أثبات أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$.

(i) حيث أن X هى التقاطعات الخاليه من عناصر S فإن

$X=\cup\{B:B\in\mathcal{B}\}$ (ليس من الضرورى أن يكون X أحد عناصر S)

(ii) نفرض أن $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ ومن ثم فإن كلاً من U_1, U_2 عبارة عن تقاطع عدد منته من عناصر S وبالتالى فإن $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.

والآن بفرض أن $x \in U_1 \cap U_2$ فإنه يوجد $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ بحيث أن $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ وعليه فإن $\mathcal{B}$ تحقق الشرط (ii).

وبفرض أن S أساساً جزئياً لكل من التوبولوجيين $\mathcal{T}, \mathcal{T}^*$ سوف نثبت ان $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ أى أن التوبولوجى المولد باساس جزئى يكون وحيد.

لذلك نفرض أن $S = \{s_i : i \in I\}$ أساس جزئى لـــ $\mathcal{T}$ ، $\mathcal{T}^*$. نفرض أن $G \in \mathcal{T}$. إذاً $G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{n_i}^{m} S_{n_i})$ ، وحيث أن S أساس جزئى لـــ $\mathcal{T}^*$ فإن $S \subseteq \mathcal{T}^*$ وعليه فإن $s_{n_i} \in \mathcal{T}^*$ ومنها $\bigcap_{n_i=1}^{m} s_{n_i} \in \mathcal{T}^*$. إذاً $G = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{n_i}^{m} S_{n_i}) \in \mathcal{T}^*$. وعليه نحصل على $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$. وبنفس الطريق يمكن أثبات أن $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$. إذاً $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

من هذه النظرية نستطيع القول بأنه إذا كانت $S \subseteq P(X)$ حيث $X = \cup \{s_i : s_i \in S\}$ فإن S تكون أساس جزئى لتوبولوجى وحيد على X.
كذلك $S \cup \{X\}$ أساس جزئى لتوبولوجى وحيد فيه عناصر S مجموعات مفتوحة.

<u>مثال (٣. ٢. ١٤) :</u>

نفرض $X = \{a, b, c, d\}$ ، ونفرض أن $S = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{d\}\}$ مجموعة جزئيه أختيارية من X. إذاً عائله كل التقاطعات لعناصر S هى :

$$\mathcal{B} = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{d\}, \{b\}, \phi, X\}$$

وعليه فإن أتحادات عناصر $\mathcal{B}$ تعطى التوبولوجى:

$$\mathcal{T}=\{X,\phi,\{d\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{b,d\},\{a,b,c\}\}$$

مثال (٣. ٢. ١٥) :

إذا كانت $X=\{a,b,c,d\}$ ، $\mathcal{S}=\{\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$

هل $\mathcal{S}$ تشكل أساس جزئى للتوبولوجى :

$\mathcal{T}=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ على X .

الحل :

$$\{a\}\cap\{a\}=\{a\}\ ,\{c\}\cap\{c\}=\{c\}$$
$$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\}\ ,\{a\}\cap\{c\}=\phi$$
$$\{a,b\}\cap\{a\}=\{a\}$$

إذاً $\mathcal{B}=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,b\}\}$

واضح ان $\mathcal{B}$ تشكل أساس للتوبولوجى $\mathcal{T}$. إذاً $\mathcal{S}$ أساس جزئى للتوبولوجى $\mathcal{T}$.

نظرية (٣. ٢. ١٦) :

إذا كانت $\mathcal{S}\subseteq P(X)$ تجمع من المجموعات الجزئيه الغيرخالية من X فإن التوبولوجى $\mathcal{T}_S$ المولد بالأساس الجزئى $\mathcal{S}$ هو أصغر توبولوجى يحتوى على $\mathcal{S}$.

البرهان :

نفرض أن $\mathcal{T}_i$ تجمع التوبولوجيات التى يحتوى كل منها على$\mathcal{S}$ ، $\mathcal{T}^*=\underset{i}{\cap}\mathcal{T}_i$.

المطلوب أثبات أن $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}_S$. واضح أن $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{T}$. نفرض أن $G\in\mathcal{T}_S$. إذاً $G=\underset{i\in I}{\cup}(\overset{m}{\underset{n_i}{\cap}}s_{n_i})$ ، وحيث أن $\mathcal{S}$ أساس جزئى لـــ $\mathcal{T}_S$ ، $s_{n_i}\in\mathcal{S}$. وحيث أن $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}^*$ فإن $s_{n_i}\in\mathcal{T}^*$. ومن ثم فإن $(\overset{m}{\underset{n_i}{\cap}}S_{n_i})\in\mathcal{T}^*$. وعليه تكون

$G=\underset{i\in I}{\cup}(\overset{m}{\underset{n_i}{\cap}} S_{n_i})\in \tau^*$ ومـــنها نحصل على $\tau_S\subseteq\tau^*$. إذاً $\tau_S=\underset{i}{\cap}\tau_i$.

أى أن الــتوبولوجى τ_S على X المولد بواسطة S هو تقاطع كل التوبولوجيات على X التى تحتوى S . ومن ثم فإن τ_S هو أصغر توبولوجى يحتوى علىS.

<u>مثال (٣. ٢. ١٧) :</u>

إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\mathcal{S}=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,e\},\{e\}\}$

أوجد أصغر توبولوجى على X يحتوى $\mathcal{S}$.

<u>الحل :</u>

واضح أن $\mathcal{B}=\{X,\phi,\{a,b\},\{b,c\},\{c,e\},\{e\},\{b\},\{c\}\}$

أساس لأصغر توبولوجى على τ_S . وبناء على النظرية السابقة حيث

$$\tau=\{X,\phi,\{a,b\},\{b,c\},\{c,e\},\{e\},\{b\},\{c\},\{a,b,c\},$$
$$\{a,b,c,e\},\{a,b,e\},\{b,c,e\},\{b,e\}\}$$

المثال التالى يوضح أنه كيف يمكن تكوين توبولوجى يحتوى ضمن عناصرة مجموعات معلومة (أى التوبولوجى المولد بواسطة عائله من المجموعات) .

<u>مثال (٣. ٢. ١٨) :</u>

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، كون التوبولوجى τ على X الذى يحتوى ضمن عناصرة المجموعات التالية : $\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{c,d\}$

<u>الحل :</u>

<u>أولا :</u> أى توبولوجى على X لابد وأن يحتوى على X,ϕ إذاً $X,\phi\in\tau$. وهذا يحقق الشرط (01).

<u>ثانيا :</u> حيث أن $\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{c,d\}\in\tau$

فإنه لكى يتحقق الشرط (02) من تعريف التوبولوجى يلزم لذلك أن :

$$\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}\in\tau$$

$$\{b,c,d\}\cap\{c,d\}=\{c,d\}\in\tau$$
$$\{a,b,c\}\cap\{c,d\}=\{c\}\in\tau$$

وبذلك نجد أن

$$\{X,\phi,\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{c,d\},\{b,c\},\{c\}\}\subseteq\tau$$

ولكى يتحقق الشرط (03) من تعريف التوبولوجى يلزم لذلك أن :

$$\{a,b,c\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$$

وأيضا إتحاد بعض المجموعات محققة تلقائيا ولهذا لم نركز عليها مثل :

$\{c\}\cup\{c,d\}=\{c,d\}$ وكلها موجودة .

وبالتالى فإن التوبولوجى المطلوب هو :

$$\tau=\{X,\phi,\{c\},\{c,d\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$$

مثال (٣. ٢. ١٩) :

بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$، كون التوبولوجى τ على X ، الذى له أقل رتبه ممكنه المولد بواسطة العائلة : $\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{b,d\},\{a,c,d\}\}$

أى عناصر $\mathcal{A}$ ضمن عناصر τ .

الحل :

أولا : أى توبولوجى على X لابد وأن يحتوى على X , ϕ إذاً $X,\phi\in\tau$.

ثانيا : التقاطعات المحدودة لعناصر A هى:

$$\{a,b\}\cap\{b,d\}=\{b\}\in\tau$$
$$\{a,b\}\cap\{a,c,d\}=\{a\}\in\tau$$
$$\{b,d\}\cap\{a,c,d\}=\{d\}\in\tau$$

إذاً $\mathcal{B}=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{d\},\{a,b\},\{b,d\},\{a,c,d\}\}\subseteq\tau$

ثالثا : أتحادات عناصر $\mathcal{B}$ هى :

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{d\},\{a,b\},\{a,d\},$$
$$\{b,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d\}\}$$

مثال (٣. ٢. ٢٠) :

عـين الـتوبولوجى τ على R المولد بواسطة كل الفترات المغلقة $[a,a+1]$ حيث $a\in R$ التى طولها يساوى الواحد.

الحل :

بفرض أن $p\in R$ فإن $[p-1,p]\cap[p,p+1]=\{p\}$

وحيث أن $\mathcal{B}=\{\{p\}:p\in R\}$ أساس للتوبولوجى τ فإن τ يتطابق مع التوبولوجى المنفصل D على R .

تعريف (٣. ٢. ٢١) : (الأساس المحلى Local base)

نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجى . عائلة كل المجموعات المفتوحة $\mathcal{B}_p$ والتى تحتوى p تسمى أساس محلى عند النقطة p إذا وفقط إذا كان :

$$\forall U\in\tau,\, p\in U\Rightarrow\exists \mathrm{B}\in\mathcal{B}_p,\, p\in\mathrm{B}\subseteq U$$

أو إذا وفقط إذا كانت $\mathcal{B}_p$ هى أصغر مجموعة مفتوحة تحتوى p .

مثال (٣. ٢. ٢٢) :

نفرض $X=\{a,b,c,d\}$ ، نعرف التوبولوجى τ على X كما يلى :

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

فإن
$$\mathcal{B}_a=\{\{a\},\{a,b\},\{a,bc\}\}\},\ \ \mathcal{B}_b=\{\{a,b\}\},$$
$$\mathcal{B}_c=\{\{a,b,c\}\}$$

نظرية (٣. ٢. ٢٣) :

إذا كانت $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى τ على X وأن $p\in X$ فإن كل عناصر الأساس التى تحتوى p تكون أساس محلى عند النقطة p أى أن : $\mathcal{B}_p=\{B:p\in B\}$

أساس محلى عند p .

البرهان :

بفرض أن U مجموعة مفتوحة ، $p \in U$ حيث أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجى τ فإنه يوجد $B \in \mathcal{B}$ بحيث أن $p \in B \subseteq U$. إذاً $B \in \mathcal{B}_p$ بحيث أن $p \in B \subseteq U$ وعليه يكون $\mathcal{B}_p$ أساس محلى عند p .

نظرية (٣. ٢. ٢٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى ، $p \in X$ فإن النقطة p تكون نقطة نهاية للمجموعة $A \subseteq X$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر الأساس المحلى عند p يحتوى على الأقل عنصر من A يختلف عن p ، أى أن

$$p \in A' \Leftrightarrow (B - \{p\}) \cap A \neq \phi \ , \forall B \in \mathcal{B}_p .$$

البرهان : $(\Rightarrow)$

نفرض أن $p \in A'$ إذاً $(U - \{p\}) \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau, p \in U$

وبما أن $\mathcal{B}_p \subseteq \tau$ إذاً $(B - \{p\}) \cap A \neq \phi \ , \forall B \in \mathcal{B}_p$.

$(\Leftarrow)$ نفرض أن $(B - \{p\}) \cap A \neq \phi$ لكل $B \in \mathcal{B}_p$

وأن U مجموعة مفتوحة تحتوى p وحيث أن $\mathcal{B}_p$ أساس محلى عند p فإنه توجد مجموعة $B \in \mathcal{B}_p$ بحيث يكون $p \in B \subseteq U$. إذاً

$(U - \{p\}) \cap A \neq \phi \ , \forall U \in \tau, p \in U$ ، وعليه تكون $p \in A'$.

مثال (٣. ٢. ٢٥) :

نعتبر توبولوجى النهايه السفلى τ على R حيث $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in R\}$ أساس لهذا التوبولوجى وبفرض أن $A = (0,1)$ فإن المجموعة $U = [1,2)$ من عناصر الأساس تحتوى على العنصر واحد وتحقق أن $U \cap A = \phi$ وعليه فإن

$1 \notin A'$ ولكن $0 \in A'$ لأن أى عنصر من عناصر الأساس $B=[a,b)$ حيث $0 \in B$ فإن $a \leq 0 < b$ وعليه فإن $(B-\{0\}) \cap A \neq \phi$.

تعريف (٣. ٢. ٢٦) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى ، يقال أن :

(١) X يتمتع بقابلية العد الأولى (**first countable**) إذا وفقط إذا كان للفضاء X أساس محلى قابل للعد لكل نقطه $p \in X$.

(٢) X يتمتع بقابلية العد الثانية (**second countable**) إذا وفقط إذا كانت X لها أساس قابل للعد.

(٣) X فضاء منفصلاً (**separable space**) إذا وفقط إذا كانت X لها مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد (**countable dense**) .

مثال (٢. ٢. ٢٧) :

الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$ يتمتع بقابلية العد الأولى وذلك لأنه لأى $p \in R$ فإن العائله : $\mathcal{B}_p=\{(p-\frac{1}{n}, p+\frac{1}{n}): n \in N\}$

أساس محلى قابل للعد عند النقطه p.

مثال (٢. ٢. ٢٨) :

الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$ يتمتع بقابلية العد الثانية وذلك لأن عائلة المجموعات المفتوحة (a,b) حيث $a, b \in R$ تشكل أساس قابل للعد.

مثال (٣. ٢. ٢٩) :

لتكن X مجموعة غير قابلة للعد ، (X,D) الفضاء المنفصل فإن X يتمتع بقابلية العد الأولى ولا يتمتع بقابلية العد الثانية.

مثال (٣. ٢. ٣٠) :

الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$ هو فضاء منفصلاً وذلك لاحتوائه على

المجموعة الكثيفة Q القابله للعد.

نظرية (٣. ٢. ٣١) :

إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الثانية فإنه يتمتع بقابليه العد الأولى ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح .

البرهان :

أولا : نفرض أن X فضاء يتمتع بقابليه العد الثانيه ، $p \in X$. إذاً $\mathcal{B}_p = \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$ أساس محلى عند p حيث $\mathcal{B}$ أساس. وحيث أن $\mathcal{B}$ قابل للعد فإن $\mathcal{B}_p$ قابل للعد أيضا. إذاً X لها أساس محلى قابل للعد ومن ثم فإن X فضاء يتمتع بقابلية العد الأولى.

ثانيا : نبين أنه إذا كان الفضاء X يتمتع بقابليه العد الأولى فإن X لا يتمتع بقابليه العد االثانيه بالمثال التالى:

بفرض أن X مجموعة غير قابله للعد ، (X, D) هو الفضاء المنفصل فإن :

$\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ هو أصغر أساس للتوبولوجى D وحيث أن $\mathcal{B}$ غير قابله للعد فإن X لا يتمتع بقابليه العد الثانية في حين أن X يتمتع بقابليه العد الأولى لأنه:

$\forall\, p \in X \Rightarrow \mathcal{B}_p = \{\{p\}\}$ أساس محلى قابل للعد عند p .

نظرية (٣. ٢. ٣٢) :

إذا كان الفضاء X يتمتع بقابلية العد الثانية فإن X منفصلاً **(Separable)** .

البرهان :

أولا : بفرض أن X يتمتع بقابلية العد الثانية فان X لها أساس $\mathcal{B}$ قابل للعد.

نفرض المجموعة $A = \{p \in B_i : B_i \in \mathcal{B}\}$

وحيث أن $\mathcal{B}$ قابل للعد فإن A قابله للعد. والمطلوب أثبات أن A كثيفة في X أى أن $\overline{A} = X$ ؟

نفرض $p \in X ,U \in \tau , p \in U$ إذاً يوجد $B_i \in \mathcal{B}$ بحيث أن $p \in B_i \subseteq U$ وعليه فإن $A \cap B_i \subseteq A \cap U$ ومنها نحصل على $U \cap A \neq \phi \ ,\forall U \in \tau , p \in U$. إذاً $p \in \overline{A}$ وعليه يكون $X \subseteq \overline{A}$.
ولكن $\overline{A} \subseteq X$ ومن ثم فإن $\overline{A} = X$. إذاً A كثيفة وحيث أن A قابله للعد فإن A كثيفة و قابله للعد وعليه فإن X فضاء منفصلاً.

ثانيا : في المثال التالى سوف نوضح أن الفضاء X منفصلاً ولكن لا يتمتع بقابلية العد الثانيه :

بفرض أن X غير قابله للعد، (X, P_p) فضاء النقطة المختارة حيث

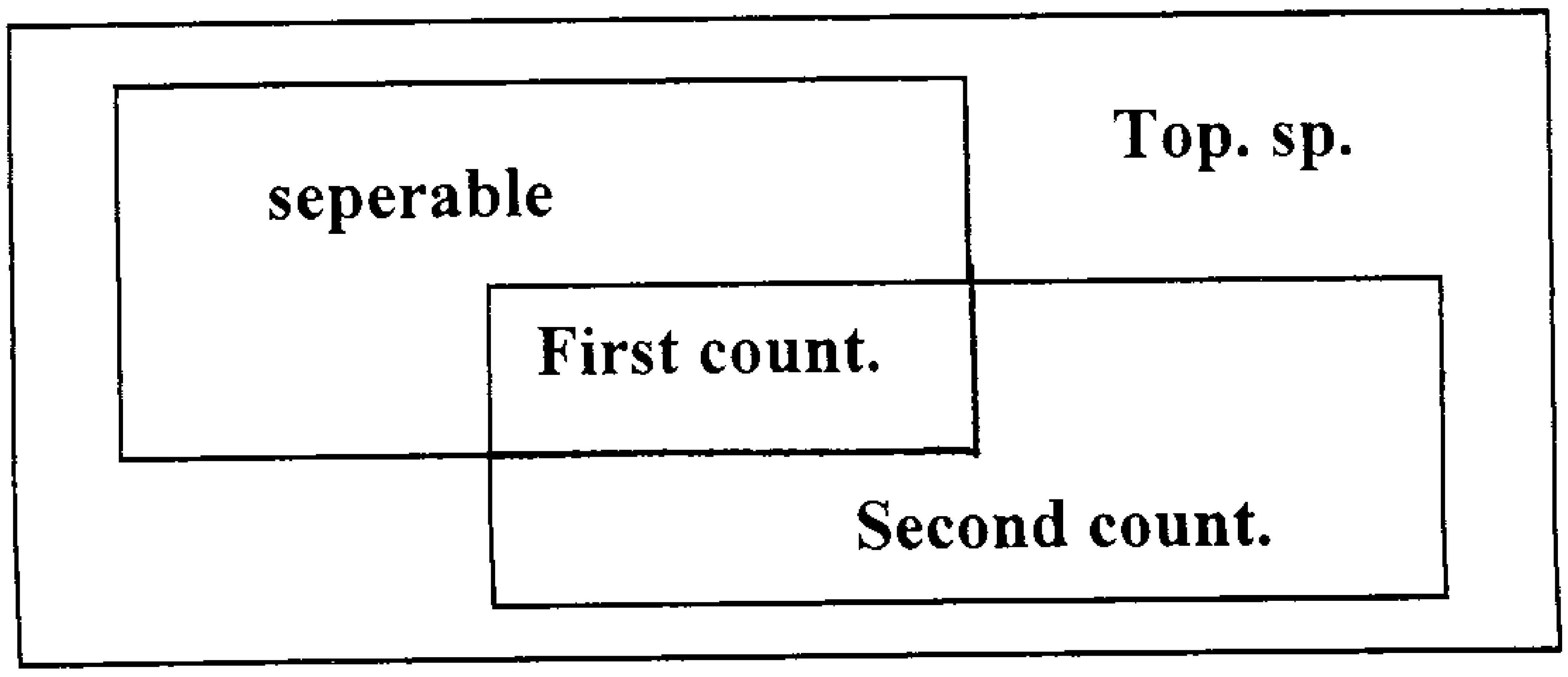
$$\mathrm{P}_p = \{\phi , U \subseteq X : p \in U\}$$

إذاً

$$\mathcal{B} = \{\{p\}, \{p,q\} : q \in X\}$$

أساس للتوبولوجى P_p وهو أصغر أساس للتوبولوجى P_p. إذاً $\mathcal{B}$ أساس غير قابل للعد لأن X غير قابله للعد. إذاً X لا يتمتع بقابلية العد الثانية في حين أن : $A = \{p\}$ تعطى $\overline{A} = X$. وعليه فإن X لها مجموعة كثيفة قابلة للعد أى أن X فضاء منفصلاً.

من الآمثلة السابقة يمكن رسم الشكل التوضيحي الآتي :



بند ٣ : التوبولوجى النسبى والفضاءات الجزئية :

(The Relative Topology and Subspaces)

إذا كـــان (X,τ) فضاء توبولوجي ، A مجموعة جزئية فعلية من X . نعرف عائلة كل المجموعات الجزئية من A الناتجة من تقاطع كل المجموعات المفتوحة في X مع المجموعة A ويرمز لها بالرمز τ_A أى أن $\tau_A=\{U\cap A : U\in\tau\}$

وهذا يعنى أن $V\in\tau_A \Leftrightarrow \exists\, U\in\tau\ ,V=U\cap A$

النظرية التالية تبرهن أن τ_A تمثل توبولوجى على A .

نظرية (٣. ٣. ١) :

نفـــرض الفضـــاء التوبولوجى (X,τ) ، A مجموعة جزئية غير خالية من X. العائلة $\tau_A=\{U\cap A : U\in\tau\}$ تمثل توبولوجى على المجموعة A .

البرهان :

(01) بمـــا أن $X,\phi\in\tau$ إذاً $X\cap A=A\in\tau_A$ ، $\phi\cap A=\phi\in\tau_A$ وعليه فإن $X,\phi\in\tau_A$.

(02) نفـــــرض $V_1,V_2\in\tau_A$ إذاً يوجـــــد $U_1,U_2\in\tau$ بحيـــث $V_1=U_1\cap A$ ، $V_2=U_2\cap A$ وعليه فإن

$$V_1\cap V_2=(U_1\cap A)\cap(U_2\cap A)=(U_1\cap U_2)\cap A\in\tau_A$$

لأن $U_1\cap U_2\in\tau$.

(03) نفـــــرض $\{V_i : i\in I\}\subseteq\tau_A$. إذاً يوجـــــد $U_i\in\tau$ ، $V_i=U_i\cap A$ وعليه فإن

$$\bigcup_i V_i=\bigcup_i(U_i\cap A)=(\bigcup_I U_i)\cap A\in\tau_A . \quad (\text{لأن } \bigcup_i U_i\in\tau)$$

إذاً τ تشكل توبولوجى على A .

تعريف (٣. ٣. ٢) :

إذا كانت A مجموعة جزئيه غير خالية من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فإن التوبولوجى τ_A المعرف على المجموعة A يسمى التوبولوجى النسبى **(relative topology)** ويسمى الفضاء بالفضاء الجزئى **Subspace** .

مثال (٣. ٣. ٣) :

نفرض الفضاء التوبولوجى (X,τ) حيث $X=\{a,b,c,d,e\}$ ،

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

أوجد τ_A ، τ_B ، τ_C

حيث $A=\{a,d\}$ ، $B=\{a,b,c\}$ ، $C=\{a\}$

الحل :

$$\tau_A=\{X\cap A,\phi\cap A,\{a\}\cap A,\{c,d\}\cap A,\{a,c,d\}\cap A,\{b,c,d,e\}\cap A\}$$
$$=\{A,\phi,\{a\},\{d\}\}$$
$$\tau_B=\{B,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$
$$\tau_C=\{C,\phi\}.$$

ملاحظة (٣. ٣. ٤) :

(١) في المثال السابق يلاحظ أن τ_A هو التوبولوجى المنفصل ، τ_C هو التوبولوجى الغير منفصل بالرغم من أن τ ليس توبولوجى منفصل أو غير منفصل على X . ونلاحظ أيضا أنه يمكن إيجاد $V\in\tau_A$ ولكن $V\notin\tau$. أى هناك مجموعات مفتوحة في A وليست مفتوحة في X .

(٢) إذا كانت A مجموعة مفتوحة فى الفضاء الكلى (X,τ) فإن (A,τ_A) يسمى فضاء جزئى مفتوح.

<u>مثال (٣. ٣. ٥) :</u>

أى فضـــاء جـــزئى من الفضاء المنفصل (غير المنفصل) يكون أيضا فضاء منفصل (غير المنفصل).

<u>مثال (٣. ٣. ٦) :</u>

في الفضـــاء الـــتوبولوجى العـــادى $(R,\mathcal{U})$ إذا كانـــت $A=[3,8]$ فـــإن $A\cap(1,5)=[3,5)$ أى أن $[3,5)\in\tau_A$ ومـــن ثم فإن $[3,5)$ مجموعة مفتوحة بالنسبة إلى A ولكنها ليست مفتوحة بالنسبة إلى R .

<u>مثال (٣. ٣. ٧) :</u>

إذا كانت X مجموعة غير منتهية ، $C=\{\phi,U\subseteq X:U^c\ finite\}$ ولتكن $A\neq\phi$ مجموعة جزئية منتهية من X. أوجد τ_A .

<u>الحل :</u>

لتكن p نقطة أختيارية من A فإن المجموعة $X-\{A-\{p\}\}$ مفتوحة في X وتقاطعها مع المجموعة A يساوى المجموعة $\{p\}$ أى أن

$$\{p\}=A\cap(X-\{A-\{p\}\})$$

ومـــن ثم فإن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئى A وحيث أن p أختيارية فإن الفضاء الجزئى المعرف على A هو الفضاء المنفصل.

<u>مثال (٣. ٣. ٨) :</u>

في الفضاء العادي $(R,\mathcal{U})$. صف التوبولوجى النسبي $\mathcal{U}_N$ حيث N مجموعة الأعداد الحقيقية.

<u>الحل :</u>

لكل $n\in N$ فإن $(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})$ فترة مفتوحة تحوى n ،

$$N \cap (n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) = \{n\}.$$

لذلـــك فإن كل مجموعة $\{n\}$ تحتوي على عدد طبيعي هى مجموعة مفتوحة في الفضاء الجــزئي $(N, \mathcal{U}_N)$ وبالتالى فإن كل مجموعة جزئية من N هى مجموعة مفتوحة. وعليه يكون $\mathcal{U}_N$ هو التوبولوجى المنفصل على N.

نظرية (٣. ٣. ٩) :

إذا كان (A, τ_A) فضاء جزئى من الفضاء (X, τ) فإن المجموعة الجزئية E مــن A تكــون مغلقة في الفضاء الجزئى إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلى بحيث يكون $E = A \cap F$.

البرهان :

نفــرض أن E مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئى (A, τ_A) فإن E^c مجموعة مفــتوحة في الفضاء الجزئى وبالتالى من تعريف الفضاء الجزئى توجد مجموعة مفتوحة U في الفضاء الكلى بحيث يكون : $E^c = U \cap A = A - E$.

إذاً $\quad E = A - (A \cap U) = A \cap (A \cap U)^c = A \cap U^c$

وبوضــع $U^c = F$ فهى مجموعة مغلقة في X ومن ثم فإنه توجد مجموعة مغلقة F بحيث أن $E = A \cap F$.

والعكـــس ، لنفرض أنه توجد مجموعة مغلقة F في X بحيث يكون $E = A \cap F$ ونحاول أثبات أن E مغلقة في A أى E^c مفتوحة في A.

$$E^c = A - E = A - (A \cap F)$$

$$\therefore E^c = A \cap (A \cap F)^c = A \cap (A^c \cup F^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap F^c) = A \cap F^c$$

وبالتالى فإن المجموعة E^c مفتوحة في الفضاء الجزئى A.

نتيجة (٣. ٣. ١٠) :

إذا كانت A مجموعة جزئية مفتوحة (مغلقة) وغير خالية من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فإن المجموعة B من الفضاء التوبولوجى الجزئى (A,τ_A) تكون مفتوحة (مغلقة) إذا وفقط إذا كانت B مفتوحة في الفضاء الكلى (X,τ).

نظرية (٣. ٣. ١١) :

ليكن (A,τ_A) فضاء جزئى من الفضاء الكلى (X,τ) ، N مجموعة جزئية من A فإن :

$$N\in(\mathcal{N}_x)_A \Leftrightarrow \exists\, V\in\mathcal{N}_x, N=A\cap V$$

أى تكون N جوار للنقطة x في الفضاء الجزئى إذا وفقط إذا وجد جوار V للنقطة x في الفضاء الكلى بحيث يكون $N=A\cap V$.

البرهان :

$(\Rightarrow)$

نفرض $N\in(\mathcal{N}_x)_A$. إذاً يوجد $H\in\tau_A$ ، $x\in H\subseteq N$ وعليه يوجد $G\in\tau$ بحيث $H=A\cap G$ إذاً $V=G\cup N\in\mathcal{N}_x$

$G\cup N$ جوار للنقطة x في الفضاء الكلى.

والآن

$$V\cap A=(G\cup N)\cap A=(G\cap A)\cup(N\cap A)$$
$$=H\cup N=N$$

إذاً يوجد جوار V للنقطة x في الفضاء الكلى بحيث أن $N=V\cap A$.

$(\Leftarrow)$

لتكن N مجموعة جزئية من الفضاء الجزئى (A,τ_A) ، V جوار للنقطة x في الفضاء الكلى (X,τ) بحيث أن $N=A\cap V$.

وعليه يوجد $G\in\tau$ ، $x\in G\subseteq V$ إذاً $x\in(G\cap A)\subseteq(V\cap A)\subseteq V$ ،

ومن ثم فإن $N\in(\mathcal{N}_x)_A$.

نظرية (٣. ٣. ١٢) :

إذا كـــان (A,τ_A) فضـــاء جـــزئى من الفضاء الكلى (X,τ). إذا كانت $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i\in I}$ أســـاس للفضاء الكلى فإن $\mathcal{B}^*=\{B_i\cap A\}_{i\in I}$ تشكل أساس للفضاء الجزئى.

البرهان :

بفرض أن $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i\in I}$ أساس للتوبولوجى τ . إذاً

$$\forall U\in\tau\,,\, p\in U\Rightarrow\exists B\in\mathcal{B}\,,\, p\in B_{i_o}\subseteq U$$

ومن تعريف الفضاء الجزئى ، تكون المجموعات $\{B_i\cap A\}_{i\in I}$ مفتوحة في الفضاء الجزئى وإذا كانت $p\in A$ فإن : $p\in B_{i_o}\cap A\subseteq U\cap A$

وحيث أن $U\cap A\in\tau_A$ فإن $\{B_i\cap A\}_{i\in I}$ تشكل أساس للفضاء الجزئى.

والســـؤال الـــذى يطرح نفسة الآن ما هى العلاقة بين نقاط النهاية والنقاط الداخلية وغلاقـــة المجموعـــة في كـــل مـــن الفضـــائين الكـــلى والجـــزئى. سوف نرمز بـــ $A'_Y\,,\,A^o_Y\,,\,\overline{A}_Y$ لمشتقة ، داخلية ، وغلاقة المجموعة A في الفضاء الجزئى .

نظرية (٣. ٣. ١٣) :

بفرض أن (Y,τ_Y) فضاء جزئى من الفضاء (X,τ). إذا كانت $A\subseteq Y$ فإن:

$(i)\ A'_Y=A'\cap Y$

$(ii)\ A^o=A^o_Y\cap Y^o\ ,\ A^o\cap Y\subseteq A^o_Y$

$(iii)\ \overline{A_Y}=\overline{A}\cap Y$

البرهان :

(i) نفرض $x\in A'_Y$. إذاً لكل $U\in\tau_Y$ ، $x\in U$ ، $U\cap A\neq\phi$

إذاً يوجد $W\in\tau$ ، $x\in U$ ، $U=W\cap Y$. إذاً لأى $W\in\tau$ بحيث

يكـــون $x \in W$ ســـوف نجـــد أن $W \cap Y \neq \phi$ وبذلـــك نحصـــل عـــلى $(W \cap Y) \cap A = W \cap A \neq \phi$. إذاً $x \in A'$ وعليه فإن $A'_Y \subseteq A'$

ولـــبرهان العلاقـــة العكسية ، نفرض $x \in A'_Y$. إذاً يوجد $U \in \tau$ ، $x \in U$ ، $U \cap A \neq \phi$. واضـــح أن $W = U \cap Y \in \tau_Y$ مجموعـــة مفـــتوحة في الفضاء الجزئى والتى تحتوى على x وعليه فإن

$$W \cap A = (U \cap Y) \cap A = Y \cap (U \cap A) \neq \phi$$

إذاً $x \in A'_Y$ وعليه فإن $A' \subseteq A'_Y$. إذاً $A'_Y = A' \cap Y$

(ii) نفرض $p \in A^o$. إذاً يوجد $H \in \tau$ بحيث $p \in H \subseteq A \subseteq Y$

إذاً $p \in Y \cap A \subseteq A$ ، $p \in Y^o$. وعليه فإن $p \in A^o_Y$ ، $p \in Y^o$. إذاً $p \in Y^o \cap A^o_Y$. إذاً $A^o \subseteq A^o_Y \cap Y^o$.

والأن نفـــرض أن $x \in A^o_Y \cap Y^o$. إذاً يوجـــد $H_1, H_2 \in \tau$ بحيـــث أن $x \in Y \cap H_1 \subseteq A$, $x \in H_2 \subseteq Y$. إذاً $x \in H_1 \cap H_2 \subseteq A$ وعليه فإن $x \in A^o$. إذاً $A^o_Y \cap Y^o \subseteq A^o$. وعليه نحصل على $A^o = A^o_Y \cap Y^o$.

والجـــزء الآخـــير واضح من كون أن $A^o \cap Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئى ومحتواة في المجموعة A .

(iii)

$$\overline{A_Y} = A'_Y \cup A = (A' \cap Y) \cup A \,, \quad A \subseteq Y$$

$$= (A' \cap Y) \cup (A \cap Y) = (A' \cap A) \cup Y = \overline{A} \cap Y$$

<u>مثال (٣. ٣. ١٤) :</u>

(١) بـــين أنـــه إذا كانت $A' = \phi$ في الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن τ_A هو التوبولوجى المنفصل.

الحل :

لكـــي نثبت أن τ_A هو الفضاء المنفصل يجب أن نبين أن كل مجموعة جزئية من A تكون مغلقة.

إذا كانت $B \subseteq A$ فإن $B' \subseteq A'$ وعليه يكون $B' \subseteq \phi$ (لأن $A' = \phi$)

إذاً B مغلقه في X. وحيث أن $A \cap B = B$ مغلقة في A. إذاً B مغلقه في A.

(٢) بـــين أنـــه إذا كانت $\overline{A} \cap B = \phi$ فإن A مغلقة في $A \cup B$ حيث A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجى (X, τ).

الحل :

بما أن $\overline{A}$ مغلقة في X. إذاً $\overline{A} \cap (A \cup B)$ مغلقة في $A \cup B$

ولكن $\overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup \phi = A$

إذاً A مغلقة في $A \cup B$.

(٣) بفـــرض أن A, B مجموعتين جزئيتين من X . بين أن U مجموعة مفتوحة في $A \cup B$ إذا وفقط إذا كانت $U \cap A$ مفتوحة في A ، $U \cap B$ مفتوحة في B.

الحل :

$(\Rightarrow)$

بما أن $U \in \tau_{A \cup B}$. إذاً يوجد $V \in \tau$ بحيث أن $U = V \cap (A \cup B)$

إذاً $U \cap A = V \cap (A \cup B) \cap A = V \cap A$

بما أن $U \in \tau$. إذاً $V \cap A \in \tau_A$. إذاً $U \cap A \in \tau_A$

وبطريقة مشابهه يمكن أثبات أن $U \cap B \in \tau_B$

$(\Leftarrow)$

$$\tau_{A \cup B} = \{V \cap (A \cup B) : V \in \tau\},$$
$$\tau_{(A \cup B)_A} = \{V \cap (A \cup B) \cap A : V \in \tau\},$$
$$= \{V \cap A : V \in \tau\} = \tau_A$$

بالمثل $\tau_{(A\cup B)_B}=\tau_B$. بما أن $U\cap A\in\tau_A ,U\cap B\in\tau_B$.

إذاً $U\cap A\in \tau_{(A\cup B)_A}$ ، $U\cap B\in \tau_{(A\cup B)_B}$

إذاً يوجد $W\in\tau_{A\cup B}$ بحيث أن $W\cap A=U\cap A$ ، $W\cap B=U\cap B$

إذاً $(W\cap A)\cup(W\cap B)=(U\cap A)\cup(U\cap B)$

وعليه فإن $W\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)$

وبما أن $U ,W\subseteq A\cup B$. إذاً $U=W$ ، $U\in \tau_{A\cup B}$

إذاً $U\in \tau_{A\cup B}$.

تمارين عامة على الباب الثالث

(١) إذا كانت $X=\{a,b,c,d\}$. برهن أن

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

تشكل توبولوجى على X ثم أوجد $\mathcal{N}_a$ ، $\mathcal{N}_b$.

(٢) برهن أنه إذا كانت (Y,τ_Y) فضاء جزئى من فضاء الكلى فإن $\tau_Y\subseteq\tau$ إذا وفقط إذا كان $Y\in\tau$.

(٣) إذا كانت $Z\subseteq Y\subseteq X$. برهن أن $\tau_Z\subseteq(\tau_Y)_Z$.

(٤) إذا كانت $X=\{a,b,c\}$ ،

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

بين أن $S=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$

أساس جزئى للتوبولوجى τ .

(٥) لتكن X مجموعة مرتبة كلياً وغير خالية، $\mathcal{B}=\{[a,\infty):a\in X\}$

(i) برهن أن $\mathcal{B}$ أساس لتوبولوجى على X .

(ii) برهن أن $\overline{\{x\}}=(-\infty,x]$

(٦) برهن أن قابلية الإنفصال هى خاصية توبولوجية.

(٧) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الأولى هى خاصية وراثية.

(٨) برهن أن خاصية تحقيق الفضاء لمسلمة العد الثانية هى خاصية توبولوجية.

(٩) بين أن عائلة الفترات

$$S=\{(a,1],(0,b):0<a,b<1\}$$

هي أساس جزئى للتوبولوجى العادى المعرف على الفترة $I=[0,1]$.

(١٠) إذا كان (X,D) هو الفضاء المنفصل حيث $X=\{a,b,c,d,e\}$.

أوجد الأساس الجزئى S بحيث لا تحتوى S على المجموعات وحيدة العنصر.

(١١) برهن أن النقطة p هي نقطة تراكم للمجموعة الجزئية A من الفضاء $(X,\mathcal{T})$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر من الأساس المحلي $\mathcal{B}_p$ عند p يحتوى على نقاط من A تختلف عن p.

(١٢) بين أن كل نقطة p في الفضاء المنفصل لها أساس محلي منتهي.

(١٣) بين أن التوبولوجي $\mathcal{T}$ المعرف على المجموعة X يكون منتهي إذا وفقط إذا كانت $\mathcal{T}$ لها أساس منتهي.

(١٤) بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$

أوجد التوبولوجي المولد بالعائلة $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$.

(١٥) بفرض أن X هو فضاء المكملات المنتهية. بين أن كل جوار للنقطة $p\in X$ هو مجموعة مفتوحة.

(١٦) بين أنه إذا كانت $\mathcal{N}_p$ منتهية فإن $\cap\{N : N\in\mathcal{N}_p \in \mathcal{N}_p\}$

(١٧) بفرض أن X مجموعة غير خالية، لكل $p\in X$ نفرض أن $\mathcal{A}_p$ هى عائلة المجموعات الجزئية من X التى تحتوى p.

(i) بين أن $\mathcal{A}_p$ تحقق مسلمات الجوار. (ii) عين التوبولوجى المولد بالعائلة $\mathcal{A}_p$.

(١٨) بفرض الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$. أى من المجموعات التالية :

$$(0,\frac{1}{2}]\ ,\ (\frac{1}{2},\frac{2}{3})\ ,\ (\frac{1}{2},1]$$

تكون مجموعات مفتوحة في الفضاء الجزئي $([0,1],\mathcal{U})$.

(١٩) لتكن N هى مجموعة الأعداد الطبيعية ، لأى A مجموعة جزئيه يكون لدينا المجموعة A^* المعرفة بالصورة :

$$A^*=\begin{cases}\{n\in N : n\geq \min\{x : x\in A\}\} & , \ if\ A\neq\phi\\ \phi & , \ if\ A=\phi\end{cases}$$

أثبت أنه يوجد توبولوجي وحيد على N يحقق أن $A^*=\overline{A}$.

(٢٠) لتكن X مجموعة غيرخالية، $\delta \subseteq P(X)\times P(X)$ علاقة ثنائية على X تحقق الشروط التالية :

$$(P_1)\ \ (A,B)\in\delta \Rightarrow A\neq\phi\ \&\ B\neq\phi$$
$$(P_2)\ \ (A,B)\in\delta \Rightarrow (B,A)\in\delta$$
$$(P_3)\ \ If\ \ A\cap B\neq\phi \Rightarrow (A,B)\in\delta$$
$$(P_4)\ \ (A\cup B,C)\in\delta \Rightarrow (A,C)\in\delta\ \&\ (B,C)\in\delta$$
$$(P_5)\ If\ \ (A,B)\notin\delta \Rightarrow \exists D\subseteq X:\ (A,D)\notin\delta\ \&\ (D^c,B)\notin\delta$$

فإن δ تسمى علاقة قرب (poximity relation) على X، الزوج (X,δ) يسمى فضاء القرب (proximity space).

(أ) بين أن الدالة $A\to\overline{A}$ حيث $\overline{A}=\cap\{B^c:(B,A)\notin\delta\}$ تحقق شروط مؤثر الأغلاق.

(ب) بين أن العائلة : $\tau_\delta=\{A\subseteq X\ :\ A^c=\overline{A^c}\}$ تشكل توبولوجى على X.

(ج) بين أن العائلة : $A^o=\{B: B\subseteq A\ ,\ A\in\tau_\delta\}$ تحقق شروط المؤثر الداخلي.

(د) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي. بين أن العلاقة δ المعرفة بالصورة :

$$(A,B)\in\delta \Leftrightarrow \overline{A}\cap\overline{B}\neq\phi$$

هى علاقة قرب على X.

(هـ) الدالة $f:(X,\delta)\to(Y,\eta)$ تكون متصلة بالنسبة إلى δ,η إذا وفقط إذا كانت :

$$(A,B)\in\delta\Rightarrow(f(A),f(B))\in\eta\ ;\forall\, A,B\subseteq X$$
$$or\ \ (f^{-1}(C),f^{-1}(D)\in\delta\Rightarrow(C,D)\in\eta\ \ ;\forall\, C,D\subseteq Y$$

بـــين أن f تكـــون متصـــلة بالنسبة إلى τ_δ , τ_η إذا كانت f متصلة بالنسبة إلى δ , η.

(٢١) لـــتكن $(X, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً . يسمى التوبولوجى τ المولد بالأساس الجزئى :

$$S = \{(\leftarrow, a), (b, \rightarrow) : a, b \in X \ , a \leq b\}$$

حيث $(\leftarrow, a) = \{x \in X : x < a\}, (b, \rightarrow) = \{x \in X : x > b\}$

بالـــتوبولوجى المرتـــب **(order topology)** عـــلى X والزوج (X, τ) بالفضاء التوبولوجى المرتب.

(i) أوجد أساس للتوبولوجى المرتب.

(ii) إذا كانت $X = R$. بين أن التوبولوجى المرتب τ على X يطابق التوبولوجى العادى.

(iii) إذا كانـــت $X = Z$. بـــين أن الـــتوبولوجى المرتـــب τ على X يطابق التوبولوجى المنفصل.

(iv) إذا كانـــت أى مجموعـــة جزئية من X محدودة من أعلى بحيث أن أصغر حد علـــوى **supremum** لهـــا ينتمى إلى X تسمى شبكة **(lattice)**. بين أن أى مجموعة جزئية U من الشبكة X تكون مفتوحة في الفضاء التوبولوجى المرتب إذا وفقط إذا كانت U هى أتحاد فترات مفتوحة غير متقاطعة مثنى مثنى.

(٢٢) لـــتكن X مجموعـــة غير خالية العائلة $\mathcal{U} \subseteq P(X \times X)$ تسمى منتظمة **(uniformity)** على X إذا توفرت الشروط التاليه :

$(U1)$ $If \ \Delta \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{U}$

$(U2)$ $U \subseteq V \ , U \in \mathcal{U} \ \Rightarrow V \in \mathcal{U}$

$(U3)$ $U , V \in \mathcal{U} \ \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$

$(U4)$ $U \in \mathcal{U} \ \Rightarrow \exists \ V \in \mathcal{U} \ : VoV \subseteq \mathcal{U}$

حيث $VoU=\{(x,y):\exists z\in X\ ,(x,z)\in U\ ,(z,y)\in V\}$

$$(U5)\ U\in\mathcal{U}\ \Rightarrow U^{-1}\in\mathcal{U}$$

حيث $(x,y)\in U^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in U$

في هذه الحالة الزوج $(X,\mathcal{U})$ يسمى الفضاء المنتظم **(uniform space)** .

(i) أثبت أن العائلة :

$$\tau_{\mathcal{U}}=\{A\subseteq X\ :\ \exists U\in\mathcal{U}\ ,\forall x\in X\ ,U[x]\subseteq U\}$$

حيث $U[x]=\{y\in X\ :(y,x)\in U\}$

تشكل توبولوجي على X .

(ii) أثبت أن

$$x\in\overline{A}\Leftrightarrow\forall(U\in\mathcal{U}\rightarrow x\in U[A])$$

حيث $U[A]=\{x\in X\ :\exists y\in A,\ (y,x)\in U\}$

(٢٣) برهن أنه إذا كان (X,τ) فضاء منفصلاً ويتمتع بقابلية العد الأولى فإن أى مجموعة جزئية وكثيفة منه تشكل فضاء جزئى منفصل.

(٢٤) لتكن $X=[0,1]$ ، τ هو التوبولوجي على X الذى له أساسه الجزئى :

$$\mathcal{S}=\{[a,b[\ :\ a<b\leq 1\ ,0\leq a<1\}$$

أثبت أن :

(i) X يتمتع بقابلية العد الأولى .

(ii) X فضاء منفصل .

(iii) X لا يتمتع بقابلية العد الثانية .

(٢٥) إذا كان (X,P) هو فضاء النقطة المختارة ، $A\subseteq X$ بين أن (A,τ_A) هو فضاء النقطة المختارة إذا كانت $p\in A$. صف التوبولوجي النسبى إذا كانت $p\notin A$.

الباب الرابع

الدوال المتصلة و التكافؤ التوبولوجى

Continuous Functions and Topological Equivalent

الباب الرابع

الدوال المتصلة و التكافؤ التوبولوجى

Continuous Functions and Topological Equivalent

مقدمة : أن أتصال الدوال يلعب دوراً مهماً في التحليل الرياضي والتوبولوجى وفي العديد من فروع الرياضيات. أن مفهوم الدوال المتصلة (في الفضاءات الأقليدية) يعتمد على مفهوم الدوال المترية. في هذا الباب سنحاول أعطاء التعريف الأساسى لمفهوم الدالة المتصلة من فضاء توبولوجى إلى فضاء توبولوجى آخر مع دراسة العديد من التكافؤات لتعريف الاتصال. أيضا تعرضنا لمفهوم الدوال المفتوحة والدوال المغلقة وبعض الأمثلة. وأخيراً قدمنا مفهوم التشاكل (التكافؤ التوبولوجى) للفضاءات التوبولوجية.

بند (١) : **الدوال المتصلة** : **(Continuous Functions)**

تعريف (٤ . ١ . ١) :

بفرض أن (X,τ) ، (Y,τ^*) فضاءين توبولوجيين. يقال أن الدالة $f:X\to Y$ دالة متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأى مجموعة مفتوحة فى Y هى مجموعة مفتوحة فى X أى أن

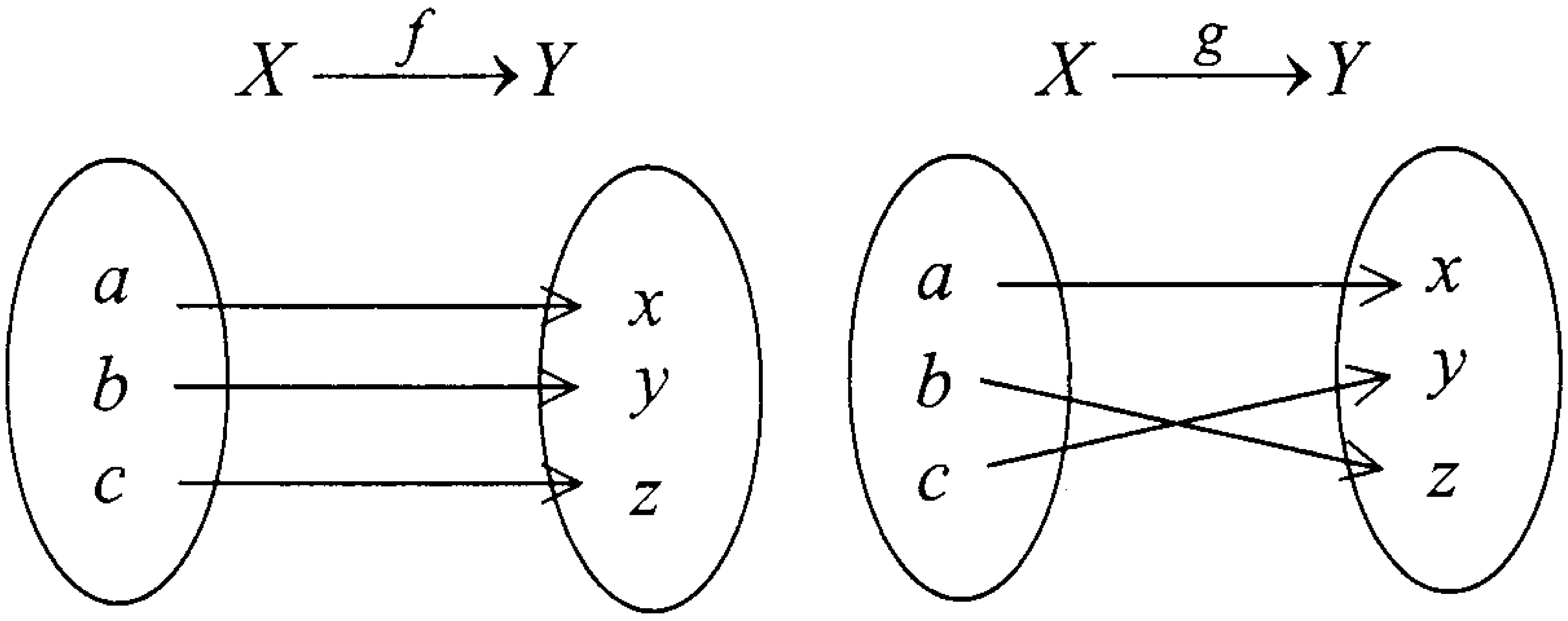
$$\forall\ V\in\tau^*\Rightarrow f^{-1}(V)\in\tau$$

مثال (٤ . ١ . ٢) :

نفرض $X=\{a,b,c\}$ ، $Y=\{x,y,z\}$. ونفرض

$$\tau_Y=\{Y,\phi,\{x\},\{x,y\}\}\ ،\ \tau_X=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$$

ونفرض الدوال $f\,,\,g:X\to Y$ المعرفة بالصورة :



نجد أن f دالة متصلة لأن :

$$f^{-1}(Y)=X\in\tau_X \ , f^{-1}(\phi)=\phi\in\tau_X \ ,$$
$$f^{-1}(\{x\})=\{a\}\in\tau_X \ , \ f^{-1}(\{x,y\})=\{a,b\}\in\tau_X$$

لكن g ليست متصلة لأن : $g^{-1}(\{x,y\})=\{a,c\}\notin\tau_X$

مثال (٤. ١. ٣) :

لتكن $f:(X,D)\to(Y,\tau)$ فإن f دالة متصلة لأنه إذا فرضنا أن $V\in\tau$ فإن $f^{-1}(V)\subseteq X$ وعليه فإن $f^{-1}(V)\in D$. إذاً $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X .

مثال (٤. ١. ٤) :

ليكن $f:(X,\tau)\to(Y,I)$ فإن f دالة متصلة لأن :

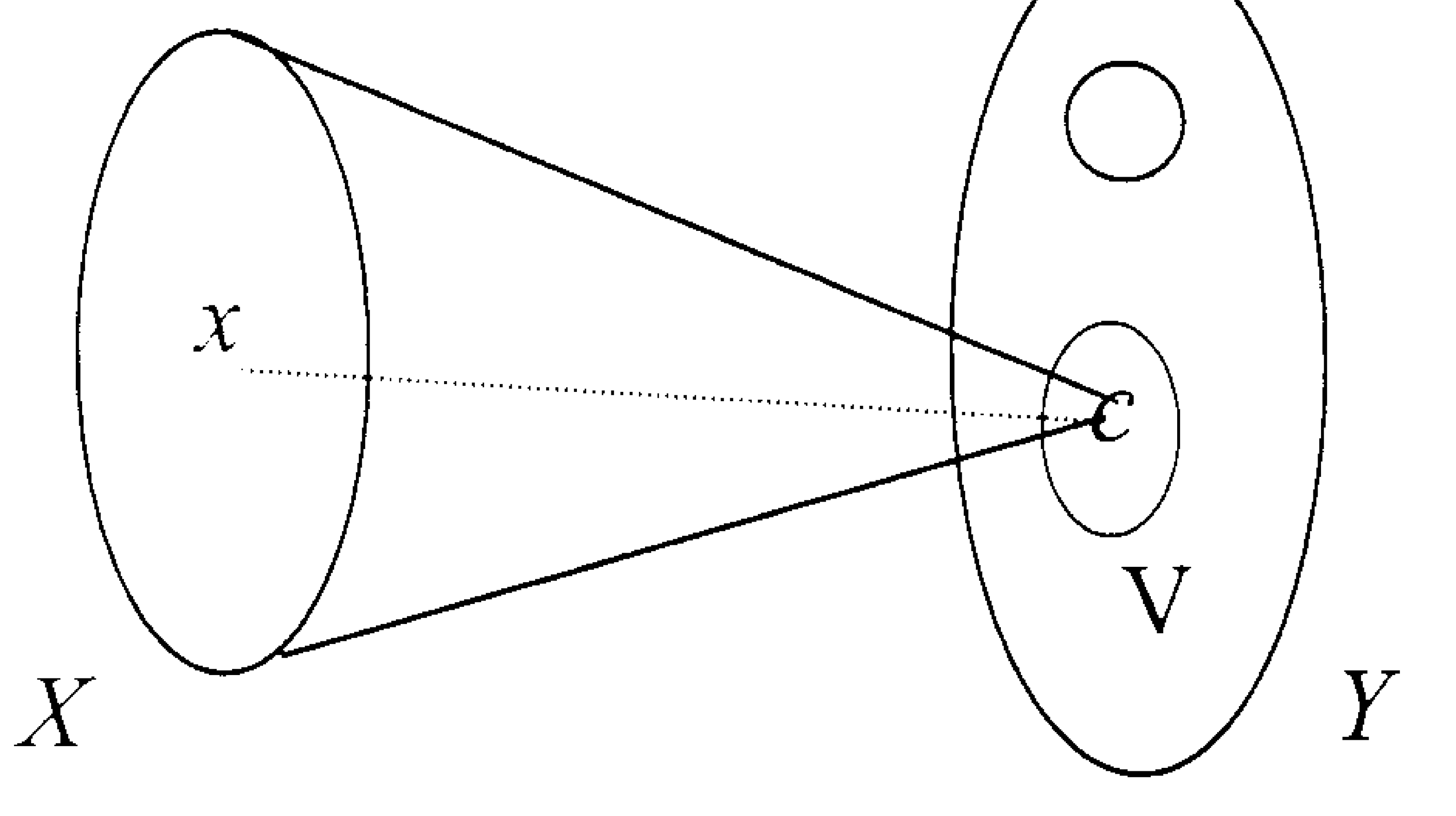
$$f^{-1}(Y)=X \ , \ f^{-1}(\phi)=\phi, \ X,\phi\in\tau$$

مثال (٤. ١. ٥) :

بفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ هى الدالة الثابتة .

$$f(x)=c \ , \ (c \ \text{ثابت}) \ \forall \ x\in X$$

فإن f دالة متصلة لأن :



نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y فإن :

$$f^{-1}(V)=\begin{cases}\phi & if\ c\notin V\\ X & if\ c\in V\end{cases} \quad \Rightarrow X,\phi\in\tau_X$$

مثال (٤ . ١ . ٦) :

إذا كان $(R,\mathcal{U})$ هو الفضاء العادى على R، (R,C) هو الفضاء ذو المكملات المنتهية على R. هل الدالة $f:R\to R$ المعرفة بالصورة :

$$f(x)=I_X(x)=x\ ;\ \forall\ x\in R \quad \text{(دالة الوحدة)}$$

دالة متصلة ؟

الحل :

بفرض أن $(a,b)\in\mathcal{U}$ مجموعة مفتوحة في $\mathcal{U}$ فإن :

$$f^{-1}((a,b))=(a,b)\notin C$$

لأن $(a,b)^c=(-\infty,a]\cup[b,\infty)$ ليست مجموعة منتهية . إذاً الدالة f ليست متصلة.

مثال (٤ . ١ . ٧) :

لتكن $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ دالة متصلة ، $A\subseteq X$

أثبت أن $f/A:(X,\tau_A)\to(Y,\tau_Y)$ متصلة حيث f/A دالة التقييد.

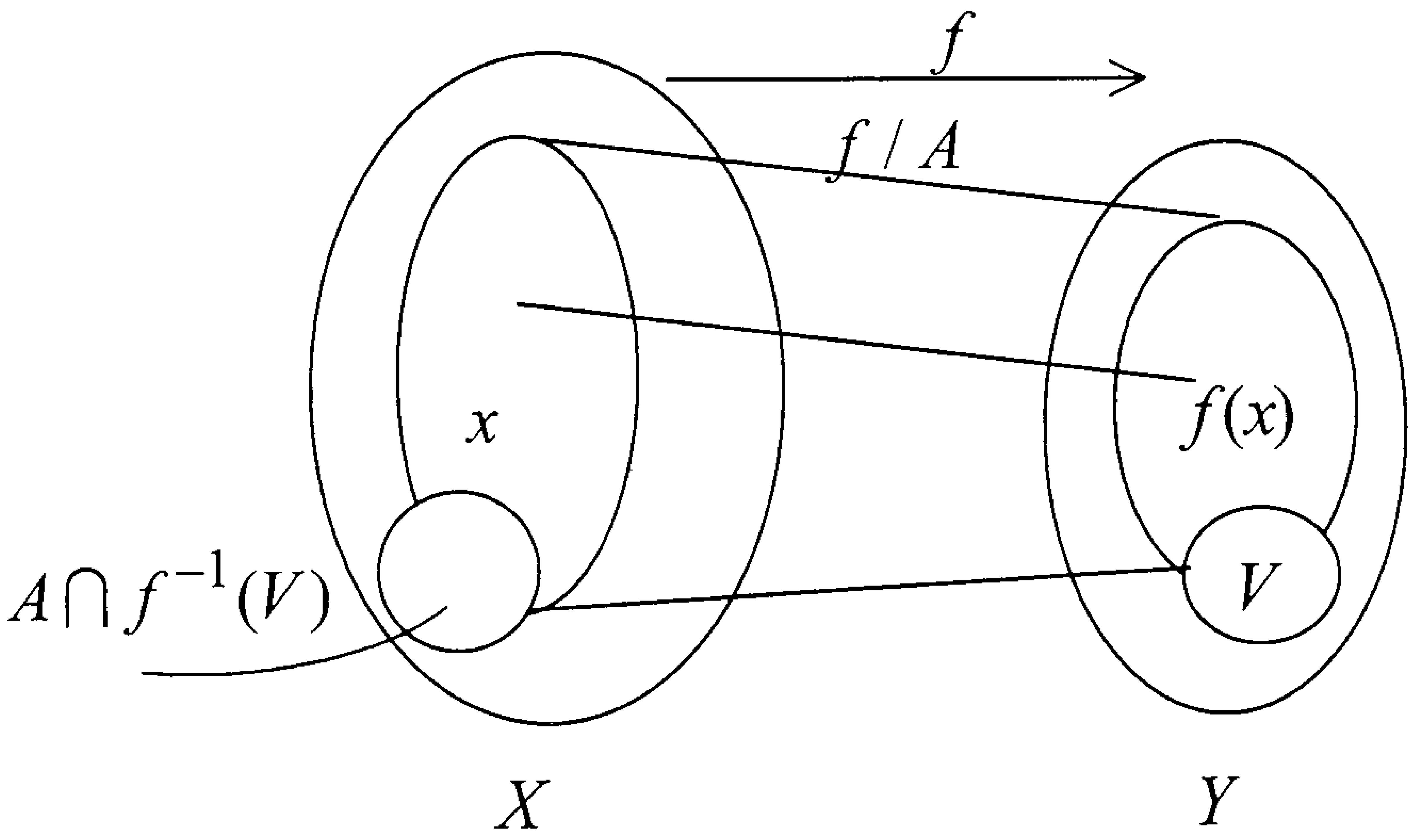
الحل :

إذا كانت $f:X\to Y$ دالة ، $A\subseteq X$ فإن دالة القييد $f/A: A\to Y$ تعرف بالصورة : $(f/A)(x)=f(x)\ ;\ \forall\ x\in A$

بفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X . إذاً $A\cap f^{-1}(V)\in\tau_A$.

أى مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئى (A,τ_A) وحيث أن

$$(f / A)^{-1}(V)=A\cap f^{-1}(V) \Rightarrow f / A$$ دالة متصلة



نظرية (٤ . ١ . ٨) :

تحصيل دالتين متصلتين هو دالة متصلة. أى إذا كان كل من $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ دالتين متصلتين فإن $gof:X\to Z$. دالة متصلة أيضاً.

تعريف (٤ . ١ . ٩) :

نفرض الدالة $f:X\to Y$ ، $p\in X$. يقال أن الدالة f متصلة عند النقطة p إذا كانت الصورة العكسية لكل جوار للنقطة $f(p)$ هى جوار للنقطة p . أى أن :

$$\forall N\in \mathcal{N}_{f(p)} \Rightarrow f^{-1}(N)\in \mathcal{N}_{p}$$

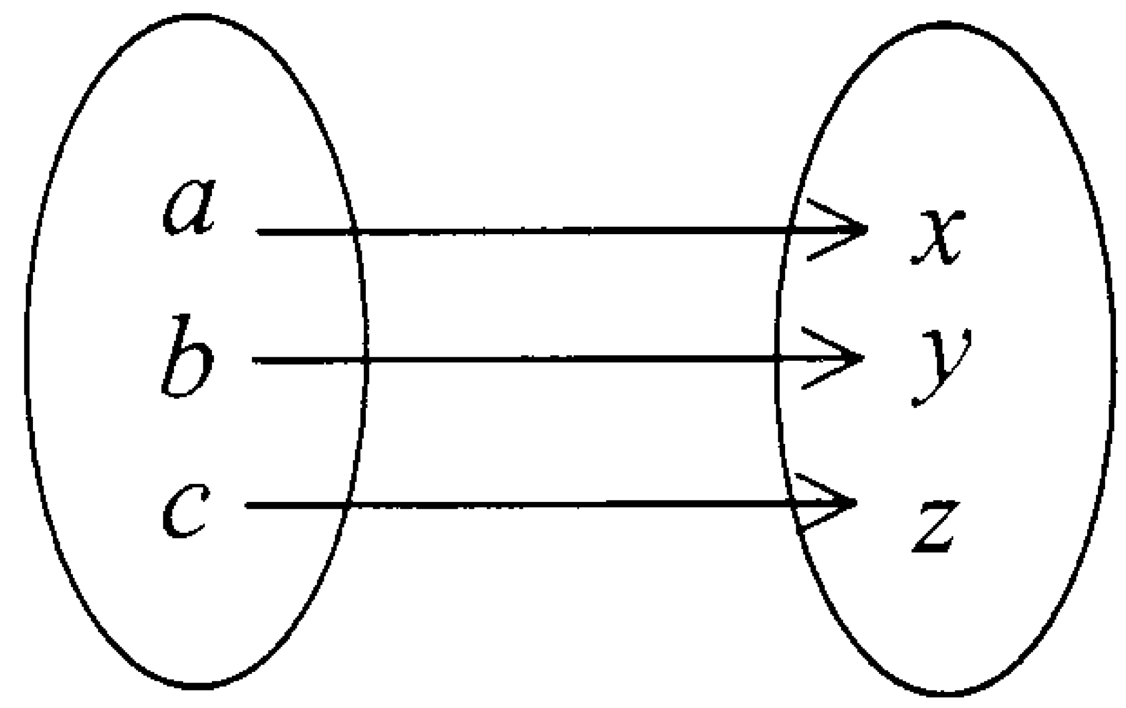
مثال (٤ . ١ . ١٠) :

نفرض $X=\{a,b,c\}$ ، $Y=\{x,y,z\}$. ونفرض

$$\tau_X=\{X,\phi,\{a\}\} ، \tau_Y=\{Y,\phi,\{x\},\{x,z\}\}$$

وإذا كانت $f:X\to Y$ دالة معرفة بالصورة :

$$X \xrightarrow{f} Y$$



بين أن f دالة متصلة عند a ولكنها غير متصلة عند c ؟

الحل :

(i) مجموعة جوارات $f(a)$:

$$\mathcal{N}_{f(a)} = \mathcal{N}_x = \{Y, \{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}\}$$

مجموعة جوارات a : $\mathcal{N}_a = \{X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

والآن $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{N}_a \quad , \quad f^{-1}(\{x\}) = \{a\} \in \mathcal{N}_a$

$$f^{-1}(\{x,y\}) = \{a,b\} \in \mathcal{N}_a \;,\; f^{-1}(\{x,z\}) = \{a,c\} \in \mathcal{N}_a$$

أى أن f متصلة عند a .

(ii) $\mathcal{N}_c = \{X\} \quad ; \quad \mathcal{N}_{f(c)} = \mathcal{N}_z = \{Y, \{x,z\}\}$

والآن $f^{-1}(\{x,y\}) = \{a,c\} \notin \mathcal{N}_c$

إذاً f ليست متصلة عند b.

والآن نـــتعرض لخواص الدوال المتصلة وذلك عن طريق العلاقة بين اتصال الدالة وغلاقة المجموعة وداخلية المجموعة والاساس والاساس الجزئى والجوار.

نظرية (٤ . ١ . ١١) :

لتكن $f : X \to Y$ دالة فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) f دالة متصلة .

(٢) الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة فى Y تكون مغلقة في X.

(٣) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subseteq X$.

(٤) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ لكل $B \subseteq Y$.

(٥) f دالة متصلة عند كل نقطة $p \in X$.

(٦) $f^{-1}(B)$ مجموعـــة مفـــتوحة في X لكـــل $B \in \mathcal{B}$ حيـــث $\mathcal{B}$ أســـاس للتوبولوجى على Y.

(٧) $f^{-1}(S)$ مجموعـــة مفـــتوحة في X لكل $S \in \boldsymbol{S}$ حيث $\boldsymbol{S}$ أساس جزئى للتوبولوجى على X.

(٨) $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$ لكل $A \subseteq Y$.

البرهان : $(1) \Leftrightarrow (2)$:

بفرض أن f دالة متصلة وأن F مجموعة مغلقة في Y فإن F^c مجموعة مفتوحة في Y وحيـــث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(F^c)$ مجموعة مفتوحة في X ولكن $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$. إذاً $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X .

والعكـــس ، بفرض أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة F في Y هى مغلقة في X ولاثبات أن f متصلة. لذلك نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن G^c مجموعـــة مغلقة في Y وباستخدام الفرض $f^{-1}(G^c)$ مجموعة مغلقة في X ولكـــن $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$. إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X وبالتالى فإن f دالة متصلة.

$(1) \Leftrightarrow (3)$:

بفرض أن f دالة متصلة وأن $A \subseteq X$ فإن $\overline{f(A)}$ مجموعة مغلقة في Y ومن ثم فإن $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة في X أى أن

$$f^{-1}(\overline{f(A)})=\overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}$$

والآن $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. وعليه نحصل على

$\overline{A}\subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}=f^{-1}(\overline{f(A)})$. ومنها نجد أن

$$f(\overline{A})\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)}))\subseteq \overline{f(A)}$$

إذاً $f(\overline{A})\subseteq \overline{f(A)}\quad ,\forall\ A\subseteq X$

والعكـــس ، نفرض أن $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$ والمطلوب إثبات أن f دالـــة متصـــلة ، لذلـــك نفـــرض أن F مجموعـــة مغلقـــة ف Y ، بوضـــع $A=f^{-1}(F)$. إذاً $f(\overline{A})=f(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(F))}\subseteq\overline{F}=F$

إذاً $\overline{f^{-1}(F)}\subseteq f^{-1}f(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq f^{-1}(F)$

ولكن $f^{-1}(F)\subseteq\overline{f^{-1}(F)}$. إذاً $f^{-1}(F)=\overline{f^{-1}(F)}$

أي أن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X .

$(1)\Leftrightarrow(4)$:

نفرض أن $B\subseteq Y$ فإن $f^{-1}(B)\subseteq X$ وباستخدام (3)

$f(\overline{f^{-1}(B)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(B))}\subseteq\overline{B}$. إذاً $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$

والعكس ، نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y وبالتالي فإن $\overline{V^c}$ مجموعة مغلقة في Y وباستخدام الفرض

$$\overline{f^{-1}(V^c)}\subseteq f^{-1}(\overline{V^c})=f^{-1}(V^c)=(f^{-1}(V))^c$$

ولكن $f^{-1}(V^c)\subseteq\overline{f^{-1}(V^c)}$. إذاً $\overline{f^{-1}(V^c)}=f^{-1}(V^c)$

وعلـــيه فـــإن $f^{-1}(V^c)$ مجموعة مغلقة في X ومن ثم فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X أي أن f دالة متصلة .

$(1) \Leftrightarrow (5)$:

بفرض أن f دالة متصلة. نفرض أن $p \in X$ ، N جوار للنقطة $f(p)$ أي أن $N \in \mathcal{N}_{f(p)}$ وعليـــيه يوجـــد $U \in \tau$ بحيـــث $f(P) \in U \subseteq N$. إذاً $p \in f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(N)$ وحيـــث أن f دالـــة متصلة فإن $f^{-1}(U)$ مجموعـــة مفتوحة وعليه فإن $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_p$ ، إذاً f متصلة عند النقطة p وحيث أن p اختيارية فإن f متصلة عند كل نقطة $p \in X$.

والعكس ، نفرض أن f دالة متصلة عند $p \in X$ وأن V مجموعة مفتوحة في Y ، $p \in f^{-1}(V)$ وعليه فإن $f(p) \in V$ ومنها فإن $V \in \mathcal{N}_{f(p)}$ ، إذاً $\forall p \;, f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_p$ وعليه فإن $f^{-1}(V) \in \tau$ مجموعة مفتوحة إذاً f دالة متصلة.

$(1) \Leftrightarrow (6)$:

بفـــرض أن f دالة متصلة ، $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على Y أي أن $B \subseteq \tau_Y$ ومـــن ثم فإن $f^{-1}(B) \in \tau_X$ لكل $B \in \tau_Y$ ، إذاً $f^{-1}(B)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $B \in \mathcal{B}$.

والعكس ، نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y وحيث أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على Y فإن $V = \cup B_i \;;\; B_i \in \mathcal{B}$ وعليه فإن

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

وحيث أن $f^{-1}(B_i)$ مجموعة مفتوحة في X فإن $f^{-1}(V)$ هي اتحاد مجموعات مفتوحة وبالتالي فإن $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة أي أن f دالة متصلة .

$(1) \Leftrightarrow (7)$: يترك للقارئ كتمرين .

$(1) \Leftrightarrow (8)$:

نفرض أن f دالة متصلة ، $A \subseteq Y$ فإن A^o مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن $f^{-1}(A^o)$ مجموعة مفتوحة في X أي $f^{-1}(A^o) = (f^{-1}(A^o))^o$

وبما أن $A^o \subseteq A$ فإن $f^{-1}(A^o) \subseteq f^{-1}(A)$ وعليه فإن

$$f^{-1}(A^o) = (f^{-1}(A^o))^o \subseteq (f^{-1}(A))^o$$

إذاً $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$.

والعكس ، نفرض أن لكل $A \subseteq Y$ يتحقق $f^{-1}(A^o) \subseteq (f^{-1}(A))^o$

ولإثبات أن f دالة متصلة ، نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y أي أن $G = G^o$.

إذاً $f^{-1}(G) = f^{-1}(G^o) \subseteq (f^{-1}(G))^o$

ولكن $(f^{-1}(G))^o \subseteq f^{-1}(G)$ وبناء على ذلك فإن $f^{-1}(G) = (f^{-1}(G))^o$. إذاً $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X ومن ثم فإن f دالة متصلة .

مثال (٤ . ١ . ١٢) :

نفرض أن $f : X \to I = [0,1]$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفترة المغلقة I . بين أنه إذا كانت $f^{-1}((a,1])$ ، $f^{-1}([0,b))$ مجموعات مفتوحة في I لكل $a > 0$ ، $b < 1$ فإن f دالة متصلة.

الحل :

حيث $a > 0$ ، $b < 1$ فإن $[0,b) \cap (a,1] = (a,b) \subseteq I$

ولذلك فإن العائلة $S = \{(a,1], [0,b) : a > 0, b < 1\}$

أساس جزئي للتوبولوجي المعرف على I . وإذا كانت $f^{-1}((a,1])$ ، $f^{-1}([0,b))$ مجموعات مفتوحة في I فإنه ينتج من نظرية (٤ . ١ . ١١) أن الدالة f متصلة.

نظرية (٤. ١. ١٣) :

نفرض أن $\{\tau_i\};\forall i=1,2,\dots$ عائلة من التوبولوجيات المعرفة على المجموعة X ، إذا كانـــت $f:X\to Y$ دالـــة متصلة بالنسبة إلى τ_i لكل i . فإن f متصلة بالنسبه إلى التوبولوجى $\tau=\bigcap\limits_i \tau_i$.

البرهان :

نفـــرض أن G مجموعـــة مفـــتوحة في Y ، حيـــث أن f دالـــة متصلة فإن $f^{-1}(G)\in\tau_i$ لكل i . من ذلك نجد أن $f^{-1}(G)\in\bigcap\limits_i \tau_i=\tau$

أى أن f دالة متصلة بالنسبة للتوبولوجى τ.

نظرية (٤. ١. ١٤) :

نفرض أن $f_i:X\to(Y_i,\tau_i)$ عائلة من الدوال ، ونفرض أن

$$S=\bigcup_i\{f_i^{-1}(H):H\in\tau_i\}$$

نفرض التوبولوجى τ على X هو التوبولوجى المولد بواسطة S فإن :

(١) f_i متصلة لكل i .

(٢) إذا كـــان τ^* هو تقاطع كل التوبولوجيات على X بحيث أن كل الدوال f_i تكون متصلة فإن $\tau^*=\tau$.

(٣) τ هو أضعف توبولوجى على X بحيث أن كل الدوال f_i تكون متصلة .

(٤) S أساس جزئى للتوبولوجى τ.

البرهان :

(١) لكل دالة $f_i:X\to(Y_i,\tau_i)$ إذا كانت $H\in\tau_i$ فإن $f_i^{-1}(H)\in S$ وحيث أن $S\subseteq\tau$ فإن $f_i^{-1}(H)\in\tau$. إذاً كل الدوال f_i متصلة.

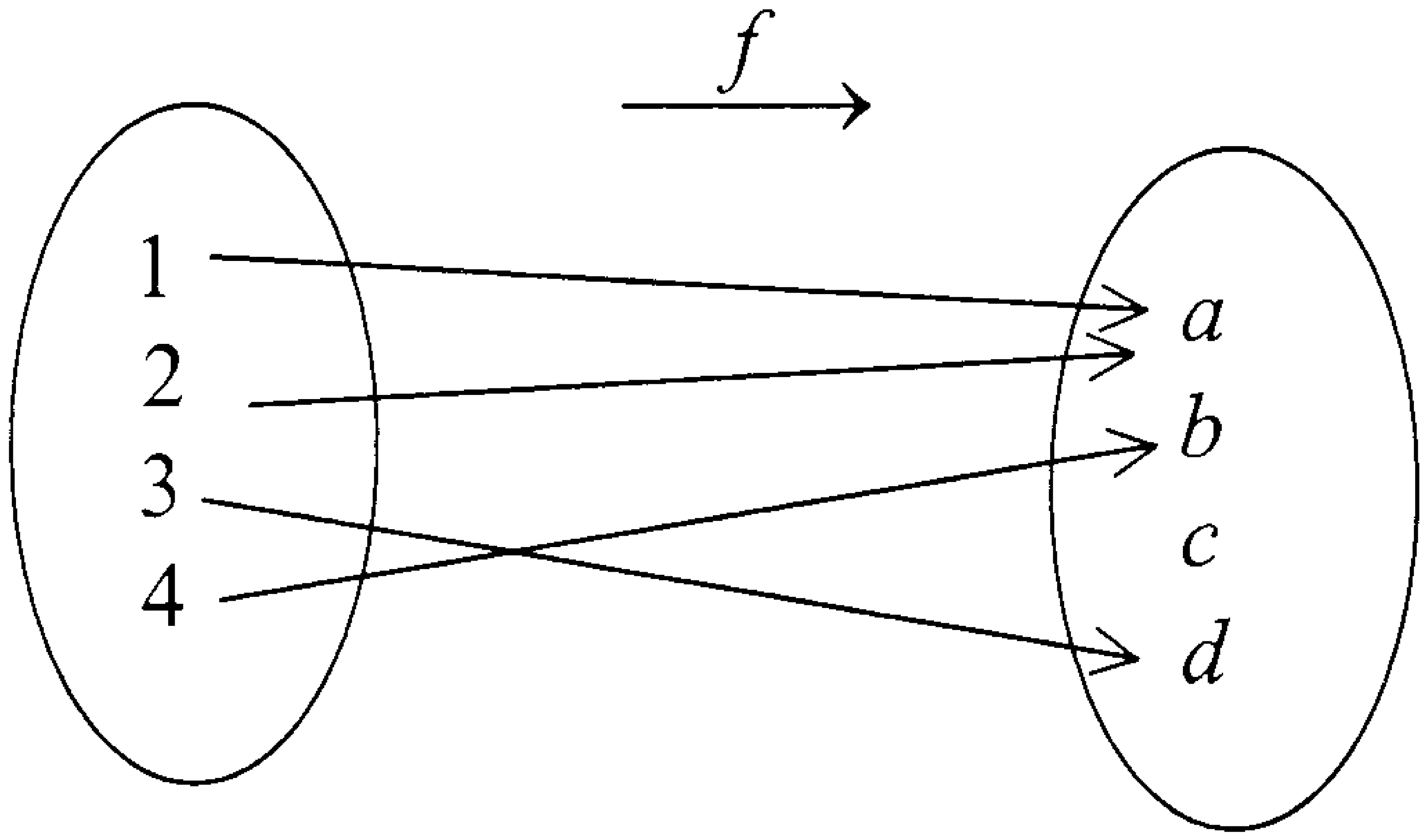
(٢) من نظرية (٤. ١. ١٣) الدوال f_i متصلة بالنسبة للتوبولوجى τ^*، إذاً $S \subseteq \tau^*$. وحيث أن τ هو التوبولوجى المولد بواسطة S فإن $\tau \subseteq \tau^*$. من جانب آخر τ هو أحد التوبولوجيات بحيث أن f_i دوال متصلة ، من ذلك نستنتج أن $\tau^* \subseteq \tau$ ، وعليه فإن $\tau^* = \tau$.

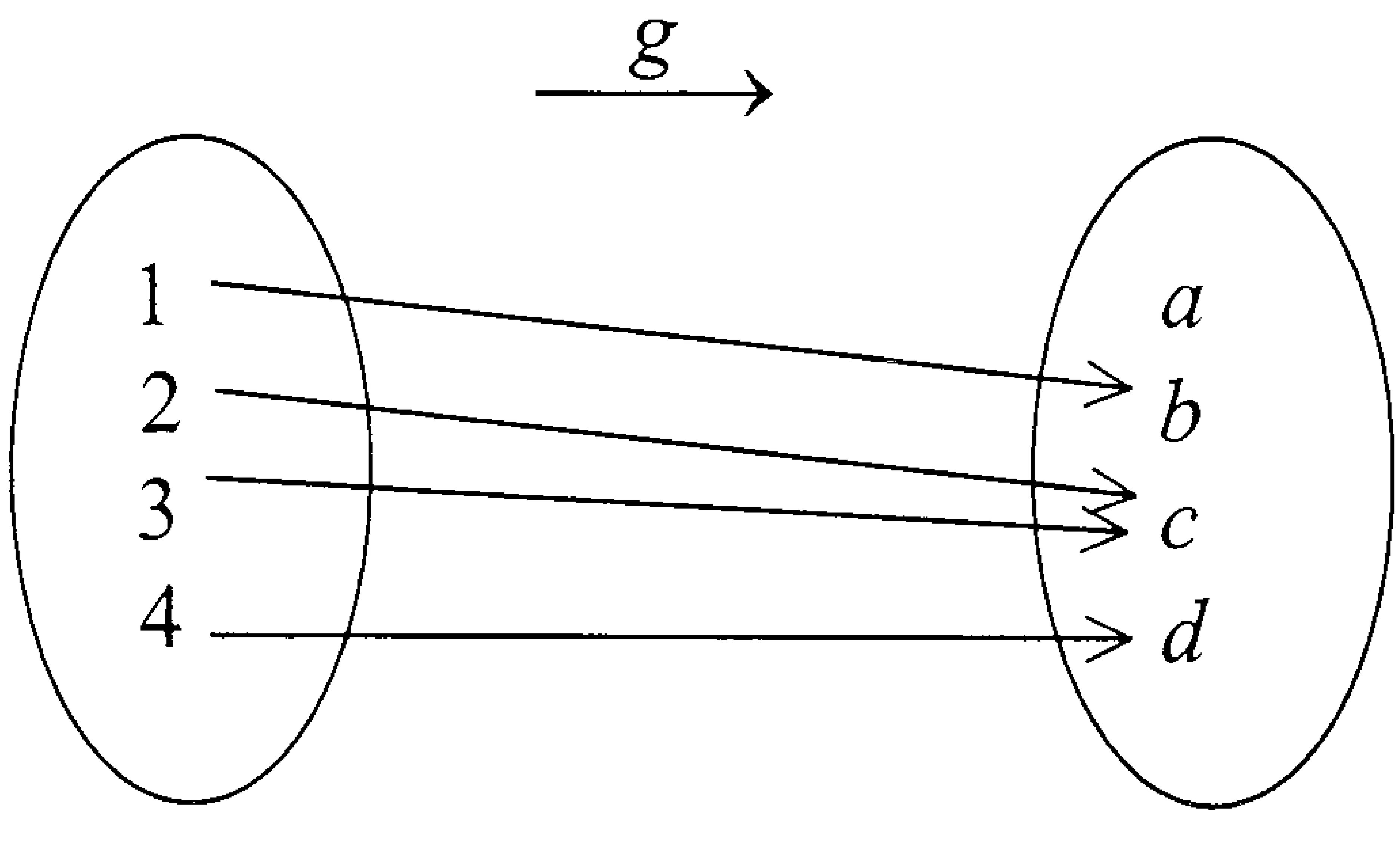
(٣) واضح من (٢).

(٤) حيث أن أى تجمع من المجموعات الجزئيه من X هو أساس جزئى لتوبولوجى على X فإن S أساس جزئى للتوبولوجى τ.

مثال (٤. ١. ١٥) :

نفرض $Y = \{a, b, c, d\}$ ، $\tau = \{Y, \phi, \{c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$
ونفرض $X = \{1, 2, 3, 4\}$ نعرف الدوال $f : X \to (Y, \tau)$ ، $g : X \to (Y, \tau)$ بالصور التالية :





أوجد الأساس الجزئى S للتوبولوجى τ^* على X المولد بواسطة الدوال f, g .

الحل :

$$S = \{ f^{-1}(H) : H \in \tau \} \cup \{ g^{-1}(H) : H \in \tau \}$$

أى أن S مكونـــة من الصور العكسية للمجموعات المفتوحة في X بواسطة الدوال f, g . إذاً

$$S = \{ X, \phi, \{1,2,4\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\} \}$$

بند(٢) : **الدوال المفتوحة والدوال المغلقة :** **(Open and closed function)**

تعريف (٤. ٢. ١) :

بفرض أن X ، Y فضاءان توبولوجيان ، الدالة $f : X \to Y$ تسمى :

(١) مفتوحة إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y أي أن :

$$\forall \ U \in \tau_X \Rightarrow f(U) \in \tau_Y$$

(٢) مغلقة إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X هي مجموعة مغلقة في Y أي أن :

$$\forall \ F \in \Im_X \ \Rightarrow \ f(F) \in \Im_Y$$

مثال (٤. ٢. ٢) :

بفـــرض أن $f : (X, \tau) \to (Y, D)$ دالـــة مـــن أي فضاء X إلى الفضاء المنفصل. أثبت أن f دالة مفتوحة ؟

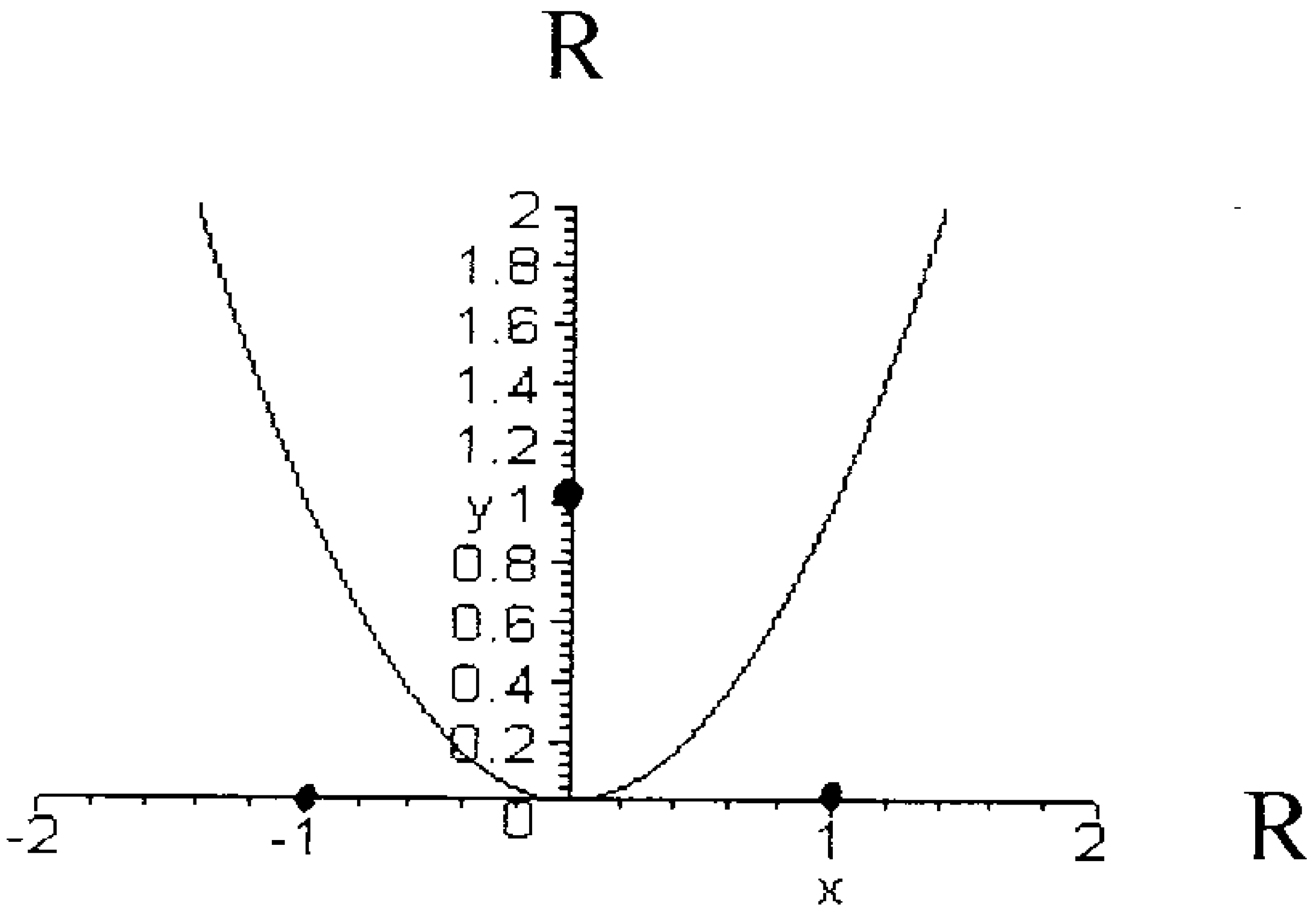
الحل :

نفرض $U \in \tau$. إذاً $f(U) \subseteq Y$ وعليه فإن $f(U) \in D$ مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن f دالة مفتوحة.

مثال (٤. ٢. ٣) :

بفـــرض أن $f : R \to R$ معرف بالصورة : $f(x) = x^2 ; \forall x \in R$ هل f دالة مفتوحة ؟

الحل :



إذا كانت $U=(-1,1)$ مجموعة مفتوحة فإن $f(U)=[0,1)$ مجموعة ليست مفتوحة . إذاً f ليست دالة مفتوحة .

ملاحظة :

الدالة في المثال السابق متصلة ومغلقة ولكنها ليست مفتوحة ، وعموماً ليست بالضرورة أن تكون الدالة المغلقة تكون مفتوحة والعكس وذلك يتضح من الأمثلة الآتية :-

مثال (٤ . ٢ . ٤) :

الدالة الثابتة $f : R \to R$ هي دالة متصلة ومغلقة وليست مفتوحة ؟

الحل :

بفرض أن $f:R\to R$ والمعرفة كما يلي : $f(x)=a \ \forall x\in R$

بالتالي فإن f دالة متصلة ولكن لأي مجموعة جزئية U في R تكون :

$$f(U) = \{a\}$$

(i) إذا كانت U مجموعة مفتوحة فإن $f(U)$ ليست مجموعة مفتوحة ؟

(ii) إذا كانت U مجموعة مغلقة فإن $f(U)$ مجموعة مغلقة ؟ لماذا ؟

ملاحظات (٤ . ٢ . ٥) :

(١) الدالة $f:(X,D)\to(Y,D)$ متصلة ومفتوحة ومغلقة في الوقت نفسه .

(٢) الدالـــة $f:(X,D)\to(X,I)$ حيث X مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر هي دالة متصلة وليست مفتوحة وليست مغلقة .

(٣) الدالـــة $f:(X,I)\to(X,D)$ حيث X مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر هي دالة مفتوحة ومغلقة ولكنها ليست متصلة .

مثال (٤. ٢. ٦) :

(i) إذا كـــان كـــل مـــن $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$ دالـــة مفـــتوحة فـــإن $gof:X\to Z$ دالة مفتوحة .

الحل :

بفـــرض أن U مجموعـــة مفـــتوحة في X . وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(U)$ مجموعـــة مفـــتوحة في Y . وحيث أن g دالة مفتوحة فإن $g(f(U))$ مجموعـــة مفـــتوحة في Z. لكن $gof(U)=g(f(U))$. إذاً $gof(U)$ مجموعة مفتوحة في Z ومن ثم فإن gof دالة مفتوحة .

(ii) إذا كانت $f:R\to R$ حيث $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\ ;\forall\ x\in R$

بين أن f دالة ليست مفتوحة وليست مغلقة ولكنها متصلة .

الحل : تمرين

الآن سوف نعطي بعض الخواص للدوال المفتوحة والدوال المغلقة.

نظرية (٤. ٢. ٧) :

لتكن $f:X\to Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) f دالة مفتوحة.

(٢) $f(A^o)\subseteq(f(A))^o$ لكل $A\subseteq X$.

(٣) $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y لكل $B \in \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على X.

(٤) لكل $p \in X$ ولكل جوار N للنقطة p يوجد جوار W للنقطة $f(p)$ بحيث أن $W \subseteq f(N)$ أي أن :

$$\forall p \in X, \forall N \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists W \in \mathcal{N}_{f(p)}, W \subseteq f(N)$$

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$:

نفرض أن f دالة مفتوحة ، $A \subseteq X$ فإن A^O مجموعة مفتوحة في X. بما أن $A^O \subseteq A$ فإن $f(A^O) \subsetneq f(A)$ وعليه فإن $(f(A^O))^O \subseteq (f(A))^O$ وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(A^O)$ مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم فإن $(f(A^O))^O = (f(A))^O$. إذاً $f(A^O) \subseteq (f(A))^O$

$(2) \Leftarrow (3)$:

نفرض أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على X، $B \in \mathcal{B}$ فإن $B^O = B$ من (٢) نجد أن : $f(B) = f(B^O) \subseteq (f(B))^O$

ومن ثم فإن $f(B) = (f(B))^O$ أي أن $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y .

$(3) \Rightarrow (4)$:

نفرض أن $p \in X$ ، N جوار للنقطة p أي أن

$$N \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists U \in \mathcal{B} \ , p \in U \subseteq N$$
$$\Rightarrow f(p) \in f(U) \subseteq f(N)$$

ومن (٣) نجد أن $W = f(U)$ مجموعة مفتوحة . إذاً نحصل على :

$$W \in \mathcal{N}_{f(p)} \ , \ W \subseteq f(N)$$

$(4) \Rightarrow (1)$:

بفرض أن U مجموعة مفتوحة في X والمطلوب إثبات أن $f(U)$ مجموعة مفتوحة في Y لذلك نفرض $y \in f(U)$، إذاً يوجد $x \in X$ بحيث $f(x) = y;\ x \in U$. إذاً U جوار للنقطة x ومن (٤) يوجد جوار W للنقطة y بحيث أن $W \subseteq f(U)$ ومن ثم فإن $y \in W \subseteq f(U)$. إذاً

$$f(U) = \bigcup\{W : y \in f(U)\}$$

إذاً $f(U)$ مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن f دالة مفتوحة .

ملاحظة :

يمكن إثبات النظرية السابقة بطريقة أخرى بالتكافؤات الآتية :

$$(1) \Leftrightarrow (2)\ ,(1) \Leftrightarrow (3)\ ,\ (1) \Leftrightarrow (4)$$

مثال (٤ . ٢ . ٨) :

إذا كانت $f : X \to Y$ دالة فإن الخواص الآتية متكافئة :-

(١) f دالة مفتوحة .

(٢) $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$ لكل $B \subseteq Y$.

(٣) $f(A^o) \subseteq (f(A))^o$ لكل $A \subseteq X$.

الحل : تترك كتمرين للقارئ.

نتيجة : ليكن $f : X \to Y$ دالة فإن الخواص الآتية متكافئة :-

(١) الدالة f متصلة ومفتوحة.

(٢) $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$ لكل $B \subseteq Y$

نظرية (٤ . ٢ . ٩) :

الدالة $f : X \to Y$ مغلقة إذا وفقط إذا كانت $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان :

بفرض أن f دالة مغلقة وأن $A \subseteq X$ فإن $\overline{A}$ مغلقة في X وبالتالي فإن $f(\overline{A})$ مغلقة في Y أي أن $f(\overline{A})=\overline{f(\overline{A})}$ ولكن

$$A \subset \overline{A} \Rightarrow f(A) \subseteq f(\overline{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$$

إذاً $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

والعكس ، نفرض أن F مجموعة مغلقة في X ومن الفرض

$$\overline{f(F)} \subseteq f(\overline{F}) = f(F) \quad ; (F=\overline{F} \text{ لأن})$$

ولكن $f(F) \subseteq \overline{f(F)}$. إذاً $f(F)=\overline{f(F)}$

أي أن $f(F)$ مغلقة ومن ثم فإن الدالة f مغلقة .

نتيجة : لتكن $f: X \to Y$ دالة فإن الخواص الآتية متكافئة :-

(١) الدالة f متصلة ومغلقة

(٢) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ لأي $A \subseteq X$.

بند (٣) : التكافؤ (التشاكل) التوبولوجي Homeomorphic :

تعريف (٤ . ٣ . ١) :

بفرض أن $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ دالة من الفضاء التوبولوجي (X,τ_1) إلى الفضاء (Y,τ_2) يقال أن f هومومورفيزم أو دالة توبولوجية إذا كانت الدالة f تحقق الخواص الآتية :-

١ - f دالة تناظر أحادي (تقابل).

٢ - f دالة متصلة .

٣ - $f^{-1}: Y \to X$ دالة متصلة .

وعندئذ يقال أن الفضاءين X , Y متكافئان توبولوجياً (متشاكلان) ويرمز لذلك بالرمز $X \cong Y$ ، من هذا التعريف يتضح لنا بأنه يمكن تعريف علاقة تكافؤ على

عائلة الفضاءات التوبولوجية كما يلي :-

يوجد $f: X \to Y$ هومومورفيزم $\Leftrightarrow X \cong Y$

(i) حيث أن دالة التطابق من أي فضاء توبولوجي إلى نفسه هي دالة توبولوجية

إذاً $X \cong X \; ; \forall X$ (علاقة عاكسة)

(ii) حيث أن معكوس الدالة التوبولوجية هو أيضاً دالة توبولوجية

إذا كان $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$ (علاقة متماثلة)

(iii) تركيب دالتين توبولوجيتين هو أيضاً دالة توبولوجية

إذا كان $X \cong Y \, , Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$ (علاقة ناقلة)

إذاً خاصية الدالة التوبولوجية هي علاقة تكافؤ .

في هذه الحالة نحصل على فصول التكافؤ ويتكون فصل التكافؤ الواحد من كل الفضاءات التوبولوجية المتشاكلة ، بالإضافة إلى ذلك إذا كان الفضاءان X , Y متشاكلان فإنه يكون لهما نفس الخواص التوبولوجية لأنه هناك تناظر أحادي بين العناصر وبين المجموعات المفتوحة وبين المجموعات المغلقة والأساس ..... إلخ ، ويكون الاختلاف فقط في طبيعة العناصر وهذا الاختلاف لا يؤخذ بعين الاعتبار في دراستنا لأن دراسة علم التوبولوجي تتعلق فقط بالخواص التوبولوجية .

هناك خواص معينة إذا تمتع بها فضاء توبولوجي ما فإنه يتمتع بها أي فضاء توبولوجي آخر يتشاكل معه وهذه الخاصية تسمى خاصية توبولوجية **(Topological Property)**.

تعريف (٤. ٣. ٢) :

الخاصية P تكون خاصية توبولوجية إذا وفقط إذا كانت محافظة على نفسها بالنسبة لأي هومومورفيزم . وهذا يعني أنه إذا كان X فضاء توبولوجي يتمتع بالخاصية P فإن P تسمى خاصية توبولوجية إذا وجد $f: X \to Y$ هومومورفيزم اختياري من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y بحيث أن Y يتمتع بنفس الخاصية P.

مثال (٤ . ٣ . ٣) :

خاصية أن يكون الفضاء منفصل (Discrete) هي خاصية توبولوجية ؟

حل :

بفرض أن الدالة $f:(X,D)\to(Y,D)$ تناظر أحادي نستطيع أن نرى بسهولة أن $f\,,f^{-1}$ دوال متصلة . إذاً f هومومورفيزم . إذاً $X\cong Y$ وحيث أن X هو D $\Leftrightarrow$ Y هو D . إذاً D خاصية توبولوجية .

مثال (٤ . ٣ . ٤) :

بين أن $[0,1]\cong[a,b]$ وأن الطول ليست خاصية توبولوجية .

حل :

نفرض الدالة $f:[0,1]\to[a,b]$ والمعرفة كما يلي :

$$f(x)=(b-a)\,x+a\ ;\forall\, x\in[0,1]$$

ونعتبر التوبولوجي المعرف على $[0,1],[a,b]$ هو التوبولوجي العادي .

(i) نفرض $f(x_1)=f(x_2)$. إذاً $(b-a)\,x_1+a=(b-a)\,x_2+a$ ومنها نحصل على $x_1=x_2$. إذاً f أحادية.

نفرض $y\in[a,b]$; $y=f(x)$. إذاً $y=(b-a)\,x+a$ وعليه فإن $x=\dfrac{y-a}{b-a}\in[0,1]$. إذاً f شامله وبالتالي فإن المعكوس موجود حيث $f^{-1}:[0,1]\to[a,b]$ تأخذ الصورة :

$$f^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a}\ ;\forall\, y\in[a,b]$$

ونلاحظ أن $f\,,f^{-1}$ دوال متصلة . إذاً f هو مومورفيزم .

إذاً $[0,1]\cong[a,b]$

فإذا كانت $a=0\,,b=5$ فإن الطول ليست خاصية توبولوجية .

مثال (٤ . ٣ . ٥) : بين أن $[0,1)\cong[0,\infty)$

الحل :

نعرف الدالة $f:[0,1)\to[0,\infty)$ حيث $y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

بالتالي فإن f دالة متصلة (باعتبار التوبولوجي العادي) ومن السهل أن نرى أن f تناظر أحادي . إذاً $y(1-x)=x\Rightarrow y=x(y+1)\Rightarrow x=\dfrac{y}{y+1}$. وعليه

فإن $g:[0,\infty)\to[0,1)$ حيث $g(y)=\dfrac{y}{y+1}$

ولإثبات أن g هو معكوس f . نجد أن

$$gof(x)=g(f(x))=g(\frac{x}{1-x})=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x}+1}=x\ ;\forall\, x\in[0,1)$$

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{y}{y+1})=\frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{y}{y+1}+1}=y\ ;\forall\, y\in[0,\infty)$$

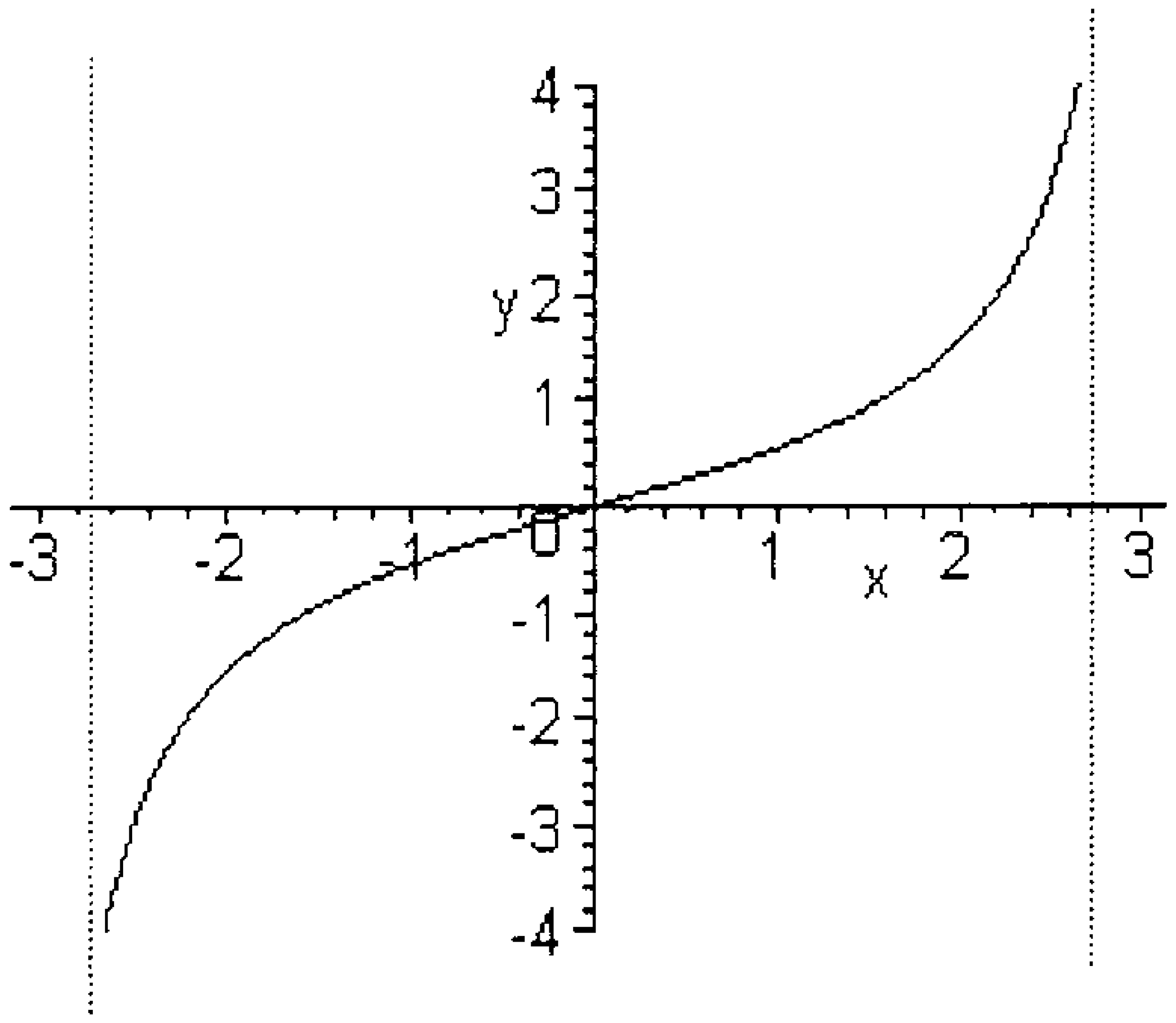
إذاً $g=f^{-1}$. ونلاحظ أيضا أن f^{-1} دالة متصلة لأن $|g(y)|<1$ لجميع قيم y . إذاً $[0,1)\cong[0,\infty)$.

مثال (٤ . ٣ . ٦) :

بين أن $X=(-1,1)\cong R$ وأن المحدوديه (boundedness) ليست خاصية توبولوجية.

الحل :

نعرف الدالة $f:X \to R$ بالصورة $f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x \; ; \; \forall x \in X$



واضح أن :

١) f دالة تناظر أحادي .

٢) f دالة متصلة وكذلك f^{-1} .

إذاً f دالـــة توبولوجية ومن ثم فإن $R \cong X$ ولكن X محدودة بينما R ليست كذلك .

مثال (٤ . ٣ . ٧) :

خاصية انعزال مجموعة هي خاصية توبولوجية .

الحل :

لتكن A مجموعة منعزلة في X أي أنه توجد $x \in A$ ولكن $x \notin A'$ بفرض أن $f:X \to Y$ دالـــة هومومورفـــيزم مـــن الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y .

$$x \notin A' \Rightarrow \exists G \in \tau_X \quad , x \in G \quad ,(G-\{x\}) \cap A = \phi$$

ولكـــن $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y تحتوي $y=f(x)$ وحيث أن f تناظر أحادي فإن :

$$f(G-\{x\}\cap A)=f(G-\{x\})\cap f(A)$$
$$=(f(G)-f(x))\cap f(A)$$
$$=(f(G)-\{y\})\cap f(A)=\phi$$

أي أن $y\notin (f(A))'$ مجموعة منعزلة في Y.

وبالتالي فإن خاصية انعزال مجموعة هي خاصية توبولوجية .

نظرية (٤. ٣. ٨) :

بفـــرض أن $f:X\to Y$ دالـــة تـــناظر أحادي من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y. فإن الخواص الآتية متكافئة :

١) f هومومورفيزم .

٢) f متصلة ومفتوحة .

٣) f متصلة ومغلقة .

٤) $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$.

٥) $\overline{f^{-1}(B)}=f^{-1}(\overline{B})$ لكل $B\subseteq Y$.

٦) $f(A^o)=(f(A))^o$ لكل $A\subseteq X$.

٧) $f^{-1}(B^o)=(f^{-1}(B))^o$ لكل $B\subseteq Y$.

مثال (٤. ٣. ٩) :

خاصيتي الإنغلاق والتكثيف توبولوجيتين.

الحل :

بفرض أن $f:X\to Y$ هومومورفيزم من الفضاء X إلى الفضاء Y وأن A مجموعة جزئية من X . إذاً $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ (من نظرية (٤. ٣. ٨)).

إذاً خاصية إغلاق A هي توبولوجية.

وإذا كانت A كثيفة في X فإن $\overline{A}=X$. إذاً

$$f(\overline{A})=f(X)=Y \;\; ; \; \overline{f(A)}=f(\overline{A})=Y$$

إذاً $f(A)$ كثيفة في Y ومن ثم خاصية أن تكون المجموعة كثيفة هي خاصية توبولوجية.

<u>مثال (٤. ٣. ١٠) :</u>

١ – بفرض أن $f : X \to Y$ دالة تناظر أحادي فإن :-

(i) f دالة مفتوحة $\Leftrightarrow$ f دالة مغلقة

(ii) f دالة مغلقة $\Leftrightarrow$ f^{-1} دالة متصلة

(iii) f دالة مفتوحة $\Leftrightarrow$ f^{-1} دالة متصلة

<u>الحل :</u>

(i) بفرض أن f دالة مفتوحة وأن $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة وبالتالي فإن F^{C} مجموعة مفتوحة، وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(F^{C})$ مجموعة مفتوحة في Y ، وحيث أن f دالة تناظر أحادي فإن $f(F^{C})=(f(F))^{C}$ ومن ثم فإن $f(F)$ مجموعة مغلقة في Y أي أن f دالة مغلقة ، ويمكن إثبات العكس بنفس الطريقة .

(ii) بفرض أن f دالة مغلقة ، $f^{-1}:Y \to X$ وأن $U \subseteq X$ مجموعة مفتوحة في X بالتالي U^{C} مجموعة مغلقة في X وحيث أن f دالة مغلقة فإن $f(U^{C})$ مجموعة مغلقة في Y ولكن f تناظر أحادي .

$$f(U^{c})=(f(U))^{c} \Rightarrow (f(U))^{c} \text{ مجموعة مغلقة}$$

$$\Rightarrow f(U) \text{ مجموعة مفتوحة}$$

$$\Rightarrow f(U)=(f^{-1})^{-1}(U) \text{ مجموعة مفتوحة في Y}$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ متصلة}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات العكس .

٢) بفرض أن $f : X \to Y$ دالة هومومورفيزم من الفضاء X إلى الفضاء Y فإنه لكل $A \subseteq X$ يكون $f(A') = (f(A))'$.

الحل :

إذا كان $y \notin (f(A))' \Leftrightarrow$ يوجد $V \in \tau_Y$ ، $y \in V$ بحيث أن

$$(V - \{y\}) \cap f(A) = \phi \Leftrightarrow f^{-1}[(V - \{y\}) \cap f(A)] = f^{-1}(\phi)$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1}(V) - f^{-1}(y)) \cap A = \phi$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) \notin A' \Leftrightarrow y \notin f(A')$$

إذاً $f(A') = (f(A))'$

٣) بفرض أن $f : X \to Y$ دالة هومومورفيزم من الفضاء X إلى الفضاء Y فإن

$$A \cap A' = \phi \Rightarrow f(A) \cap (f(A))' = \phi$$

الحل :

$$A \cap A' = \phi \Rightarrow f(A \cap A') = f(\phi) = \phi$$

وحيث أن f تناظر أحادي فإن : $f(A) \cap f(A') = \phi$

وحيث أن f هومومورفيزم وباستخدام (٢) :

$$f(A') = (f(A))'$$

$$\Rightarrow \quad f(A) \cap (f(A))' = \phi$$

مثال (٤. ٣. ١١) :

اثبت أن $(0,1) \cong (-1,1)$

الحل :

نعرف الدالة $f : (0,1) \to (-1,1)$ بالصورة :

$$f(x) = 2x-1 \;;\; \forall\, x \in (0,1)$$

١) واضح أن f تقابل. ٢) f, f^{-1} دوال متصلة.

مثال (٤ . ٣ . ١٢) : اثبت أن $R \cong (-1,1)$

الحل : نعرف الدالة $f:(-1,1) \to R$ بالصورة :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & ; -1<x<0 \\ \dfrac{x}{1-x} & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

مثال (٤ . ٣ . ١٣) : اثبت أن $(0,1) \cong R$

الحل : تترك للقارئ كتمرين

تمارين عامة على الباب الرابع

(١) إذا كانت $f: X \to Y$ دالة متصلة وغامرة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y . برهن أن صورة أى مجموعة كثيفة فى X تكون مجموعة كثيفة في Y.

(٢) إذا كانت $f: X \to Y$ دالة متصلة وغامرة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y . بين أن f تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت $f^{-1}(B^o) \subseteq (f^{-1}(B))^o$ لكل $B \subseteq Y$.

(٣) أعط مثالا لدالة متصلة ومفتوحة وليست مغلقة.

(٤) أعط مثالا لدالة متصلة ومغلقة وليست مفتوحة .

(٥) أعط مثالا لدالة مفتوحة ومغلقة وليست متصلة .

(٦) أعط مثالا لدالة متصلة ومفتوحة ومغلقة.

(٧) لتكن $f_i: X \to Y$ عائلة من الدوال بحيث أن (Y, τ) فضاء توبولوجي.

برهن أن العائلة : $S = \{f_i^{-1}(G) : \forall i \in I, \forall G \in \tau\}$

تشكل أساس جزئى لأصغر توبولوجى على X تجعل كل الدوال f_i متصلة.

(٨) إذا كانت $f: X \to Y$ دالة من الفضاء التوبولوجى (X, τ) إلى المجموعة Y . برهن أن $\tau^* = \{G \subseteq Y : f^{-1}(G) \in \tau\}$

هو أقوى (أكبر) توبولوجىعلى Y يجعل f دالة متصلة.

(٩) يقال أن الدالة $f: X \to Y$ من الفضاء التوبولوجى X إلى الفضاء التوبولوجى Y قوية الاتصال (strongly continuous) إذا كانت $f(\overline{A}) \subseteq f(A)$ لكل $A \subseteq X$. برهن أن f قوية الاتصال إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأى مجموعة جزئية من Y هى مجموعة مغلقة ومفتوحة من X . هل كل دالة قوية الاتصال تكون متصلة؟ هل العكس صحيح ؟.

(١٠) يقال أن الدالة الحقيقية $f: X \to R$ نصف متصلة من أعلى (upper-semicontinuous) إذا كانت $f^{-1}(-\infty, a]$ مجموعة مفتوحة في X ويقال أن f نصف متصلة من أسفل (Lower-semicontinuous) إذا كانت $f^{-1}[b, \infty)$ مجموعة مفتوحة في X . برهن أن الدالة f متصلة إذا وفقط إذا كانت نصف متصلة من أعلى ونصف متصلة من أسفل.

(١١) إذا كانت كل من $f: X \to Y$ ، $g: Y \to Z$ دالة توبولوجية ، بين أن الدالة $gof: X \to Z$ دالة توبولوجية أيضاً .

(١٢) أعط مثال لدالة متصلة $f: X \to Y$ تحقق :

$$(i)\ \ f(A') \neq (f(A))' \qquad (ii)\ \ \overline{f(A)} \neq f(\overline{A})$$

(١٣) أعط مثال بحيث أن $(X, \tau_X) \ncong (Y, \tau_Y)$

(١٤) برهن أن

$$(i)\ \ (a,b) \cong (0,1) \quad (ii)\ \ (a,\infty) \cong (1,\infty) \quad (iii)\ \ (1,\infty) \cong (0,1)$$
$$(iv)\ [a,b) \cong [0,1) \quad (v)\ [a,b] \cong [0,1]$$

الباب الخامس

الفراغ المترى
The metric Space

الباب الخامس

الفضاء المتري The metric space

بند(١) تعريفه وبعض الأمثلة التوضيحية :

تعريف (٥. ١. ١) :

نفــرض أن X مجموعــة غير خالية وأن d دالة من $X\times X$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R أي أن $d:X\times X\rightarrow R$. تسمى الدالة d بدالة المسافة أو دالة مترية (metric) إذا حققت الشروط التالية :

$$(D_1):\ d(x,y)\geq 0\ and\ d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$$
$$(D_2):\ d(x,y)=d(y,x)$$
$$(D_3):\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

لجميع قيم $x,y,z\in X$.

يسمى الزوج (X,d) بالفضاء المتري (metric space).

ملاحظات (٥. ١. ٢) :

(١) الشرط الأول (D_1) يعنى أن المسافة بين أى نقطتين لا يمكن أن تكون سالبة، وتكون المسافة صفراً إذا وفقط إذا أنطبقت النقطتان على بعضهما البعض. والشرط الــثانى (D_2) يعــنى المحافظــة على المسافة بين أى نقطتين وهى تسمى خاصية التماثل. الشرط الثالث (D_3) فهو الخاصية المثلثية (Tringle inequality) والتى تــنص عــلى أن مجمــوع طولى ضلعين في مثلث أكبر من أو تساوى طول الضلع الثالث.

(٢) بالاستنتاج الرياضي ممكن أن نعمم الخاصية (D_3) لتصبح :

$$d(x_1,x_n)\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\ldots+d(x_{n-1},x_n)$$
$$=\sum_{j=1}^{n-1} d(x_j,x_{j+1})$$

(٣) وباستخدام الخاصية (D_3) يمكن إثبات أن :

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leq d(x,y)$$

يلاحـــظ أنـــه من الممكن تعريف أكثر من دالة مترية على المجموعة غير الخالية X ، وهذا يعنى أن المجموعة X تتحول إلى فضاء مترى بأكثر من طريقة ، وهذا مما سنراه في الأمثلة .

أمثلة توضيحية (٥. ١. ٣) :

(١) أعتـــبر مجموعـــة الأعـــداد الحقيقـــية R نعرف الدالة d على R حيث $d:R\times R\rightarrow R$ علي النحو التالي : $d(x,y)=|x-y|\ ;\forall x,y\in R$

الزوج (R,d) تمثل فضاء متري ؟

الحل : من خواص المقياس (دالة القيمة الطلقة) نعلم أن :

$$(i)\ \ |x|\geq 0,$$
$$(ii)|x|=0 \Leftrightarrow x=0$$
$$(iii)|-x|=|x|$$
$$(iv)|x+y|\leq|x|+|y|$$

في ضوء ذلك نجد أن :

$$(D_1)\because |x-y|\geq 0 \xrightarrow{(i)} d(x,y)=|x-y|\geq 0$$
$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$$
$$(D_2)\ d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|=d(y,x)$$
$$(D_3)\ d(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|$$
$$\leq|x-y|+|y-z|=d(x,y)+d(y,z)$$

هذه الدالة d المعرفه في هذا المثال على R تسمى بالدالة العادية .

(٢) لأي مجموعة غير خالية X ، نعرف d على النحو التالي :

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

أثبت أن (X,d) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

(D_1) مـــن التعريف يتضح أن $d(x,y)$ إما تساوي صفر أو واحد وعليه فإن $d(x,y)\geq 0$ ويتضح أيضا أن : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(D_2) واضحة أيضا من التعريف حيث $d(x,y)=d(y,x)$

لإثبات (D_3) هناك أربعة حالات ممكنة وهي على النحو التالي :

الحالة الأولى : $x=y=z$

$$\therefore\ d(x,y)=d(x,z)=d(y,z)=0$$

$$\Rightarrow d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)=0$$

الحالة الثانية : $x\neq y\neq z$

$$\therefore\ d(x,y)=d(x,z)=d(y,z)=1$$

$$\Rightarrow d(x,z)=1< d(x,y)+d(y,z)=2$$

الحالة الثالثة : $x=y\neq z$

$$\therefore\ d(x,y)=0,\ d(x,z)=d(y,z)=1$$

$$\Rightarrow d(x,z)=1= d(x,y)+d(y,z)=1$$

الحالة الرابعة : $x\neq y=z$

$$\therefore\ d(x,y)=1,\ d(x,z)=1\ ,\ d(y,z)=0$$

$$\Rightarrow d(x,z)=1= d(x,y)+d(y,z)=1$$

بالـــتالي فإن d دالة مترية ، (X,d) فضاء متري ، هذا الفضاء يسمى بالفضاء المتقطع (discrete metric) أو التافهه.

(٣) نعرف الدالة $d:R\times R\to R$ على النحو التالي :

$$d(x,y)=|\,x^2-y^2\,|\ ;\ \forall\ x,y\in R$$

(R,d) لا تمثل فضاء متري ؟ برهن ذلك ؟

الحل :

بأخذ $x=1 \quad , \quad y=-1$ نجد أن

$$d(x,y)=|x^2-y^2|=|1^2-(-1)^2|=|1-1|=0$$

$$\therefore \; d(x,y)=0 \not\Leftarrow x=y$$

وعلية فإن D_1 غير محققة على وجه العموم .

(٤) نفــرض $X=R^2=R\times R$ ، نعــرف الدالة $d:X\times X\to R$ على النحو التالي : $d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

حيث $x=(x_1,x_2) \; , \; y=(y_1,y_2)\in X$

إذاً (R,d) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

$$(D_1) \because |x_1-y_1|\geq 0, |x_2-y_2|\geq 0$$
$$\Rightarrow |x_1-y_1|+|x_2-y_2|\geq 0 \Rightarrow d(x,y)\geq 0$$
$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow |x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0$$
$$\Leftrightarrow |x_1-y_1|=0=|x_2-y_2|$$
$$\Leftrightarrow x_1=y_1|, \; x_2=y_2$$
$$\Leftrightarrow \; x=(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

$$(D_2) \; d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$
$$=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|=d(y,x)$$

لإثبات (D_3) نفرض $z=(z_1,z_2)$ إذاً

$$d(x,z)=|x_1-z_1|+|x_2-z_2|$$
$$=|x_1-y_1+y_1-z_1|+|x_2-y_2+y_2-z_2|$$
$$\leq |x_1-y_1|+|y_1-z_1|+|x_2-y_2|+|y_2-z_2|$$
$$=d(x,y)+d(y,z)$$

(٥) نعرف الدالة $d:R\times R\to R$ على النحو التالي :

$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \quad ; \forall\ x,y\in R$$

برهن أن (R,d) تمثل فضاء متري ؟

الحل : (من التعريف)

$(D_1)\ d(x,y)\geq 0$ من الواضح أن

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$(D_2)\, d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=\frac{|y-x|}{1+|y-x|}=d(y,x)$$

$$(D_3)\, d(x,y)+d(y,z)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}$$

$$\geq \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|+|x-y|}$$

$$=\frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}=\frac{1}{\dfrac{1}{|x-y|+|y-z|}+1}$$

$$\geq \frac{1}{\dfrac{1}{|x-z|}+1}=\frac{|x-z|}{1+|x-z|}=d(x,z)$$

٦) نفرض $X=C[0,1]$ ترمز إلى مجموعة الدوال الحقيقية المتصلة (المستمرة) على الفترة المغلقة $[0,1]$ ، نعرف $d: X\times X\to R$ على النحو التالي :

$$d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)| \ ; \forall\ f,g\in X$$

برهن أن $(C[0,1],d)$ تمثل فضاء متري ؟

حل : (من التعريف)

$$(D_1)\ d(f,g)\geq 0$$

$$d(f,g)=0 \Leftrightarrow \sup|f(x)-g(x)|=0$$

$$\Leftrightarrow \ |f(x)-g(x)|=0 \ ; \ \forall x \in [0,1]$$
$$\Leftrightarrow \ f(x) = g(x); \ \forall x \in [0,1]$$
$$\Leftrightarrow \ f=g \quad (\text{حيث أن } f,g \text{ دوال متصلة})$$

$$(D_2)\, d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)| = \sup|g(x)-f(x)|$$
$$=d(g,f)$$

$$(D_3) \ |f(x)-h(x)|=|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|$$
$$\le |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$$

$$\therefore \ \sup|f(x)-h(x)| \le \sup|f(x)-g(x)|$$
$$+\sup|g(x)-h(x)|$$

$$\therefore \ d(f,h) \le d(f,g)+d(g,h) \ ; \ \forall \ f,g,h \in C[0,1]$$

وهو المطلوب .

نظرية (٥. ١. ٤) :

إذا كانت X مجموعة غير خالية ، فإن $d: X\times X \to R$ دالة مترية إذا وفقط إذا كان :

$$(i) \ \ d(x,y)=0 \ \Leftrightarrow \ x=y \ ;\forall x,y \in X$$
$$(ii) \ \ d(x,y) \le d(x,z)+d(y,z) \ ; \ \forall x,y,z \in X$$

البرهان :

تترك للقارئ كتمرين

والآن قبل أن نسرد بقية الأمثلة سوف نحتاج إلى بعض المتباينات سوف نسردها فيما يلي :

نظرية (٥. ١. ٥) :

المعادلة $a\lambda^2+b\lambda+c\ge 0$ حيث $a\neq 0$ لجميع قيم λ الحقيقية إذا وفقط إذا كان $a>0 \ , 4ac\ge b^2$.

البرهان :

بإكمال المربع نحصل على :

$$a\lambda^2+b\lambda+c=a(\lambda^2+\frac{b}{a}\lambda+\frac{b^2}{4a^2})+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$=a(\lambda+\frac{b}{2a})^2+(c-\frac{b^2}{4a}) \quad \dots\dots\dots(*)$$

المقدار $(\lambda+\frac{b}{2a})^2$ يعتمد على λ ويمكننا أن نجعله مقدار كبير كما نرغب أن يكون ، فإذا كانت $a<0$ فإنه لمقدار مناسب لـــ λ فإننا نجعل الطرف الأيمن من العلاقـــة الســـابقة ســـالبا وعلـــية فإن $a\lambda^2+b\lambda+c<0$ إذاً لكي تكون $a\lambda^2+b\lambda+c>0$ يجب أن يكون $a>0$.

أيضـــا نجـــد أن $a(\lambda+\frac{b}{2a})^2\geq 0$ أما إذا كانت $a(\lambda+\frac{b}{2a})^2=0$ فإن $\lambda=-\frac{b}{2a}$ ، إذاً لكي يكون المقدار $a\lambda^2+b\lambda+c\geq 0$ لجميع قيم λ يجب أن يكون $c-\frac{b^2}{4a}\geq 0$ ، أي أن $c\geq\frac{b^2}{4a}$ أي أن $4ac\geq b^2$.

وواضح من (*) أنه إذا كان $4ac\geq b^2$, $a>0$ فإن $(c-\frac{b^2}{4a})\geq 0$ ، $a>0$ وعلـــيه فـــإن الطـــرف الأيمـــن مـــن (*) يكون غير سالباً وعليه فإن $a\lambda^2+b\lambda+c\geq 0$.

<u>نظرية (٥. ١. ٦)</u> : (متباينة كوشي – **Cauchy ineqality**)

إذا كان لدينا المتتابعتان اللانهائيتان (x_r) , (y_r) ; $\forall r=1,2,3,\dots$ بحيث $\sum_{r=1}^{\infty}x_r<\infty$, $\sum_{r=1}^{\infty}y_r<\infty$ فإن :

$$(i)\ \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r < \infty$$

$$(ii)\ \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r < \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2}$$

البرهان :

نختار $\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 > 0$ لأنه إذا كان $x_r = 0, \forall r$ فإن الحل يكون تافهه .

لأي عدد حقيقي λ فإن :

$$\sum_{r=1}^{\infty} (\lambda x_r + y_r)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} (x_r^2 \lambda^2 + 2 x_r y_r \lambda + y_r^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2) \lambda^2 + 2.(\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r) \lambda + (\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2) \geq 0$$

بوضع $a = \sum_{r=1}^{\infty} x_r^2 ,\ b = 2(\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r)\ ,\ c = \sum_{r=1}^{\infty} y_r^2$ وباستخدام النظرية (٥. ١. ٥) نحصل على $4ac \geq b^2$ أي أن :

$$4(\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r)^2 \leq 4(\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2)(\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r \leq \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} x_r^2} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} y_r^2}$$

وحيث أن $\sum_{r=1}^{\infty} y_r < \infty$, $\sum_{r=1}^{\infty} x_r < \infty$. إذاً $\sum_{r=1}^{\infty} x_r y_r < \infty$

نظرية (٥. ١. ٧) : (المتباينة المثلثية)

نفرض المتتابعتان اللانهائيتان $(x_r)\ ,\ (y_r)\ ;\forall r=1,2,3,\ldots$. إذاً

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}(x_r+y_r)^2}\le\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}x_r^2}+\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}y_r^2}$$

البرهان :

بما أن $(x_r+y_r)^2=x_r^2+2x_r\,y_r+y_r^2\ ;\forall r=1,2,3,\ldots$. إذاً

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}(x_r+y_r)^2&=\sum_{r=1}^{\infty}x_r^2+2\sum_{r=1}^{\infty}x_r\,y_r+\sum_{r=1}^{\infty}y_r^2\\&\le\sum_{r=1}^{\infty}x_r^2+2\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}x_r^2}\ \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}y_r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}y_r^2\\&=\left(\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}x_r^2}+\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}y_r^2}\right)^2\end{aligned}$$

إذاً

$$\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}(x_r+y_r)^2}\le\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}x_r^2}+\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}y_r^2}$$

والآن نتابع بقية الأمثلة على الفضاء المتري .

أمثلة (٥. ١. ٨) :

(i) نفرض $R^n=\underbrace{R\times R\times\ldots\times R}_{n-times}$ نعرف الدالة $d:R^n\times R^n\to R$

على النحو التالي : $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

حيث $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ ,\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$

برهن أن (R^n,d) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

تترك كتمرين للقارئ .

(ii) نعرف الدالة $d: R^n \times R^n \to R$ كما يلي :

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$$

حيث $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ ,\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in R^n$

برهن أن (R^n,d) تمثل فضاء متري ؟

<u>الحل :</u>

(D_1)

$$\because\ |x_i-y_i|\ge 0\ ,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow\ |x_i-y_i|^2\ge 0\ ,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\ge 0\ \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow d(x,y)\ge 0$$

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\ |x_i-y_i|\ge 0\ ,\ i=1,2,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow\ x_i=y_i\,|,\ i=1,2,\dots,n\ \Leftrightarrow\ x=y$$

(D_2)

$$|x_i-y_i|=|y_i-x_i|\ ,\ \forall\ i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2}$$

$$\Rightarrow d(x,y)=d(y,x)$$

إذا كانت $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ فإن : (D_3)

$$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i|$$
$$\leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \quad ;\forall i=1,2,3,\dots,n$$

وعليه فإن

$$|x_i - z_i|^2 \leq (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2 \quad ;\forall i=1,2,\dots,n$$

$$\therefore \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|)^2}$$

(وذلك باستخدام المتباينة المثلثية)

إذاً $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

وعليه فإن (R^n, d) تمثل فضاء متري ويعرف هذا الفضاء بالفضاء الإقليدي ذات البعد (النوني) .

(iii) نفرض F مجموعة جميع المتتابعات اللانهائية $(x)=(x_n)$ حيث $x_n \in R$ لجميع قيم $n=1,2,\dots$ نعرف $d: F \times F \to R$ على النحو التالي :

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

حيث $x=(x_1,x_2,\dots), \; y=(y_1,y_2,\dots) \in F$

برهن أن (F,d) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

هذا الفضاء يسمى فضاء فريشية (**Frechet space**).

وتترك للقارئ كتمرين .

تعريف (٥. ١. ٩) :

يقال للفضاء المتري (E,d) أنه محدود (bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث $0 \leq d(x,y) \leq k \; ; \forall \; x,y \in E$ خلاف ذلك يقال أن (E,d) فضاء متري غير محدود (unbounded) .

مثال (٥. ١. ١٠) :

نفرض (X,d) فضاء متري ، نعرف الدالة $\rho : X \times X \to R$ على النحو التالي:

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \; ; \forall \; x,y \in X$$

أثبت أن (X,ρ) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

$$(D_1) \because \; d(x,y) \geq 0$$
$$\Rightarrow 1+d(x,y) \geq 1$$
$$\Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0 \Rightarrow \rho(x,y) \geq 0$$
$$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$(D_2) \; \rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \rho(y,x)$$
$$(D_3) \; \rho(x,y)+\rho(y,z) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$
$$\geq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)+d(x,y)}$$

إذاً

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{d(x,y)+d(y,z)}+1}$$

$$\geq \frac{1}{\dfrac{1}{d(x,z)}+1}=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}=\rho(x,z)$$

إذاً (X,ρ) فضاء متري.

من الواضح أن $\rho(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}<1 \;;\; \forall\ x,y\in X$

وعليه فإن $0\leq \rho(x,y)<1 \;;\; \forall\ x,y\in X$

إذاً (X,ρ) فضاء متري محدود.

مثال (٥. ١. ١١) :

نفرض (X,d) فضاء متري ، نعرف الدالة $\rho: X\times X\to R$ على النحو التالي :

$$\rho(x,y)=\frac{m\,d(x,y)}{1+d(x,y)} \;;\; \forall\ x,y\in X \;;\; m>0$$

اثبت أن (X,ρ) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

تترك كتمرين للقارئ .

مثال (٥. ١. ١٢) :

نفرض (X,d) فضاء متري ، نفرض الدالة $\rho: X\times X\to R$ ومعرفة كما يلي :

$$\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\} \;;\forall\ x,y\in X$$

إذاً (X, ρ) تمثل فضاء متري ؟

الحل :

$$(D_1) \because \rho(x,y)=1 \ or \ d(x,y)\geq 0 \Rightarrow \rho(x,y)\geq 0$$

$$\rho(x,y)=0 \Rightarrow \min\{1, d(x,y)\}=0$$

$$\Rightarrow d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$$

(D_2) بما أن $\rho(x,y)=\min\{1, d(x,y)\}$

إذاً يوجد حالتان هما :

الحالة الأولى : إذا كانت $\rho(x,y)=1$. إذاً

$$\min\{1, d(x,y)\}=1 \Rightarrow d(x,y)>1 \Rightarrow d(y,x)>1$$

$$\Rightarrow \min\{1, d(y,x)\}=1 \Rightarrow \rho(y,x)=1$$

$$\therefore \rho(x,y)=1=\rho(y,x)$$

الحالة الثانية : إذا كانت $\rho(x,y)=d(x,y)$. إذاً

$$\min\{1, d(x,y)\}=d(x,y) \Rightarrow d(x,y)<1 \Rightarrow d(y,x)<1$$

$$\Rightarrow \min\{1, d(y,x)\}=d(y,x)$$

$$\Rightarrow \rho(y,x)=d(y,x)$$

$$\therefore \rho(x,y)=d(x,y)=d(y,x)=\rho(y,x)$$

لاحظ أنه في كلتا الحالتين $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(D_3) من التعريف نجد أن : $\rho(x,y)=\min\{1, d(x,y)\} \leq 1$

وينشأ هنا حالتان هما :

الحالة الأولى :

إذا كانت إحدى المسافتين $\rho(x,y)$, $\rho(y,z)$ مساويا الواحد أو كليهما فإن الخاصية المثلثية $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$ محققة .

الحالة الثانية :

إذا كانت كلا المسافتين $\rho(x,y)$, $\rho(y,z)$ أقل من الواحد فنجد أن :

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=d(x,y)+d(y,z)$$
$$\geq d(x,z)\geq \min\{1,d(x,z)\}=\rho(x,z)$$

أى أن
$$\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$$

وحيث أنه من تعريف $\rho(x,y)$ نجد أن :

$$0\leq \rho(x,y)\leq 1\ ;\ \forall\ x,y\in X$$

إذاً $\rho(x,y)$ فضاء متري محدود .

تعريف (٥. ١. ١٣) :

نفرض أن X مجموعة غير خالية ، يقال أن الدالة $d:X\times X\to R$ دالة شبه مترية (**Pseudo metric**) معرفة على X إذا حققت :

$$(P_1):d(x,y)\geq 0\ and\ \ x=y\Rightarrow d(x,y)=0$$
$$(P_2):d(x,y)=d(y,x)$$
$$(P_3):\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

لجميع قيم $x,y,z\in X$.

الزوج (X,d) يسمى بالفضاء شبه المتري (**pseudo metric space**).

ملاحظة :

شرط (D_1) في الفضاء المتري يؤدي إلى الشرط (P_1) في التعريف السابق ، ولكن العكس غير صحيح على وجه العموم ولقد سبق وأن أخذنا المثال التالي :

مثال (٥. ١. ١٤) :

اعتبر الدالة $d:R\times R\to R$ والمعرف كما يلي :

$$d(x,y)=|x^2-y^2|\ ;\ \forall\ x,y\in R$$

واضـــح أن d دالة شبه مترية والعكس ليس صحيح لأنه على سبيل المثال إذا كانت $x=1\,,\,y=-1$ فإن $x\neq y$ ولكن $d(x,y)=0$ وعليه فإن (R,d) هي فضاء شبه متري .

مثال (٥. ١. ١٥) :

نفـــرض مجموعـــة الأعداد الحقيقية R نعرف $d:R\times R\to R$ على النحو التالي :

$$d(x,y)=\begin{cases} x-y & ; x\geq y \\ 1 & ; x<y \end{cases}$$

بين ما إذا كان d دالة مترية أم لا ؟

الحل : d ليست دالة مترية وذلك لأن :

$$d(3,6)=1 \qquad (3<6 \text{ لأن})$$

بينما

$$d(6,3)=6-3=3 \qquad (6>3 \text{ لأن})$$

وعلى ضوء ذلك نجد أن $d(3,6)\neq d(6,3)$ ، إذاً d ليست دالة مترية .

بند (٢) : **المسافة بين مجموعتين** : **(Distance between two sets)**

نفـــرض (X,d) فضاء متري ، ونفرض أن A,B مجموعتان جزئيتان غير خاليتان من X .

تعريف (٥. ٢. ١) :

المسافة بين المجموعتان A,B والتي يرمز لها بالرمز $D(A,B)$ تعرف كما يلي:

$$D(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A, y\in B\}$$

(أي أنهـــا أكـــبر حد سفلي للمسافات الناتجة من بعد نقاط المجموعة A عن نقاط المجموعة B).

مثال (٥. ٢. ٢) :

إذا كان لدينا الفضاء المتري (R,d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x,y)=|x-y| \; ; \; x,y\in R$$

وكانت

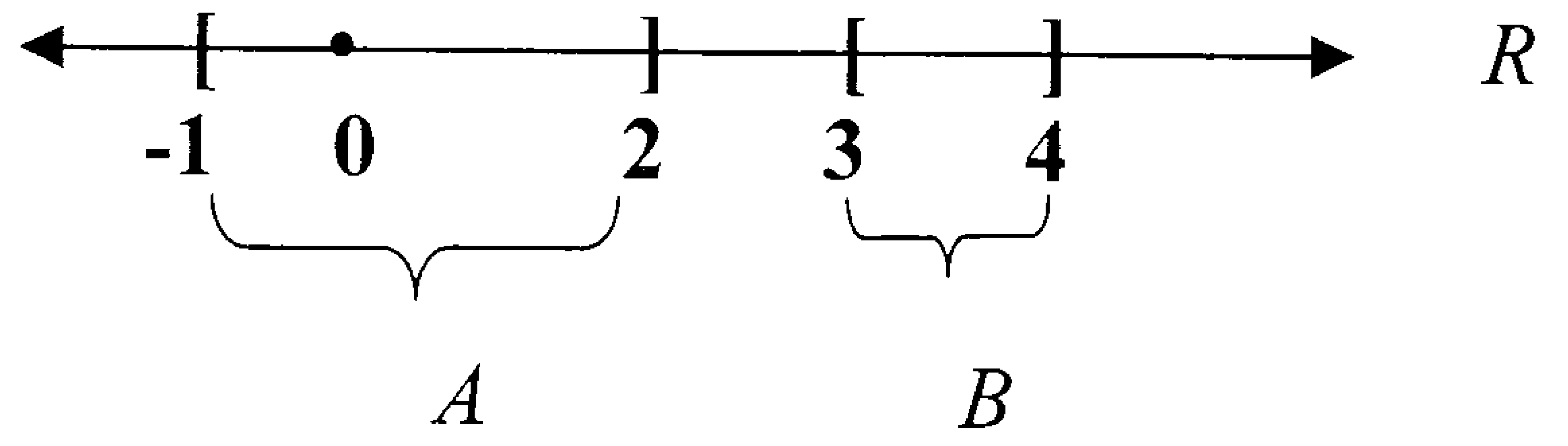
$$A=[-1,2]\;,\; B=[3,4]\;,\; C=[1,3]$$

أوجد

$$(i)\;\; D(A,B) \qquad (ii)\;\; D(A,C)$$

الحل :

(i) لإيجاد $D(A,B)$ نرسم المجموعتين A,B على خط الأعداد كما يلي :

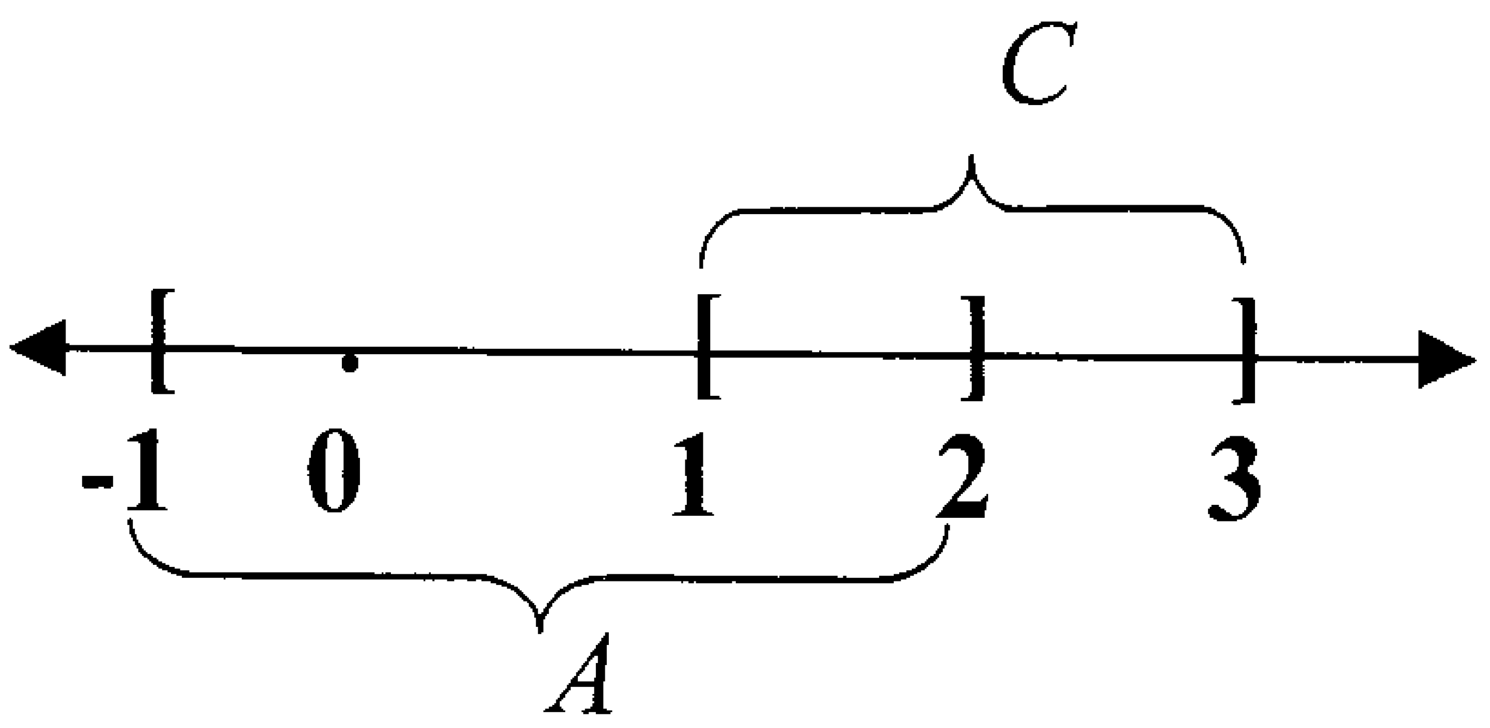


واضح أن $A \cap B = \phi$ ونجد أنه لأى $a \in A \ , \ b \in B$:

$$1 < d(a,b) \leq d(4,-1) = |4-(-1)| = 5$$

$$D(A,B) = \inf \{x : x \in [1,5]\} = 1$$

(ii) لإيجاد $D(A,C)$ نرسم المجموعتين A,C كما يلي :



نجد أن $A \cap C = [1,2]$ وواضح من الشكل أنه لأى $a \in A \ , \ c \in C$ فإن

$$0 \leq d(a,c) \leq d(3,-1) = |3-(-1)| 4$$

$$\therefore \ D(A,C) = \inf \{x : x \in [0,4]\} = 0$$

تعريف (٥ . ٢ . ٣) :

إذا كانت $A = \{x\}$ فإن $D(\{x\},B)$ تعرف كما يلي :

$$D(\{x\},B) = \inf \{d(x,y) : y \in B\}$$

وهي عبارة عن أكبر حد سفلي للمسافات الناتجة من بعد " x " عن نقاط B .

وهذه الصيغة تعطى المسافة بين نقطة ومجموعة ، أى $d(x,B)$.

مثال (٥ . ٢ . ٤) :

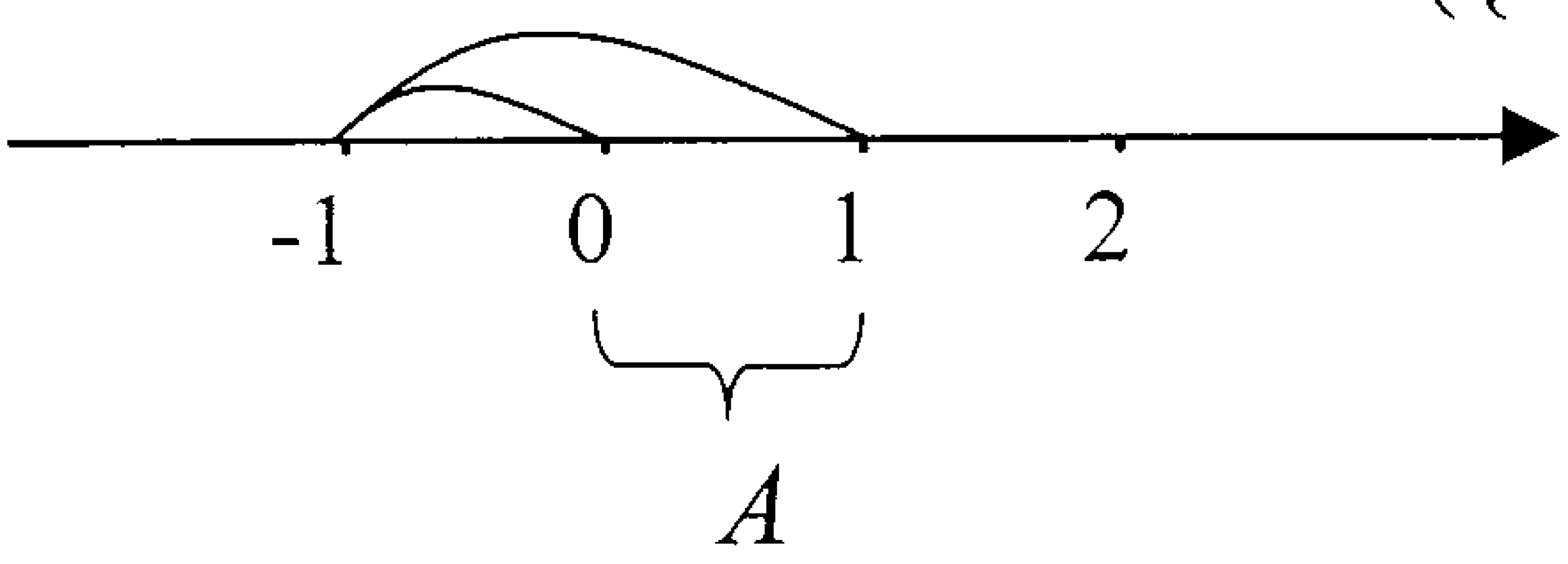
لتكن $X=\{-1,0,1,2\}$ وأن d راسم المسافة $d:X\times X\to R$ الطبيعية والتي تحقق شروط الراسم المتري ، وكانت $A=\{0,1\}$. أوجد

$$(i)\ \ D(\{-1\},A) \qquad (ii)\ D(\{0\},A)$$

الحل :

(i) لإيجاد $D(\{-1\},A)$:

من الشكل



نجد أن

$$(a)\ d(-1,0)=|-1-0|=1 \Rightarrow D(\{-1\},A)=\inf\{1,2\}=1$$
$$(b)\ d(-1,1)=|-1-1|=2 \Rightarrow D(\{-1\},A)=\inf\{1,2\}=1$$

(ii) لإيجاد $D(\{0\},A)$:

$$(a)\ d(0,0)=0 \quad \Rightarrow D(\{0\},A)=\inf\{0,1\}=0$$
$$(b)\ d(0,1)=1 \quad \Rightarrow D(\{0\},A)=\inf\{0,1\}=0$$

من (i) , (ii) نحصل علي :

$$D(\{x\},A)=\begin{cases}0 & ;\ x\in A\\ 1 & ;\ x\notin A\end{cases}$$

مثال (٥ . ٢ . ٥) :

ليكن $d:R\times R\to R$ معرفة كما يلي :

$$d(x,y)=|x-y| \quad ;\ \forall\ x,y\in R$$

وكانت $A=[1,2]$ أوجد :

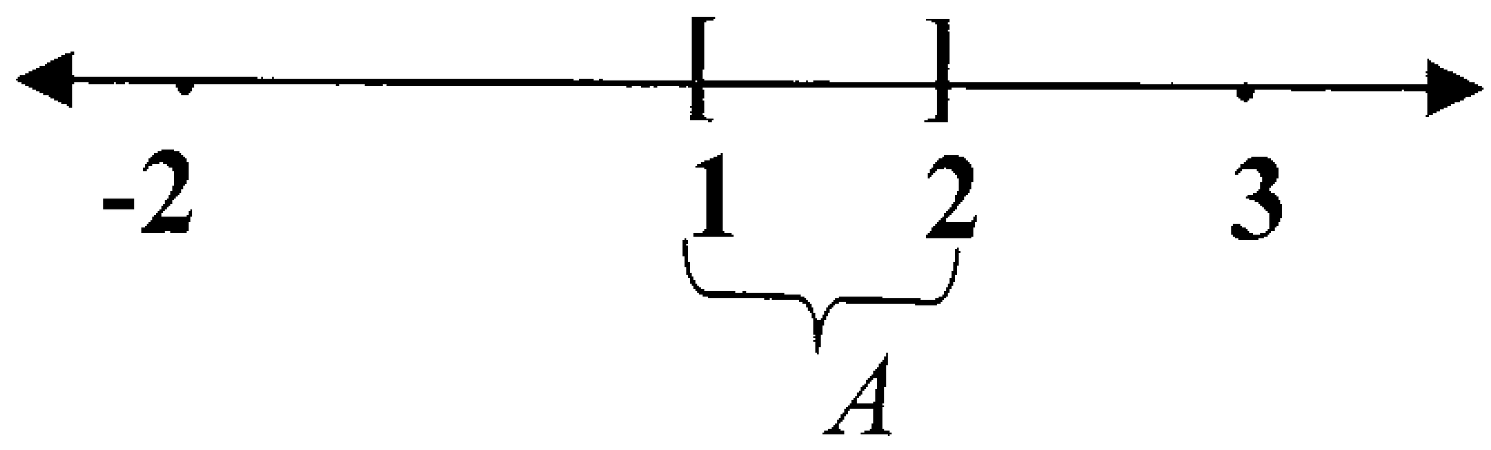
$$(i)\ \ D(\{3\},A) \qquad (ii)\ D(\{2\},A) \qquad (iii)\ D(\{-2\},A)$$

الحل :

(i) لإيجاد $D(\{3\},A)$:

المطلوب إيجاد المسافة بين العنصر "3" وكل عنصر من عناصر A ولكن من الواضـــح أن A مجموعـــة غير منتهية لهذا لابد من اتباع أسلوب آخر وهو إتباع أسلوب الرسم .

والشكل التالي يوضح موقع "3" والمجموعة A على خط الأعداد :



واضح من الرسم أن : $d(3,1)=|3-1|=2 \quad , \quad d(3,2)=|3-2|=1$

وأنه لكل $x\in A$ تكون المسافة $d(3,x)$ تحقق المتباينة :

$$1\leq d(3,x)\leq 2$$

$$\therefore\ D(\{3\},A)=\inf\{d(3,x):x\in A\}=\inf\{[1,2]\}=1$$

(ii) لإيجاد $D(\{2\},A)$: نجد أن

$$d(2,2)=0 \quad , \quad d(2,1)=|2-1|=1$$

إذاً $0\leq d(2,x)\leq 1$ لجميع قيم $x\in A$

إذاً $D(\{2\},A)=\{\inf[0,1]\}=0$

(iii) لإيجاد $D(\{-1\},A)$: نجد أن

$$d(-2,1)=|-2-1|=3 \quad , \quad d(-2,2)=|-2-2|=4$$

إذاً $3\leq d(-2,x)\leq 4 \ ; \ \forall\ x\in A$

وعليه فإن $D(\{-2\},A)=\inf\{[3,4]\}=3$

<u>تعريف (٥ . ٢ . ٦) :</u>

قطـــر (diameter) المجموعة A ويرمز له بالرمز $\delta(A)$ يعرف على النحو التالي :

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}$$

وهذا يعني أنه أدنى حد علوي (lower upper bound) للمسافات بين نقاط A .

مثال (٥. ٢. ٧) :

إذا كان $d:R\times R\rightarrow R$ معرفة كما يلي :

$$d(x,y)=|x-y| \quad ; \forall\ x,y\in R$$

وكانت $A=[3,7]$ فأوجد $\delta(A)$.

الحل :

واضح أن $0\leq d(x,y)\leq d(3,7)=|7-3|=4 \quad ;\forall\ x,y\in A$

إذاً $\delta(A)=\sup\{[0,4]\}=4$

مثال (٥. ٢. ٨) :

نفرض $X=\{3,4,5,6,7,9\}$ ونفرض $d:R\times R\rightarrow R$ معرفة

كما يلي : $d(x,y)=\begin{cases}0 & ;x=y\\ 1 & ;x\neq y\end{cases}$ لجميع قيم $x,y\in X$.

وكان لدينا المجموعتين $A=\{4,6\}$, $B=\{5\}$ فأوجد

$$(i)\ \ \delta(A) \qquad (ii)\ \ \delta(B)$$

الحل :

(i) لإيجـــاد $\delta(A)$: نجد أن المسافة بين جميع عناصر A تصاغ على النحو التالي :

	4	6
4	0	1
6	1	0

واضح أن $\delta(A)=1$.

(ii) لإيجاد $\delta(B)$: نجد أن المسافة بين عناصر B هي صفر ، إذاً

$$\delta(A)=\sup(\{0\})=0$$

تعريف (٥. ٢. ٩) :

إذا كانت $\delta(A)<\infty$ سميت المجموعة A بمجموعة محدودة **(bounded)**

أما إذا كان $\delta(A)=\infty$ سميت المجموعة A غير محدودة **(unbounded)**.

مثال (٥. ٢. ١٠) :

نفرض $d:R\times R\to R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x,y)=|x-y| \quad ; \forall\; x,y\in R$$

ولتكن $(i)\; A=[3,5[\qquad (ii)\; B=\{0,1,2,3,\dots\}$

نجد أن $\delta(A)=\sup\{[0,5-3]\}=\sup\{[0,2]\}=2<\infty$

إذاً A محدودة . ونجد أن $\delta(B)=\sup\{1,2,3,\dots\}=\infty$

إذاً B غير محدودة ، B هى مجموعة الأعداد الطبيعية .

نظرية (٥. ٢. ١١) :

نفرض (X,d) فضاء متري ، ونفرض A , B مجموعتان جزئيتان غير خاليتين من X . إذاً

$(i)\; A\subseteq B \;\Rightarrow\; \delta(A)\le\delta(B)$

$(ii)\; A\cap B\neq\phi \;\Rightarrow\; D(A,B)=0$

$(iii)\; \delta(A\cup B)\le\delta(A)+D(A,B)+\delta(B)$

$(iv)\; A\cap B\neq\phi \;\Rightarrow\; \delta(A\cup B)\le\delta(A)+\delta(B)$

البرهان :

(i) واضحة من التعريف حيث أن :

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}$$
$$\le\sup\{d(x,y): x,y\in B\}=\delta(B)$$

(ii) $D(A,B)=\inf\{d(a,b):\; a\in A\;,\; b\in B\}$

وحيث أن $A\cap B\neq\phi$ إذاً يوجد عنصر $x\in A\cap B$ وبالتالي فإن

$d(x,x)=0$ ، وعليه فإن الصفر أحد عناصر المجموعة

$\{d(a,b):\ a\in A\ ,\ b\in B\}$. إذاً $D(A,B)=0$.

(iii) نفرض أن a,b نقطتين اختياريتين من A,B على التوالي وأن x,y أي نقطتين من $A\bigcup B$ سوف نتدارس الحالات الثلاثة التالية :

الحالة الأولى : إذا كانت $x,y\in A$:

واضح أن $d(x,y)\le\delta(A)$ (وذلك من التعريف $\delta(A)$)

الحالة الثانية : إذا كانت $x,y\in B$: فإن $d(x,y)\le\delta(B)$

الحالة الثالثة : إذا كانت $x\in A,\ y\in B$ فإن

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,a)+d(a,y) && (a\in A)\\ &\le d(x,a)+d(a,b)+d(b,y) && (b\in A)\\ &\le \delta(A)+d(a,b)+\delta(B) && (*) \end{aligned}$$

بالمثل إذا كان $x\in B,\ y\in A$ فإن $(*)$ ما زالت صحيحة ، وعليه فهي صحيحة في جميع الحالات وحيث أن a,b نقاط اختيارية ، إذاً

$$\delta(A\cup B)\le\delta(A)+D(A,B)+\delta(B)$$

(iv) تأتي مباشرةً من $(ii),(iii)$.

ملحوظة :

عكس الجملة (ii) ليس صحيحا على وجه العموم ، المثال التالي يوضح ذلك .

مثال(٥. ٢. ١٢) :

نفرض $d:R\times R\to R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x,y)=|x-y|\quad ;\ \forall\ x,y\in R$$

ونفرض $A=[1,2[\ \ ,\ \ B=(2,3]$. واضح أن $A\cap B=\phi$ بينما

$$\begin{aligned} D(A,B) &= \inf\{d(a,b):\ a\in A\ ,\ b\in B\}\\ &= \inf\{(0,2]\}=0 \end{aligned}$$

ومن ثم فإن $A\cap B=\phi$ ولكن $D(A,B)=0$.

مثال (٥. ٢. ١٣) :

نفرض A مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المترى (X,d)، لأي $x \in X$ فإن :

(i) إذا كان $x \in A$ فإن $D(\{x\}, A) = 0$

(ii) إذا كانت A مجموعة منتهيه فإن $\delta(A) < \infty$

البرهان : تترك للقارئ كتمرين .

مثال (٥. ٢. ١٤) :

نفرض $d : R \times R \to R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x,y) = |x-y| \quad ; \forall\ x,y \in R$$

نفرض المجموعة $A = [1,2)$ ونأخذ $x = 2 \in R$ من الواضح أن $2 \notin A$، ولكن

$$D(\{x\}, A) = \inf\{d(2,a) : a \in A\} = \inf\{(0,1]\} = 0$$

نستخلص مما سبق أن :

$$D(\{x\}, A) = 0 \Rightarrow x \in A \quad (\text{على وجه العموم})$$

مثال (٥. ٢. ١٥) :

نفرض $d : R \times R \to R$ ومعرفة كما يلي :

$$d(x,y) = |x-y| \quad ; \forall\ x,y \in R$$

نفرض $A = [0,1]$ هذه المجموعة غير منتهية ونجد أن $\delta(A) = \sup\{[0,1]\} = 1 < \infty$ إذاً المجموعة محدودة .

بند (٣) : المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري :

(Open sets on Metric space)

تعريف (٥. ٣. ١) :

نفرض الفضاء المتري (X,d) لأي $x_o \in X$ ، r عدد حقيقي موجب $(r > 0)$. نعرف المجموعة الجزئية التالية :

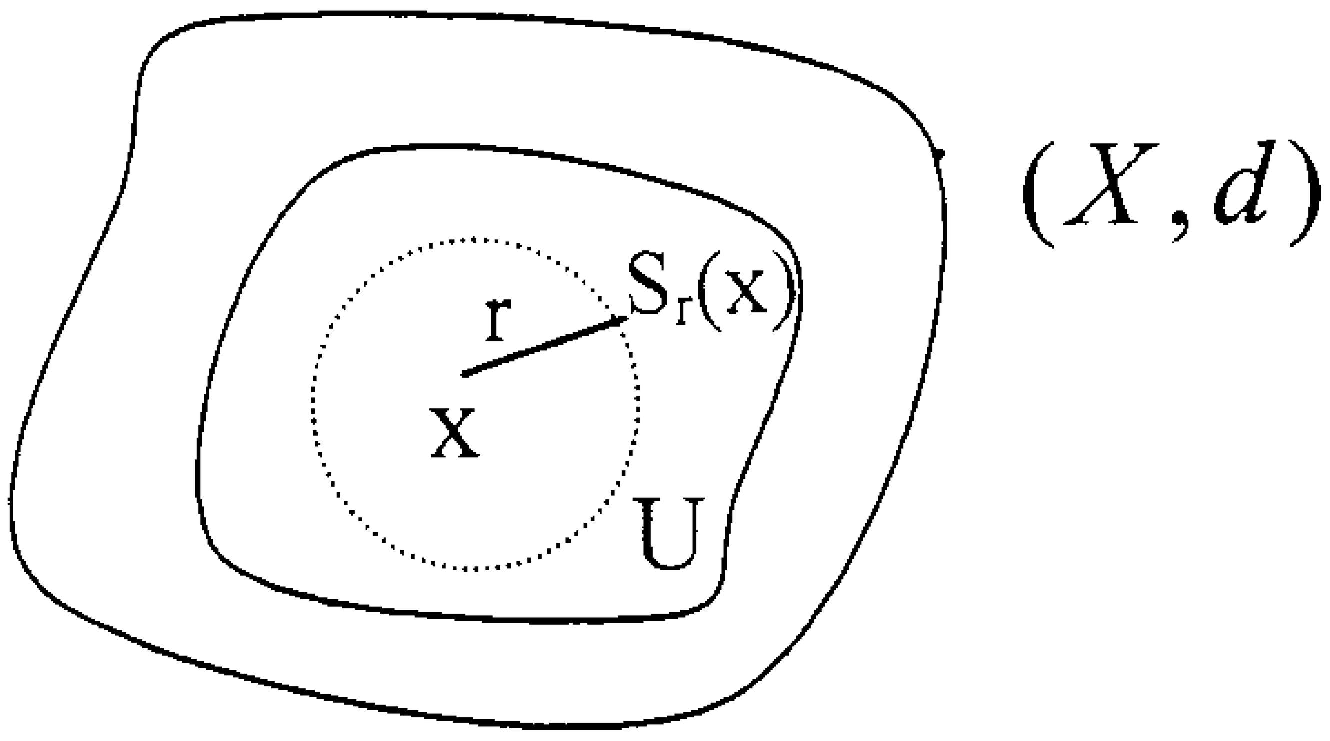
$$S(x_o, r) = S_r(x_o) = \{x \in X : d(x, x_o) < r,\ r > 0\}$$

المجموعة الجزئية $S_r(x_o)$ من X تسمى كرة مفتوحة (open sphere) لها نصف قطر r ، ومركز x_o . من الواضح أن $S_r(x_o) \neq \phi$ وذلك لأنها تحتوي على الأقل على نقطة مركزها x_o.

تعريف (٥. ٣. ٢) :

تسمى المجموعة الجزئية الغير الخالية U من الفضاء المتري (X, d) بالمجموعة المفتوحة (open set) إذا تحقق ما يلي :

$$\text{لكل نقطة } x \in U \text{ يوجد } r > 0 \text{ بحيث } S_r(x_o) \subseteq U$$



ملحوظة هامة :

واضـــح أن تعـــريف المجموعة المفتوحة يعتمد على وجود كرات مفتوحة التي بدورها تعتمد على الدالة المترية d المعرفه على X ، فهذا يعني ضمنياً أن المجموعة المفـــتوحة تعـــتمد عـــلى شـــكل الدالـــة المـــترية d وبالتالي يطلق عليها دائماً (d– open set) أي المجموعة المفتوحة منسوبة إلى d .

سوف نستخدم الرمز $\mathcal{G}$ للتعبير عن مجموعة جميع المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري (X, d) .

مثال (٥. ٣. ٣) :

(i) نفرض أن (R, d) الفضاء المتري العادي حيث أن

$$d(x, y) = |x - y| \ ; \ \forall x, y \in R$$

أوجد $S(p, r)$ ومن ثم أوجد $S(0,2)$ ، $S(0,1)$.

الحل :

$$S(p,r)=S_r(p)=\{x\in R: d(x,p)< r\}$$
$$=\{x\in R: |x-p| <r\}$$
$$=\{x\in R : -r < x-p < r\}$$
$$=\{x\in R : P-r < x < p+r\}$$

ومن هذا يتضح أن عائلة الكرات المفتوحة في الفضاء المترى العادي هى كل الفترات المفتوحة. ونجد أن $S(0,1)=(-1,1)$; $S(0,2)=(-2,2)$

(ii) نفرض أن (R,d) الفضاء المتري العادي حيث أن :

$$d(x,y)=|x-y| ; \forall x,y\in R$$

نفرض $x_o=1$ ، $r=\frac{1}{2}$ ، أوجد $S(1,\frac{1}{2})$.

الحل :

$$S(1,\tfrac{1}{2})=S_{\frac{1}{2}}(1)=\{x\in R: d(x,1)<\tfrac{1}{2}\}$$
$$=\{x\in R: |x-1| <\tfrac{1}{2}\}$$
$$=\{x\in R: 1-\tfrac{1}{2}< x <1+\tfrac{1}{2}\}= (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})$$

إذاً $S_{\frac{1}{2}}(1)=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ والتي هي فترة مفتوحة.

وعموماً عائلة الكرات المفتوحة في الفضاء المتري العادي هى عائلة الفترات المفتوحة.

مثال (٥. ٣. ٤) :

نفرض الفضاء المتري (R^2,d) حيث d معرفة كما يلي :

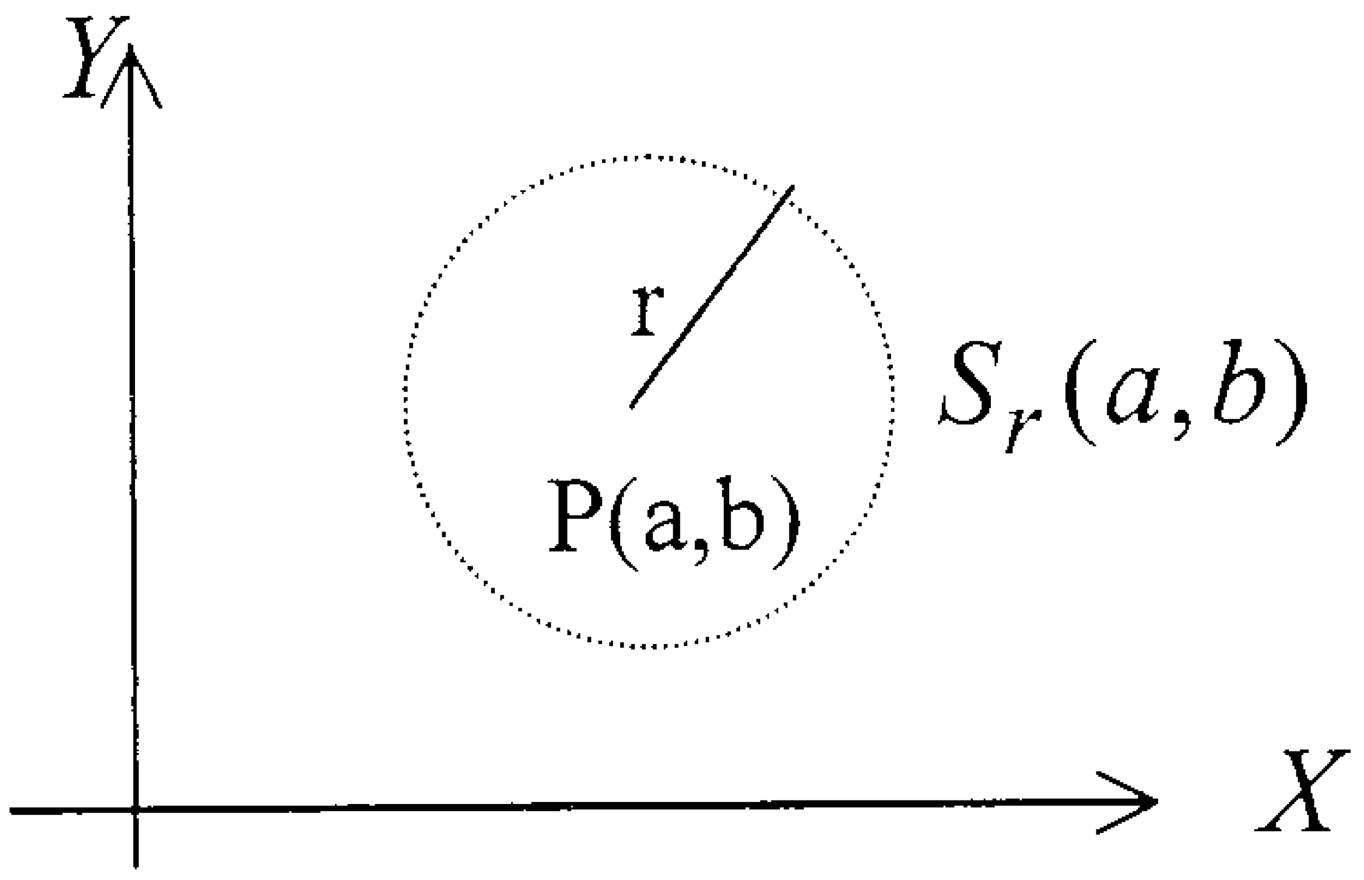
$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$
$$;\forall \; x=(x_1,x_2) , \; y=(y_1,y_2) \in R^2$$

نفرض النقطة $p=(a,b)$ ، $r=1$. أوجد $S(p,r)$.

<u>الحل :</u> نجد أن

$$S(p,r)=S_r(p)=\{q=(x,y)\in R^2 : d(q,p)<r\}$$
$$=\{q=(x,y)\in R^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

وهى قرص مفتوح نصف قطرة r ومركزه $p=(a,b)$.وتعطى بالشكل التالي :



ونجد أن $S(p,1)$ تمثل قرص مفتوح نصف قطرة الوحدة ومركزه $p=(a,b)$.

<u>مثال (٥. ٣. ٥) :</u>

نفرض الفضاء المتري (R^2,d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(p,q)=|x-y_1|+|y-y_1|$$
$$;\ \forall\ q=(x,y)\ ,\ p=(x_1,y_1)\in R^2$$

أوجد $S(p,r)$ ومن ثم أوجد $S((0,0),1)$.

<u>الحل :</u> نجد أن

$$S(p,r)=\{q\in R^2 : d(p,q)<r\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2 : |x-x_1|+|y-y_1|<r\}$$

وبالتالى إذا كانت $r=1$ ، $p=(0,0)$ فإن

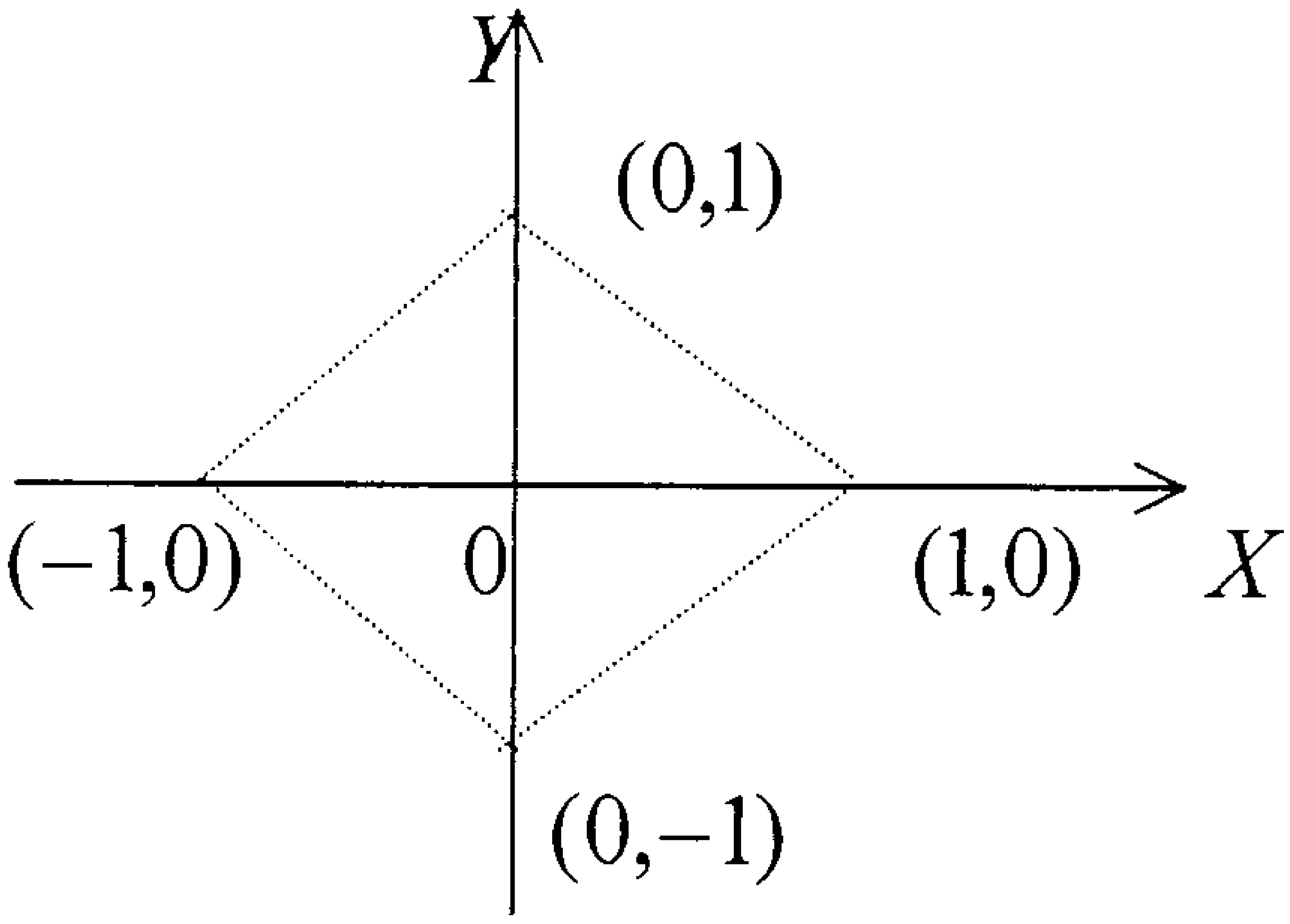
$$S((0,0),r)=\{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|<1\}$$

عندما يكون $x\geq 0$ ، $y\geq 0$ فإن $|x|+|y|=x+y$ وتكون

$$S((0,0),r)=\{(x,y)\in R^2:\ x\ +\ y\ <1\}$$

وهـــى تمـــثل مجموعة كل النقاط (x,y) فى المستوى المحدد بالمستقيمين $x=0$ ، $y=0$ بحيث أن $x+y<1$.

الشـــكل التالى يوضح أن المجموعة $S((0,0),1)$ هى مجموعة كل النقاط التى تقع داخـــل المـــربع الذى مركزة نقطة الأصل وطول ضلعة $\sqrt{2}$ وقطراه ينطبقان على محورى الإحداثيات.



مثال (٥ . ٣ . ٦) :

نفرض الفضاء المتري (R^2,d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(p_1,p_2)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$$

$$;\ \forall\ p_1=(x_1,y_1)\ ,\ p_2=(x_2,y_2)\in R^2$$

نفرض النقطة $p_o=(0,0)$ ، $r=1$ أوجد $S(p_o,1)$.

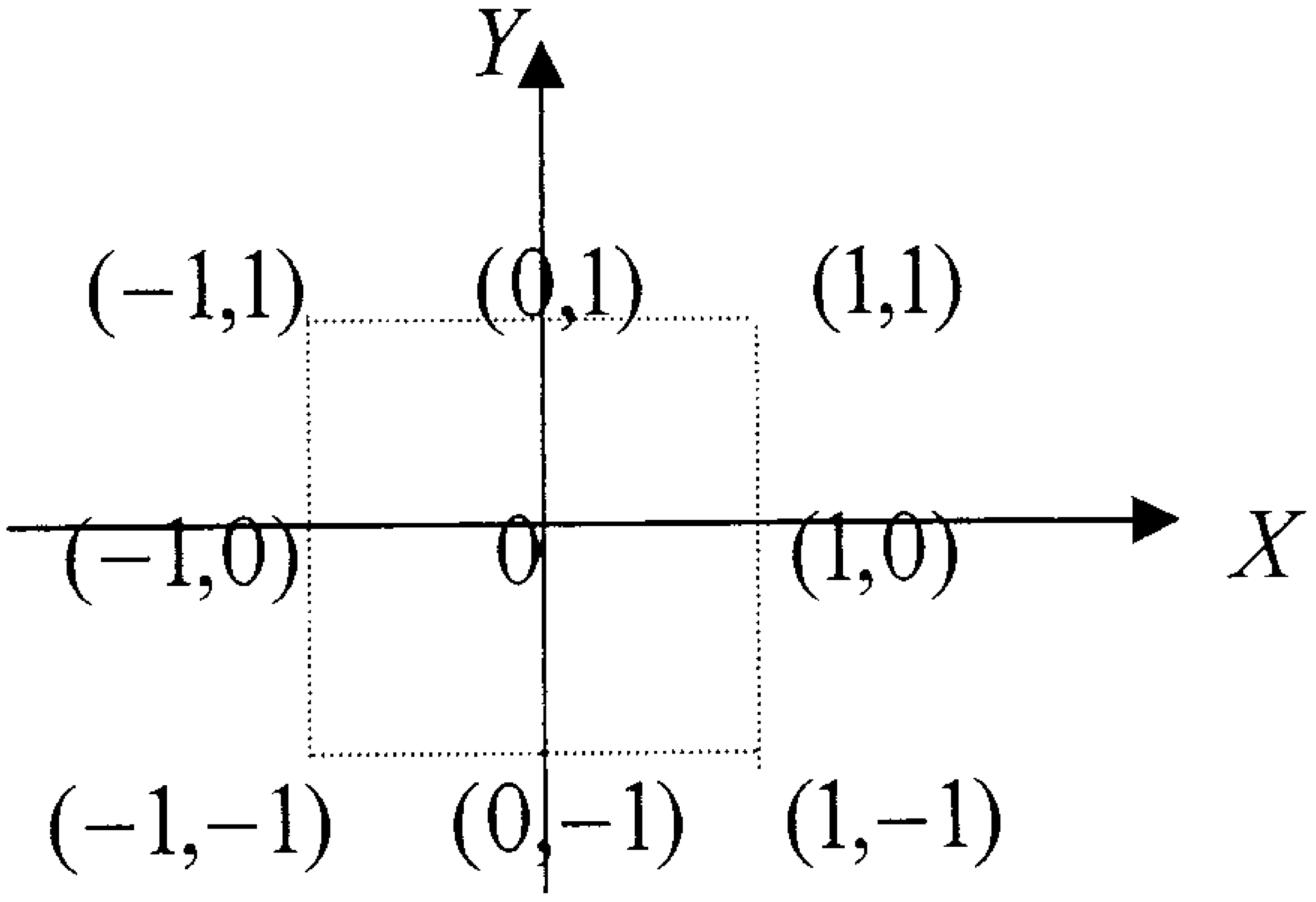
الحل :

نجد أن $S(p_o,1)=S_1(p_o)=\{p\in R^2:d(p,p_o)<1\}$

$$=\{(x,y)\in R^2:\max(|x|,|y|)<1\}$$

والشكل التالي يوضح هذه المجموعة.

ونجد أن المجموعة $S(p_o,1)$ هى مجموعة كل النقاط التى تقع داخل المربع الذى مركزة نقطة الأصل وطول ضلعة الوحدة.



<u>مثال (٥. ٣. ٧) :</u>

نفرض (X,d) هي الفضاء المتري المتقطع. حيث

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & ;x\neq y\\ 0 & ;x=y\end{cases} \quad ;\ \forall\ x,y\in R$$

إذا كانت $x_o\in X$ ، $r>0$ فإن :

$$S(x_o,r)=S_r(x_o)=\{x\in X:\ d(x,x_o)<r\}$$

وندرس هنا حالتان هما :

<u>الحالة الأولى :</u> إذا كانت $0<r\leq 1$ فإن :

$$S_r(x_o)=\{x\in X:d_o(x,x_o)<r\leq 1\}=\{x_o\}$$

ولتوضيح ذلك نأخذ مثلا المجموعة $X=\{1,2,3,4,5,6\}$. إذاً

$$S(3,0.2)=\{x\in X:d_o(x,3)<0.4\}$$
$$=\{x\in X:d_o(x,3)=0\}=\{3\}$$
$$S(2,1)=\{x\in X:d_o(x,2)<1\}$$
$$=\{x\in X:d_o(x,2)=0\}=\{2\}$$

الحالة الثانية : إذا كانت $r>1$ فإن :

$$S_r(x_o)=\{x\in X:d_o(x,x_o)<r\} =X$$

لأنه لا توجد أي نقطة في X بحيث يكون بعدها عن النقطة x أكبر من الواحد ، إذاً يوجد كرة مفتوحة وحيدة نصف قطرها واحد هي X نفسها .

مثال (٥. ٣. ٨) :

نفرض (R,d) الفضاء المتري العادي ، نفرض $U=(0,1)$ ، إذاً U مجموعة مفتوحة لأنه لأي نقطة في U يمكن إيجاد فترة مفتوحة نصف قطرها ε مثلا بحيث أن : $x\in(x-\varepsilon ,x+\varepsilon)\subseteq U \ ;\forall\, x\in U$

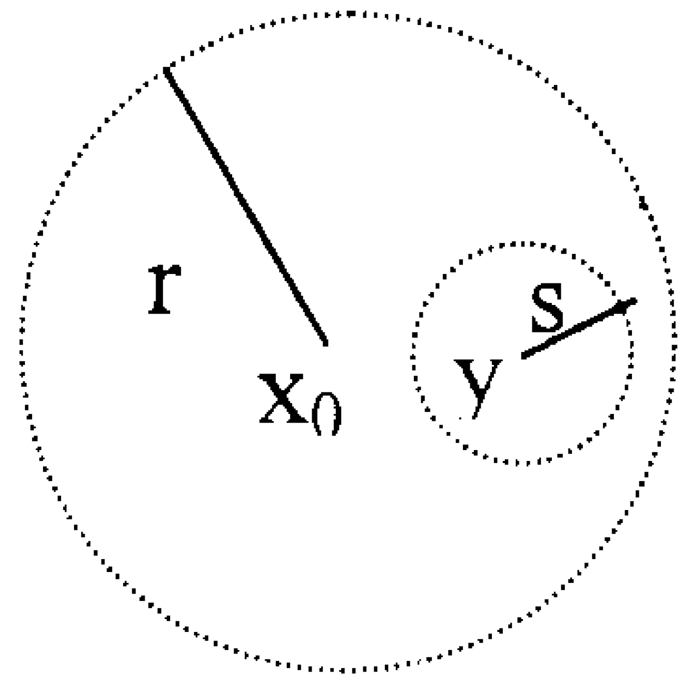
مثال (٥. ٣. ٩) :

نفرض (R,d) الفضاء المتري العادي، ونفرض المجموعة $U=\{x\in R : 0\leq x<1\}$. المجموعة U ليست مفتوحة لأنه من المستحيل إيجاد فترة مفتوحة تحتوي الصفر وفي نفس الوقت تقع داخل U أو تكون مجموعة جزئية من U . ونفس الطريقة يمكن إثبات أن الفترة : $\{x\in R: 0<x<1\}$ مجموعة ليست مفتوحة من R.

نظرية (٥. ٣. ١٠) :

الكرة المفتوحة $S_o(x_o)$ والتي مركزها x_o ونصف قطرها r تمثل مجموعة مفتوحة .

البرهان :



النقطة x_o هي مركز الكرة المفتوحة $S_o(x_o)$ والتي مركزها نقطة الأصل ، نأخذ النقطة $y\in S_o(x_o)$ سوف نحاول إيجاد عدد $s>0$ بحيث أن

$$S_s(y)=S(y,s)\subseteq S_r(x_o)=S(x_o,r)$$

نفرض $s=r-d(x_o,r)$ بما أن $y\in S_r(x_o)$ إذاً $d(x_o,y)<r$ إذاً

$s>0$ ، نفــرض النقطة $z\in S_s(x_o)$ إذاً $d(y,z)<s$ وسوف نحاول فيما يلي إثبات أن $z\in S_r(x_o)$ باستخدام المتباينة المثلثية نجد أن :

$$d(x_o,z)\le d(x_o,y)+d(y,z)< d(x_o,y)+s<r$$

وهــذا يعــني أن $z\in S_r(x_o)$ وعلــيه فإن $S_s(y)\subseteq S_r(x_o)$ وحيث أن $y\in S_r(x_o)$ نقطة اختيارية ، إذاً لأي نقطة تقع في $S_r(x_o)$ يمكن إيجاد كرة مفتوحة تقع داخل $S_r(x_o)$. إذاً $S_r(x_o)$ مجموعة مفتوحة.

نظرية (٥. ٣. ١١) :

في الفضـــاء المتري (X,d) إذا كانت S_1,S_2 كرتان مفتوحتان فإنه لكل $p\in S_1\cap S_2$ توجد كرة مفتوحة S_p بحيث أن : $p\in S_p\subseteq S_1\cap S_2$

البرهان : تترك للقارئ كتمرين

نظرية (٥. ٣. ١٢) :

المجموعـــة الجزئية U من الفضاء المتري (X,d) تكون مفتوحة إذا فقط إذا كانت U هي اتحاد كرات مفتوحة.

البرهان :

نفرض أن U مجموعة مفتوحة ، إذا كانت $U=\phi$ فإنها تكون $U=\cup\phi$ هي اتحاد مجموعات مفتوحة ، أما إذا كانت $U\neq\phi$ ، نفرض $x\in U$ ، إذاً يوجد كرة مفتوحة $S_r(x)$ بحيث أن $S_r(x)\subset U$ والآن

$$U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in U}S_r(x)\subseteq U$$

وعليه فإن $U=\bigcup_{x\in U}S_r(x)$.

وهذا يعني أن U هي اتحاد كرات مفتوحة .

وعــلى العكــس بفرض أن U هي اتحاد مجموعات جزئية من الكرات المفتوحة ، وحيث أن الكرة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة وأن اتحاد أي عدد من المجموعات

المفتوحة يعطى مجموعة مفتوحة ، إذاً U تكون مجموعة مفتوحة .

مـــن النظرية السابقة نستطيع القول بأن عائلة كل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري تشكل أساس لتوبولوجى هذا التوبولوجى يسمى التوبولوجى المتري (metric topology) أو التوبولوجى المولد بواسطة الدالة المترية d ويرمز له بالرمز $\tau(d)$ ، كما أن $(X, \tau(d))$ يسمى بالفضاء التوبولوجى المتري.

والآن وبعد أن أدخلنا مفهوم المجموعات المفتوحة في الفضاء المترى سوف نركز الاهتمام على دراسة خواص تلك المجموعات. فإذا فرضنا الفضاء المتري (X, d) وكانت τ هى عائلة كل المجموعات المفتوحة الناتجة عن دالة المسافة d فإننا نحصل على النظرية التالية :

نظرية (٥. ٣. ١٣) :

ليكن (X, d) فضاء متري ، فإن :

(i) المجموعات X, ϕ مجموعات مفتوحة.

(ii) اتحاد أي عدد من المجموعات الجزئية المفتوحة تعطي مجموعة مفتوحة.

(iii) تقاطع عدد محدد من المجموعات المفتوحة تعطي مجموعة مفتوحة.

البرهان :

(i) لإثبات أن ϕ مجموعة مفتوحة فهذا يتطلب أن تكون كل نقطة من نقاط ϕ مركزا لكرة مفتوحة محتواه في ϕ وحيث أن ϕ خالية من العناصر فإن هذا المطلب محقق دوماً.

والآن المجموعـــة X مجموعة مفتوحة لأنه إذا كان $x \in X$ فإنه على سبيل المثال $S(x,1) \subset X$ حيث أن نصف قطرها الوحدة .

(ii) نفـــرض τ هـــي عائلة كل المجموعات المفتوحة ، ونفرض G_λ مجموعات جزئـــية مفتوحة من τ ، المراد إثبات أن $G = \cup G_\lambda$ مجموعة جزئية مفتوحة في τ ، بفـــرض أن $x \in G$ إذاً x تنـــتمي إلى إحدى المجموعات G_λ وذلك من

تعريف الاتحاد ، ولتكن مثلا G_{λ_o} أى أن $x\in G_{\lambda_o}$ وبما أن G_{λ_o} مجموعة مفتوحة ، إذاً يوجد كرة مفتوحة $S_r(x)$ مركزها x ونصف قطرها r بحيث $x\in S_r(x)\subseteq G_{\lambda_o}$ ولكن $G_{\lambda_o}\subseteq G$ إذاً $S_r(x)\subseteq G$ ، وبما أن x عنصر اختياري من المجموعة G وحيث أن $x\in S_r(x)\subseteq G$ ، إذاً G مجموعة مفتوحة في τ.

(iii) نفرض $G=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ حيث G_i مجموعات جزئية مفتوحة من τ نفرض $x\in G$ إذاً $x\in\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ، إذاً x تنتمي إلى جميع المجموعات الجزئية G_i وحيث أن هذه المجموعات الجزئية مفتوحة إذاً لجميع قيم $i=1,2,\dots,n$ يوجد كرة مفتوحة S_i بحيث أن $x\in S_i\subseteq G_i\ ;\forall i$ إذاً $x\in S=\bigcap_{i=1}^{n} S_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ وهذا يعني $x\in S\subseteq\bigcap_{i=1}^{n} G_i=G$ وحيث أن x نقطة اختيارية ، إذاً G مجموعة مفتوحة في τ. أى أن $(X,\tau(d))$ فضاء توبولوجي.

أمثلة (٥. ٣. ١٤) :

(i) نفرض (X,d) الفضاء المتري العادي، حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x,y)=|x-y|\ ;\ \forall\, x,y\in R$$

إذاً $S_r(x)=(x-r,x+r)$

وهي فترة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها r .

نعلم أن عائلة الفترات المفتوحة علي R هى أساس للتوبولوجى العادى $\mathcal{U}$ على R. وعلى هذا فإن الفضاء المتري العادى (R,d) يولد الفضاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U}(d))$. كذلك في الفضاء المتري (R^2,d) حيث أن مجموعة

الدوائـــر المفـــتوحة بواسطة دالة المسافة العادية على R^2 هى أساس للتوبولوجى العادى على R^2 فإن (R^2,d) يولد $(R^2,\mathcal{U}(d))$.

(ii) بفرض أن $X\neq\phi$ ، d هى دالة المسافة التافهة. لأى $p\in X$ ، $r=\frac{1}{2}$ فـــإن : $S(p,\frac{1}{2})=\{p\}$. أى أن $\{p\}$ كـــرة مفتوحة ومن ثم فإن كل مجموعة أحاديـــة العنصـــر هى مجموعة مفتوحة وبالتالى فإن أى مجموعة جزئية من X هى مجموعـــة مفتوحة. إذاً الدالة المترية التافهه تولد التوبولوجى المنفصل D على X .

إذاً $(X,\tau(d))$ هو الفضاء المنفصل.

نظرية (٥. ٣. ١٥) :

نفرض (X,d) فضاء متري ، نفرض المجموعة الجزئية $X\subset\{x_o\}$ من X ، إذاً $X-\{x_o\}$ مجموعة مفتوحة .

البرهان :

نفرض $x\in X-\{x_o\}$ ، للبرهنة على أن $X-\{x_o\}$ مجموعة مفتوحة ، يجـــب أن نبرهن على أنه لأي نقطة $x\in X$ يوجد كرة مفتوحة $S_r(x)$ مركزها x ونصـــف قطـــرها x بحيـــث $x\in S_r(x)\subseteq X-\{x_o\}$ نفـــرض $r=d(x,x_o)$، نفرض $x'\in S_r(x)$ ، إذاً $d(x,x')<r=d(x,x_o)$ وعليه فإن $x'\neq x_o$ وعليه فإن $S_r(x)\subseteq X-\{x_o\}$. إذاً $X-\{x_o\}$ هي مجموعة مفتوحة .

مثال (٥. ٣. ١٦) :

نفـــرض x_1,x_2 نقطـــتان منفصلتان في الفضاء المتري (X,d) ، برهن أنه يوجد كرتان مفتوحتان $S_r(x_1),S_r(x_2)$ بحيث أن :

$$S_r(x_1)\cap S_r(x_2)=\phi$$

البرهان :

نفـــرض $d(x_1,x_2)=2r$ ، ونفـــرض $S_r(x_1),S_r(x_2)$ كرتان لهما المركـــزان x_1 , x_2 عـــلى الترتيـــب ، نفـــرض عـــلى ســـبيل الاعـــتراض أن $x \in S_r(x_1) \cap S_r(x_2)$ نجد أن :

$$d(x_1,x_2) \leq d(x_1,x) + d(x,x_2) < r + r = 2r$$

إذاً $2r = d(x_1,x_2) < 2r$. وهـــذا يعـــني أن $r < r$ وهـــذا مستحيل الحدوث ، وعليه فإن $S_r(x_1) \cap S_r(x_2) = \phi$

تعريف (٥. ٣. ١٧) :

يقـــال أن دالـــتى المسافة d_1 , d_2 المعرفتين على المجموعة X متكافئتين إذا وفقط إذا ولدا التوبولوجى نفسة على X ويرمز لذلك بالرمز $d_1 \sim d_2$ أى أن:

$$d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow \tau(d_1) = \tau(d_2)$$

من السهل التحقق بأن خاصية التكافؤ هى علاقة تكافؤ لأن كل دالة تكافئ نفسها ومتماثلة وناقلة. بالتالى فإن جميع عناصر فصل التكافؤ الواحد تعطى نفس العائلة من المجموعات المفتوحة.

مثال (٥. ٣. ١٨) :

نفرض المجموعة غير الخالية X نعرف الدالتان التاليتان d_1 , d_2 على X :

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases} \quad ; \quad d_2(x,y) = \begin{cases} 2 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$$

هل $d_1 \sim d_2$ ؟

الحل :

عائله الكرات المفتوحة المولدة بواسطة الدالة المترية d_2 هى :

$$S_{d_2}(p,r) = \begin{cases} \{p\} & ; r \leq 2 \\ X & ; r > 2 \end{cases}$$

وهى نفس الكرات المفتوحة المولدة بواسطة الدالة المترية d_1 (الدالة التافهه) والتى هى أساس للتوبولوجى المنفصل على X ، $\tau(d_1)=D$

إذاً $\tau(d_1)=\tau(d_2)=D$. أى أن $d_1 \sim d_2$.

مثال (٥. ٣. ١٩) :

أثبت أنه لأى فضاء متري (X,d) فإن $d \sim d_1 \sim d_2$ حيث

$$d_1(x,y)=r\,d(x,y) \quad ; \; r>0 \,, \forall\, x,y\in X$$

$$d_2(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad ; \; \forall\, x,y\in X$$

الحل :

أولا : نثبت أن $d_1 \sim d$ من أجل ذلك نفرض أن $S_d(p,\varepsilon)$ ، $S_{d_1}(p,\delta)$ هى كرات مفتوحة بالنسبة إلى d ، d_1 ونثبت أن: $S_{d_1}(p,\delta)=S_d(p,\varepsilon)$

$$Let\ x\in S_d(p,\varepsilon) \Leftrightarrow d(p,x)<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow r\,d(p,x)=d_1(p,x)<\varepsilon\, r=\delta \quad ;\forall\, r>0$$

ومـــن ثم فإنه يوجد $\delta=\varepsilon\, r>0$ بحيث أن $x\in S_{d_1}(p,\delta)$ وبالتالى فإنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta=\varepsilon\, r>0$ بحيث أن $S_d(p,\varepsilon)=S_{d_1}(p,\delta)$

وبالتالى إذا كانت $A\in\tau(d)$ فإنه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $S_d(p,\varepsilon)\subseteq A$ (طبقاً لتعريف المجموعة المفتوحة). ومن ثم فإن $S_d(p,\varepsilon)=S_{d_1}(p,\delta)\subseteq A$ وهذا يؤدى إلى $A\in\tau(d_1)$ ومن ذلك نستنتج أن:

$$\tau(d)\subseteq\,\tau(d_1) \qquad \dots\dots\dots (*)$$

وبالمـــثل إذا كانـــت $U\in\tau(d_1)$ فإنـــه يوجـــد $\varepsilon>0$ بحيـــث أن $S_{d_1}(p,\varepsilon)\subseteq U$ ومن ثم فإن $S_d(p,\varepsilon)=S_{d_1}(p,\delta)\subseteq U$ أى أن $U\in\tau(d)$ ومن ذلك نستنتج أن :

$$\tau(d_1) \subseteq \tau(d) \qquad \dots\dots\dots (**)$$

من (*) ، (**) نرى أن $\tau(d_1) = \tau(d)$. إذاً $d \sim d_1$

ثانيا : نثبت أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\varepsilon' > 0$ بحيث $S_d(p,\varepsilon) = S_{d_2}(p,\varepsilon')$

ولنفرض أن لأى $\varepsilon > 0$ يكون $x \in S_d(p,\varepsilon)$ إذاً $d(p,x) < \varepsilon$ وعليه فإن

$1 + d(p,x) < 1 + \varepsilon$ ومنها $\dfrac{1}{1+\varepsilon} < \dfrac{1}{1+d(p,x)}$ ومنها نحصل على:

$$\frac{d(p,x)}{1+d(p,x)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \varepsilon' \qquad \text{(تحقق من ذلك؟)}$$

وبالتالى فإنه يوجد $\varepsilon' > 0$ بحيث أنه لكل $U \in \tau(d)$ فإن :

$$S_{d_2}(p,\varepsilon') = S_d(p,\varepsilon) \subseteq U$$

ومن ذلك نستنتج أنه إذا كانت $U \in \tau(d_1)$ فإن $U \in \tau(d_2)$ أى أن :

$$\tau(d) \subseteq \tau(d_2)$$

والعكس ، نفرض أن $U \in \tau(d_2)$ إذاً يوجد $\varepsilon' > 0$ بحيث أن $S_{d_2}(p,\varepsilon') \subseteq U$. والمطلوب الآن البحث عن $\varepsilon > 0$ بحيث أن $S_d(p,\varepsilon) = S_{d_2}(p,\varepsilon')$.

نفرض أن $x \in S_{d_2}(p,\varepsilon')$ فإنه ينتج من ذلك أن $d_2(p,x) < \varepsilon'$

وبفرض أن $0 < \varepsilon' < 1$ نجد أن : $d_2(p,x) = \dfrac{d(p,x)}{1+d(p,x)} < \varepsilon'$

ومنها $d(p,x) = \dfrac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} < \varepsilon$. أى أن $x \in S_d(p,\varepsilon)$ ومنها نرى أن :

$$S_{d_2}(p,\varepsilon') \subseteq S_d(p,\varepsilon)$$

ولأثبات العكس نأخذ $0 < \varepsilon' < 1$ ، $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}$ حيث $x \in S_d(p,\varepsilon)$ أى

أن : $d(p,x) < \varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}$. إذاً $d_2(p,x)=\dfrac{d(p,x)}{1+d(p,x)} < \varepsilon'$

أى أن $x \in S_{d_2}(p,\varepsilon')$ ومـــن ثم فإنـــه لكـــل $1>\varepsilon'>0$ يوجـــد

$0<\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}$ بحيث أن $S_d(p,\varepsilon)=S_{d_2}(p,\varepsilon')$

وبفرض أن $U \in \tau(d_2)$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث أن $S_{d_2}(p,\delta)\subseteq U$

وحيث أن $S_d(p,\varepsilon)=S_{d_2}(p,\delta)$. فإنه ينتج أن $U \in \tau(d)$ وعليه فإن

$\tau(d_2) \subseteq \tau(d)$. إذاً $d_2 \sim d$. وبالتالى نحصل على أن $d \sim d_1 \sim d_2$.

تعريف (٥. ٣. ٢٠) :

يقال أن الفضاء التوبولوجى (X,τ) قابل بأن يكون مترياً **metrizable** (أو قابل للتمتر) إذا وفقط إذا وجدت دالة مترية d على X بحيث أن $\tau(d)=\tau$. وهذا يعنى أن τ مولداً بواسطة دالة المسافة d على X.

مثال (٥. ٣. ٢١):

(١) كـــل فضـــاء منفصل (X,D) قابل بأن يكون مترياً وذلك لأن دالة المسافة التافهه المعرفة على X تولد التوبولوجى المنفصل D.

(٢) الفضـــاء التوبولوجى العادى $(R,\mathcal{U})$ هو فضاء قابل بأن يكون مترياً وذلك لأن دالة المسافة العادية على R تولد التوبولوجى العادى $\mathcal{U}$.

بند (٤) : المجموعات المغلقة في الفضاء المتري :

(Closed set in Metric space)

تعريف (٥. ٤. ١) :

المجموعـــة الجزئـــية F مـــن الفضاء المتري (X,d) تسمى مجموعة مغلقة **(closed set)** إذا وفقـــط إذا كان $X-F\,(=F^c)$ مفتوحة وهذا يعني أنه إذا كانت مكملة F مفتوحة .

مثال (٥. ٤. ٢) :

نفرض الفضاء المتري العادي (R,d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x,d)=|x-y| \quad ; \quad \forall\, x,y\in R$$

نفرض المجموعة $A=[a,b]$ لجميع قيم $a,b\in R$ حيث $a<b$ ، نفرض

$$L_a=\{x\in R: x<a\} \quad ; \quad R_b=\{x\in R: x>b\}$$

إذاً $R-A=L_a\cap R_b$ لأي $x\in R-A$ حيث $x\in L_a$ فإن

$$d(x,a)=|x-a|=r \quad (\text{مثلا})$$

إذاً
$$S_r(x)=(x-r,x+r)\subseteq L_a\subseteq R-A$$

إذاً $R-A$ مجموعة مفتوحة ، وعليه فإن A مجموعة مغلقة وهذا يعني أن أي فترة مغلقة من R هي مجموعة مغلقة .

مثال (٥. ٤. ٣) :

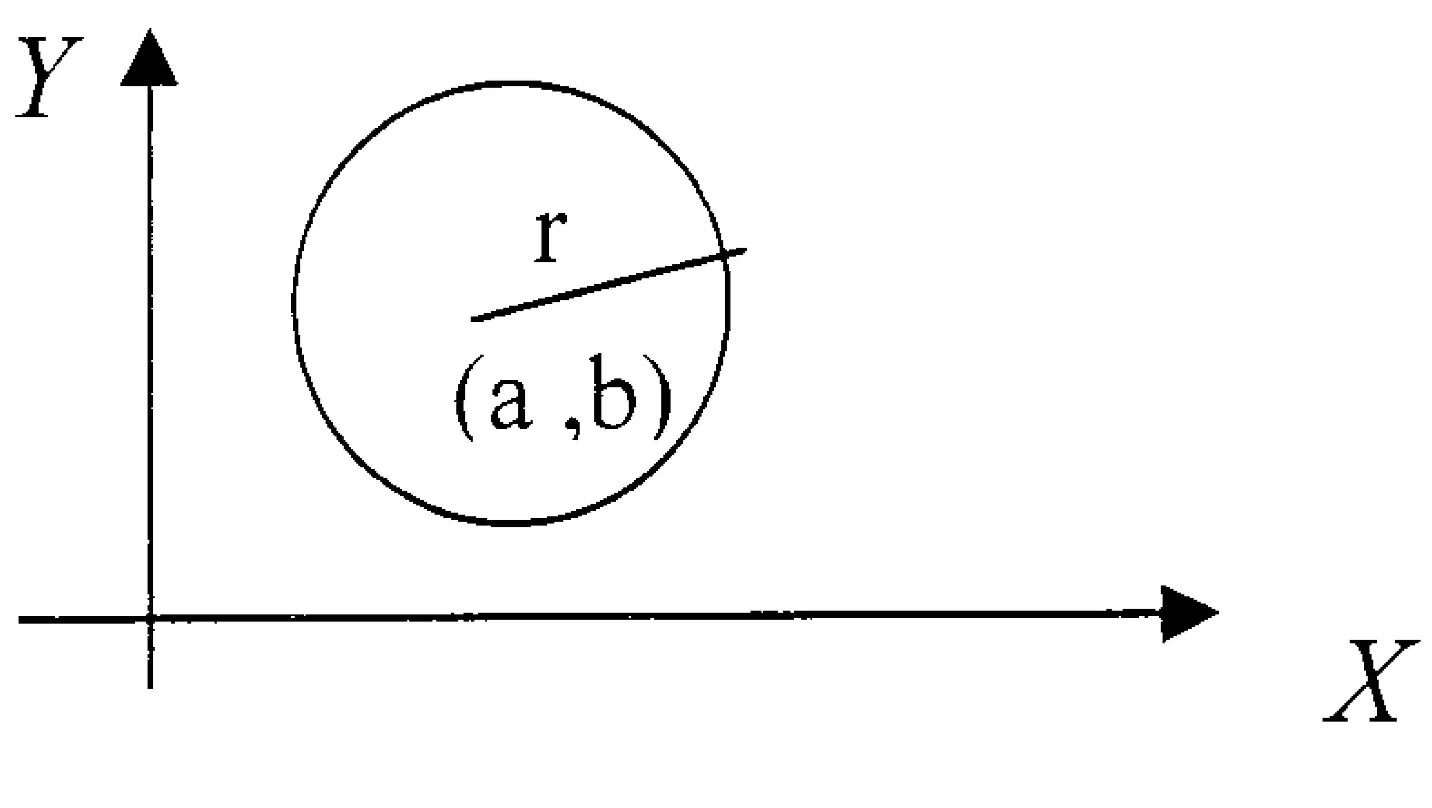
نفرض الفضاء المتري (R^2,d) حيث d معرفة كما يلي :

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad ; \quad \forall\; x,y\in R^2$$

حيث $x=(x_1,y_1)\ ,\ y=(x_2,y_2)\in R^2$

نفرض المجموعة $F=\{(x,y)\in R^2:(x-a)^2+(y-b)^2\le 1\}$

F هـــي مجموعة جزئية مغلقة من R^2 ، ومن ذلك نستنتج أن القرص المغلق هو مجموعة مغلقة في R^2 .



مثال (٥ . ٤ . ٤) :

نفرض (R,d) الفضاء المتري العادي، نفرض المجموعة $A=\{x\in R:0\leq x<1\}$ وهي مجموعة جزئية من R ، A ليست مغلقة وليست مفتوحة ؟ (برهن ذلك ؟)

نظرية (٥ . ٤ . ٥) : نفرض الفضاء المتري (X,d) ، إذاً

(i) ϕ , X مجموعات مغلقة .

(ii) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة من X يعطي مجموعة مغلقة .

(iii) اتحاد عدد محدد من المجموعات المغلقة من X يعطي مجموعة مغلقة .

البرهان :

(i) حيث أن $X^c=\phi$ وتم إثبات أن ϕ مجموعة مفتوحة ، إذاً X مجموعة مغلقة . وحيث أن $\phi^c=X$ وتم إثبات أن X مجموعة مفتوحة ، إذاً ϕ مجموعة مغلقة.

(ii) نفرض أن $F_i\ ;\forall i$ مجموعات مغلقة من X ، المطلوب إثبات أن $F=\underset{i}{\cap}F_i$ مجموعة مغلقة ، بإستخدام قانوني (دي مورجان) نجد أن :

$$F^c=(\underset{i}{\cap}F_i)^c=\underset{i}{\cup}F_i^c$$

وحيث أن $F_i\ ;\forall i$ مجموعات مغلقة ، إذاً $F_i^c\ ;\forall i$ مجموعات مفتوحة وحيث أن اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يعطي مجموعة مفتوحة إذاً $\underset{i}{\bigcup}F_i^c$ مجموعة مفتوحة وهذا يعني أن F^c مجموعة مفتوحة ، إذاً F مجموعة مغلقة .

(iii) بفرض أن $F_i\ ;\forall i=1,2,\ldots,n$ مجموعة مغلقة من X والمطلوب إثبات أن $F=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}F_i$ مجموعة مغلقة . باستخدام قانوني (دي مورجان) نحصل

على :
$$F^c = (\bigcup_{i=1}^{n} F_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$$

وحيث أن F_i لجميع قيم $i=1,2,...,n$ مجموعات مغلقة ، إذاً F_i^c مجموعات مفتوحة ، وبما أن تقاطع عدد محدد من المجموعات المفتوحة يعطي مجموعة مفتوحة ، إذاً F^c مجموعة مفتوحة ، وعليه فإن F مجموعة مغلقة وهو المطلوب.

مما سبق وجدنا أن مفهوم المجموعة المفتوحة في الفضاء $(X, \tau(d))$ يعتمد علي مفهوم الكرة المفتوحة أى الدالة المترية ، بالمثل فإن معظم المفاهيم التوبولوجية: الجوار - نقاط التراكم - لصاقة المجموعة - الاتصال وغيرها تعتمد على مفهوم الدالة المترية ، ولذلك لسنا في حاجة إلى أعادة تعريفها بل تُعامل بنفس المفهوم العام ولكن على الفضاء المترى. وفى الجزء الآخير من هذا البند سوف نعطى نماذج لهذه المفاهيم بصورة مختصرة.

نظرية (٥. ٤. ٦) :

إذا كان (X, τ) هو فضاء قابل بأن يكون مترياً (بفرض أن τ توبولوجى مولد بدالة المسافة d).فإن لصاقة (غلاقة) المجموعة الجزئيه A من X هى مجموعة كل النقاط التى تكون المسافة بينها وبين المجموعة A تساوى صفراً أى أن :

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

حيث
$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

البرهان :

بفرض أن $x \in X$ بحيث أن $d(x, A) = 0$. إذاً

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} = 0$$

ومن ثم فإن $d(x, a) = 0$ لبعض $a \in A$ وبالتالى أما $x = a$ ومنها $x \in A$.

إذاً $x \in \overline{A}$ أو لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $a \in A$ بحيث ان $d(x, a) < \varepsilon$ أى أن

$a\in S(x,\varepsilon)$ ومنها نحصل على $S(x,\varepsilon)\cap A\neq\phi$ لكل $\varepsilon>0$. إذاً

$$\{x\in X:\ d(x,A)=0\}\subseteq \overline{A}$$

العكس ، نفرض أن $p\notin \{x\in X:\ d(x,A)=0\}$

أى أن $d(p,A)=\varepsilon>0$ وبذلــــــــك $p\in S(p,\frac{\varepsilon}{2})$ ومـــــــنها $S(p,\frac{\varepsilon}{2})\cap A=\phi$. أى أن $p\notin\overline{A}$. إذاً

$$\overline{A}\subseteq \{x\in X:\ d(x,A)=0\}$$

نظرية (٥ . ٤ . ٧) :

في الفضاء المترى (X,d) كل مجموعة منتهيه تكون مجموعة مغلقة.

البرهان :

من النظرية السابقة نستنتج أن :

$$\forall\, p\in X\,,\overline{\{p\}}=\{x\in X: d(x,\{p\})\}=0$$
$$=\{p\}$$

إذاً كل مجموعة أحادية العنصر هى مجموعة مغلقة ومن ثم فإن أى مجموعة منتهيه هى أيضاً مجموعة مغلقة لأنها أتحاد عدد منتهه من المجموعات المغلقة. بمعنى أنه إذا كانت $A=\{a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n\}$ مجموعة منتهيه من X فإن :

$$A=\{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\ \ldots\ \cup\{a_n\}$$

إذاً $\overline{A}=\overline{\{a_1\}}\cup\overline{\{a_2\}}\cup\ \ldots\ \cup\overline{\{a_n\}}=A$. أى أن A مجموعة مغلقة.

نظرية (٥ . ٤ . ٨) :

(١) أى مجموعة F في الفضاء القابل بأن يكون مترياً X تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت $\{x\in X: d(x,F)=0\}\subseteq F$

(٢) إذا كانت F مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء القابل بأن يكون مترياً بحيث أن $p\in X$ ، $p\notin F$ فإن $d(p,F)=0$.

البرهان :

(١) تنتج مباشرةً من النظرية السابقة.

(٢) إذا كانت $d(p,F)=0$ فإن $p \notin \overline{F}$ ولكن F مجموعة مغلقة أى أن $F=\overline{F}$ ومنها فإن $p \in F$ وهذا تعارض مع الفرض.

مثال (٥. ٤. ٩) :

بين أن الفضاء الغير منفصل (X,I) حيث X تحتوى على أكثر من نقطة غير قابل بأن يكون مترياً.

الحل :

نعلم أن $I=\{X,\phi\}$ ومنها X,ϕ هى المجموعات المغلقة الوحيدة فى الفضاء (X,I).

فإذا عرفنا دالة مترية d على X نحصل على أن كل مجموعة منتهيه فى الفضاء $(X,\tau(d))$ هى مجموعة مغلقة ومن ثم فإن X,ϕ ليست المجموعات المغلقة الوحيدة. لأنه مثلاً إذا كانت $X=\{a,b,c\}$ فإن المجموعات المغلقة هى :

$$X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\}$$

أى أن $\tau(d)\neq I$.

تعريف (٥. ٤. ١٠) : نقطة التراكم (أو نقطة النهاية) **(Limit point)**

نفرض (X,d) فراغ متري ، نفرض A مجموعة جزئية من X ، يقال أن $x_o \in X$ نقطة تراكم للمجموعة A إذا كانت كل كرة مفتوحة تحتوي x_o تقطع المجموعة A في نقطة خلاف x_o .أي إذا تحقق الشرط :

$$\forall\, x_o \in X \;,\; S_r(x_o) : (S_r(x_o) \setminus \{x_o\}) \bigcap A \neq \phi$$

مجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة A يرمز لها بالرمز A'.

مثال (٥. ٤. ١١) :

نفرض الفضاء المتري العادي (R,d) ، نفرض المجموعة :

$$A=\{x\in R:\ x=\frac{1}{n}\ ;\ n\in N\}\subset R$$

نفـــرض $\varepsilon>0$ ، ونفرض المجموعة المفتوحة $(-\varepsilon,\varepsilon)$ التي تحتوي على الصفر ، واضح أنه من الممكن إيجاد $n\in N$ بحيث أن $\varepsilon>\frac{1}{n}$ وعليه فإن $\frac{1}{n}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.

إذاً كل كره مفتوحة تحتوي الصفر تحتوي نقطة من المجموعة A تختلف عن الصفر ، وعليه فإن الصفر هو نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة A.

ملاحظة :

مـــن الواضح أن نقطة التراكم وهي الصفر لا تنتمي إلى المجموعة A ، وعلى وجه العموم ليس من الضروري أن تنتمي نقطة التراكم للمجموعة A.

مثال (٥. ٤. ١٢):

نفرض (R,d) الفضاء المتري العادي، نفرض المجموعة :

$$A=\{x\in R:\ x=1\ or\ x=1+\frac{1}{n}\ ;\ n\in N\}$$

A مجموعـــة جزئـــية من الفضاء المتري R. ومن السهولة التحقق من أن الواحد نقطـــة تـــراكم للمجموعة A والذي ينتمي إلى المجموعة A . وهو نقطة التراكم الوحيدة للمجموعة A.

مثال (٥. ٤. ١٣) :

نفـــرض (X,d) هـــو الفضاء المتري المتقطع حيث $d:X\times X\to R$ معرفة كما يلي :

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & ;x=y\\ 1 & ;x\neq y\end{cases}$$

لأي $A\subseteq X$ فإن A ليس لها أي نقاط تراكم أي أن $A'=\phi$ (برهن ذلك ؟)

تعريف (٥ . ٤ . ١٤) :

نفـــرض x_o نقطة في الفضاء المتري X ، المجموعة الجزئية N من X تسمى جوار (neighborhood) للنقطة x_o إذا تحقق :

(i) $x_o \in N$

(ii) توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x \in U \subseteq N$

ملاحظة :

المجموعة المفتوحة تكون جوار لكل نقطة من نقاطها.

تعريف (٥ . ٤ . ١٥) : (النقطة الداخلية – interior point)

نفـــرض A مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X, d)، النقطة $x_o \in X$ تســـمى نقطة داخلية (interior point) للمجموعة A إذا وفقط إذا كان يوجد جوار N للنقطة x_o بحيث أن $x_o \in N \subseteq A$.

ملاحظات (٥ . ٤ . ١٦) :

١ – بمـــا أن الجوار N للنقطة x_o يحتوي مجموعة مفتوحة وتحتوي هذه المجموعة المفتوحة على النقطة x_o ، إذاً x_o نقطة داخلية للمجموعة A إذا وجد مجموعة مفتوحة U بحيث أن : $x_o \in U \subseteq A$.

٢ – بمـــا أن كـــل مجموعـــة مفتوحة V في X هو جوار لكل نقطة من نقاطها $\forall x \in V$; $x \in V \subseteq V$ إذاً كـــل نقطـــة في المجموعة المفتوحة V هي نقطة داخلية للمجموعة V .

نظرية (٥ . ٤ . ١٧) :

نفـــرض (X, d) فضاء متري ، $F \subseteq X$ تكون مغلقة إذا فقط وإذا كانت تحتوي على جميع نقاط تراكمها .

البرهان :

نفرض $x \in X$ نقطة تراكم للمجموعة الجزئية المغلقة F إذاً يوجد $r > 0$

بحيث $(S_r(x)\setminus\{x\})\cap F\neq\phi$ وعليه فإن $S_r(x)\subseteq F^c$.

وهذا يعني أن x ليست إحدى نقاط F^c الداخلية ولكن F^c مفتوحة لأن F مغلقة من الفرض ، وحيث أن $x\notin F^c$ إذاً $x\in F^c$.

وعلى العكس ، نفرض أن $F'\subset F$ وأن $x\in F^c$ ، وحيث أن $F'\subset F$ فإن $(S_r(x)\setminus\{x\})\cap F=\phi$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن $S_r(x)\subseteq F^c$ أي أن x إحدى نقاط F^c الداخلية ومن ثم فإن F^c تكون مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن F تكون مجموعة مغلقة.

تعريف (٥. ٥. ١٨) : (الاتصال على الفضاء المترى)

نفرض الفضاءان المتريان $X=(X,d_1)$ ، $Y=(Y,d_2)$. يقال للدالة $f:X\to Y$ إنها متصلة عند النقطة $x_o\in X$ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث أن : $d_1(x,x_o)<\delta\Rightarrow d_2(f(x),f(x_o))<\varepsilon$

نظرية (٥. ٤. ٢٠) :

الدالة $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تكون متصلة عند النقطة $x_o\in X$ إذا وفقط إذا كان لكل كره مفتوحه $S_{d_2}(f(x_o),\delta)$ توجد كره مفتوحه $S_{d_1}(x_o,\varepsilon)$ بحيث أن $f(S_{d_1}(x_o,\varepsilon))\subseteq S_{d_1}(f(x_o),\delta)$

البرهان : يترك للقارئ كتمرين.

نظرية (٥. ٤. ٢١) :

الدالة $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في (Y,d_2) تكون مجموعه مفتوحة في (X,d_1) .

البرهان : يترك للقارئ كتمرين.

بند (٥) : المتتابعات في الفضاء المتري :

تعريف (٥. ٥. ١) :

المتـــتابعة (x_n) في الفضاء المتري (X,d) تعرف على إنها دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية N إلى قيم في (X,d) أي أن :

$$f:N\to X\ ,\ f(n)=x_n\ ,\ \forall\, n\in N$$

x_n يسمى بالحد النوني للمتتابعة ، x_1 الحد الأول ، x_2 الحد الثاني ، ...وهكذا .

تعريف (٥. ٥. ٢) :

يقـــال للمتـــتابعة (x_n) في الفضاء المتري (X,d) أنها تقاربية ولها النهاية $x\in X$ إذا كـــان لكـــل عـــدد صـــغير موجب ε نستطيع إيجاد العدد الطبيعي $N=N(\varepsilon)$ والذي يعتمد على ε بحيث أن : $d(x_n,x)<\varepsilon\ ;\forall\ n\geq N$ وتكتب رياضياً كالآتى :

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\ \ s.t.\ \ d(x_n,x)<\varepsilon\ ;\forall\ n\geq N$$

وفى هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ أو $x_n\to x$.

وبالـــتالى يمكـــن إعـــادة صـــياغة مفهوم تقارب المتتابعة في الفضاءات التوبولوجية بالصورة :

المتـــتابعة $\{x_n\}$ في الفضـــاء (X,τ)تتقارب إلى النقطة $x\in X$ إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى x تحتوى على معظم حدود المتتابعة فيما عدا عدد منتهى.

نظرية (٥. ٥. ٣) :

بفـــرض أن A مجموعـــة جزئية من الفضاء $(X,\tau(d))$. إذا كانت المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المكونه من عناصر من A تتقارب إلى $x\in X$ فإن $x\in\overline{A}$ أى أن

$$x_n\to x\Rightarrow x\in\overline{A}$$

البرهان :

حيـــث أن $(\overline{A})^c$ مجموعة مفتوحة ، $x_n \in A$ لكل $n \in N$ فإن $x_n \notin (\overline{A})^c$ وهذا يؤدى إلى أن $(\overline{A})^c$ لاتحتوى على حدود المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. وبالتالى فإن المتتابعة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقارب على نقطة في $(\overline{A})^c$.

نظرية (٥. ٥. ٤) :

الدالـــة $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$ تكون متصلة عند النقطه $p \in X$ إذا وفقـــط إذا كانـــت كل متتابعه (x_n) تتقارب إلى p فإن المتتابعه $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(p)$.

البرهان :

بفـــرض أن $x_n \to p$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعى N بحيث يكون $d_1(x_n, p) < \varepsilon$ لكل $n \geq N$.

وهذا يعنى أن $x_n \in S_{d_1}(p, \varepsilon)$ لكل $n \geq N$. حيث أن f دالة متصلة عند النقطه p فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$f(S_{d_1}(p, \varepsilon)) \subseteq S_{d_1}(f(p), \delta)$$

وهـــذا يـــؤدى إلى أن $f(x_n) \in S_{d_1}(f(p), \delta)$ لكـــل $n \geq N$ أى أن $d_2(f(x_n), f(p)) < \delta$ لكل $n \geq N$ ومن ثم فإن $f(x_n) \to f(p)$.

برهان العملية العكسية تترك للقارئ كتمرين.

تعريف (٥. ٥. ٥): (متتابعة كوشي – **Couchy Sequence**)

يقـــال أن المتتابعة (x_n) في الفضاء المتري (X,d) متتابعة كوشية إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن :

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \; ; \forall \; n, m \geq N$$

نظرية (٥. ٥. ٦) :

أي متتابعة تقاربية في الفضاء المتري تكون كوشية.

البرهان :

نفرض أن (x_n) متتابعة تقاربية في الفضاء المتري (X,d) إذاً

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\frac{\varepsilon}{2})\ \ s.t.\ \ d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}\ ;\forall\ n\geq N$$

ومن ثم فإنه لجميع قيم $n,m \geq N$ نجد أن :

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x)+d(x,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وهذا يثبت أن (x_n) كوشية.

ملاحظة : البرهان السابق اعتمد على وحدانية النهاية ، بمعنى إنه إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ أي أن (x_n) تقاربية ولها النهاية x فإن x تكون وحيدة ، ونترك للطالب البرهنة على صحة هذه العلاقة ، عكس النظرية السابقة ليس بالضرورة صحيحا والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٥. ٥. ٧) :

أعتبر الفضاء المتري $(R\setminus\{0\},d)$ نأخذ المتتابعة (x_n) والمعرفة على النحو التالى : $(x_n)=(\frac{1}{n})\ ;\forall n\in N$ هذه المتتابعة كوشية وذلك لأنه لجميع قيم $\varepsilon>0$ نختار $N>\frac{\varepsilon}{2}$. إذاً لجميع قيم $n,m \geq N$ فإن

$$d(x_n,x_m)=|x_n-x_m|\leq|x_n|+|x_m|$$
$$<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

من الواضح أن المتتابعة (x_n) تتقارب إلى الصفر وحيث أن الصفر ليس عنصرا من عناصر الفضاء المعطى ، إذاً هذه المتتابعة غير تقاربية (تباعدية)على هذا الفضاء، بالرغم من كونها كوشية .

وهذا يبرهن على أن عكس النظرية السابقة ليس بالضرورة صحيح .

تعريف (٥. ٥. ٨) : الفضاء المتري التام **(Complete Metric space)**

يقال للفضاء المتري (X,d) أنه فضاءاً تاماً **(Complete)** إذا كانت كل متتابعة كوشية في (X,d) تقاربية .

مثال (٥. ٥. ٩) :

الفضاء المتري (R,d) حيث $d:R\times R\rightarrow R$ والمعرفة على النحو التالي:

$d(x,y)=|x-y|\;;\forall\; x,y\in R$ فضاء متري تام ؟

الحل :

الحل يأتي من نظرية بلزانو – وفير شتراس التي تم دراستها في التحليل الحقيقي والتي تنص على أن كل متتابعة أعداد حقيقية من R إذا كانت كوشية فهي تقاربية.

مثال (٥. ٥. ١٠) :

نفرض $C[0,1]$ هى مجموعة جميع الدوال المتصلة على الفترة المغلقة. الفضاء المتري $(C[0,1],d)$ حيث $d:C[0,1]\times C[0,1]\rightarrow R$ والمعرفة كما يلي :

$$d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|\;\;;\forall\, f,g\in C[0,1]$$

فضاء متري تام .

الحل :

يترك للقارئ كتمرين .

مثال (٥. ٥. ١١) :

الفضاء المتري $(C[0,1],d)$ حيث $d:C[0,1]\times C[0,1]\rightarrow R$ معرفة على النحو التالي :

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx\;\;;\forall\, f,g\in C[0,1]$$

الفضاء المتري $(C[0,1],d)$ ليس تام ؟

الحل :

يترك للقارئ كتمرين.

نظرية (٥. ٥. ١٢) :

كل فضاء جزئى من الفضاء المترى التام يكون فضاء تام إذا وفقط إذا كان مغلق.

البرهان :

بفرض أن (X,d) فضاء مترى تام ، A فضاء جزئى تام من X. لأثبات أن A مجموعة مغلقة ، نفرض أن $x \in A'$ فإن كل كره مفتوحه تحتوى p تحتوى على نقاط من A خلاف x. إذاً لكل $n \in N$ يمكن إيجاد متتابعه من عناصر A بالصورة $\{x_n : n \in N\}$ بحيث يكون $x_n \in A \cap S_d(x, \frac{1}{n})$. وبالتالى فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متتابعة كوشية في A وتتقارب إلى x، وحيث أن A فضاء تام فإن $x \in A$ أى أن $A' \subseteq A$ ومن ثم فإن A مغلقة.

العكس ، نفرض أن A مجموعة مغلقة. لإثبات أن A فضاء تام نفرض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة كوشية في A ، بالتالى فهى متتابعة كوشية في X. حيث أن (X,d) فضاء تام فإن $x_n \to x \in X$. إذا كانت $A = \{x_n : n \in N\}$ مجموعة منتهيه فإنها تحتوى على x ومن ثم فإن $x \in A$.

إذا كانت $A = \{x_n : n \in N\}$ غير منتهيه فإن $x \in A'$ من نظرية (٥. ٥. ٣) حيث أن Y مغلقة فإن $x \in A$ وبالتالى فإن A فضاء تام.

تمارين عامة على الباب الخامس

(١) نفرض R مجموعة الأعداد الحقيقية نعرف :

$d_1 : R \times R \to R \; ; d_2 : R \times R \to R$ على النحو التالي:

$$d_1(x,y) = |x| + |y| \; ;$$

$$d_2(x,y) = \max(|x|, |y|)$$

بين ما إذا كان $d_1 \; , d_2$ تمثل رواسم مترية أم لا ؟

(٢) نفـــرض C هي مجموعة الأعداد المركبة ، نعرف $d : C \times C \to R$ على النحو التالي :

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \; ; \; \forall \; z_1, z_2 \in C$$

برهن أن (C, d) فضاء متري ؟

(٣) نفـــرض (X, d) حيـــث X مجموعة غير خالية تمثل فضاء متري ، نعرف $d_1 : R \times R \to R \; ; d_2 : R \times R \to R$ كما يلي :

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \; ;$$

$$d_2(x,y) = \frac{1 - d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

برهن أن d_1 تمثل دالة متري على X ، بينما d_2 لا تمثل دالة متري على X ؟

(٤) لأي $a, b \in R$ برهن أن :

$$(i) \; |ab| \le \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$$

$$(ii) \; (|a| + |b|)^2 \le 2 \; (|a|^2 + |b|^2)$$

(٥) برهن أن $(C[a,b], d)$ فضاء متري ، حيث d معرفة كما يلي :

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \; ; \forall \; f,g\in C[a,b]$$

(٦) نفرض M_n هي مجموعة جميع المصفوفات ذات الرتبة النونية n أي أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة = n .

لأي $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in M_n$ نعـــرف الجمع والضرب في عدد قياسي على النحو التالي :

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$
$$\lambda A=(\lambda\, a_{ij}) \; ; \forall \; i,j=1,2,\dots,n$$

نعرف $d:M_n\times M_n \to R$ على النحو التالي :

$$d(A,B)=\sup_i\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}-b_{ij}|\right) ; \forall \; i=1,2,\dots,n$$

برهن أن (M_n,d) تمثل فضاء متري .

(٧) لأي $a,b,c\in R$ برهن أن :

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

(٨) نفـــرض d دالـــة مـــترية عـــلى المجموعـــة غير الخالية X . نفرض الدالة $\rho:X\times X\to R$ والمعرفة على النحو التالى :

$$\rho(x_1,x_2)=\min(1,d(x_1,x_2)) \; ;\forall \; x_1,x_2\in X$$

بين ما إذا ρ كانت تمثل دالة مترية على X أم لا ؟

(٩) بين أن فضاء المكملات المنتهيه غير قابل بأن يكون مترياً.

(١٠) ادرس اتصال الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ; x\neq 1\\ 2 & ; x=1\end{cases}$$

على نطاقها ؟

(١١) ادرس اتصال الدالة :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & ; x\neq 0\\ 1 & ; x=0\end{cases}$$

على نطاقها ؟

(١٢) أثبت أن الفضاء الاقليدى (R^2,d) تام؟

(١٣) بفرض أن (X,d) فضاء مترى تام ، $\{A_n\}$ متتابعة تناقصية من المجموعات المغلقة بحيث أن $\lim\limits_{n\to\infty} D(A_n)=0$. أثبت أن $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$.

(تسمى هذه بنظرية التقاطع لكانتور)

(١٤) بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء المترى (X,d) بين أن الدالة $f:X\to R$ المعرفة بالصورة $f(x)=d(x,A)$ تكون متصلة.

(١٥) بفرض أن الدالة $f:R^2\to R$ معرفة بالصورة : $d((a,b))=|a-b|$ بين أن d دالة متصلة.

(١٦) بفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء (X,d) بين أن $D(A)=D(\overline{A})$.

(١٧) ليكن (X,d) فضاء مترى. أثبت أن $d(A,B)$ حيث $A,B\subseteq X$ هى دالة شبه مترية.

(١٨) ليكن (X,d) فضاء مترى ، $A\subseteq X$ نعرف الدالة d_A بالصورة :

$$d_A(x,y)=d(x,y) \ \ \forall \ x,y\in A$$

(i) برهن أن (A,d_A) فضاء مترى (ويسمى الفضاء المترى الجزئى).

(ii) برهن أن $\tau_A\equiv\tau_{(d_A)}$

(١٩) بين أن الفضاء المترى (R^2,d)

(i) منفصلاً

(ii) فضاء تام

(٢٠) لتكن $f:X\to R$ دالة. بين أن الدالة $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ تكون شبة مترية.

(٢١) ليكن (X,d) فضاء شبة مترى ، $A\subseteq X$ بحيث أن $d(x,y)\geq\varepsilon>0$ لكل $x,y\in A$. بين أن $A'=\phi$.

الباب السادس

مسلمات الانفصال

Separation Axioms

الباب السادس

مسلمات الانفصال

Separation Axioms

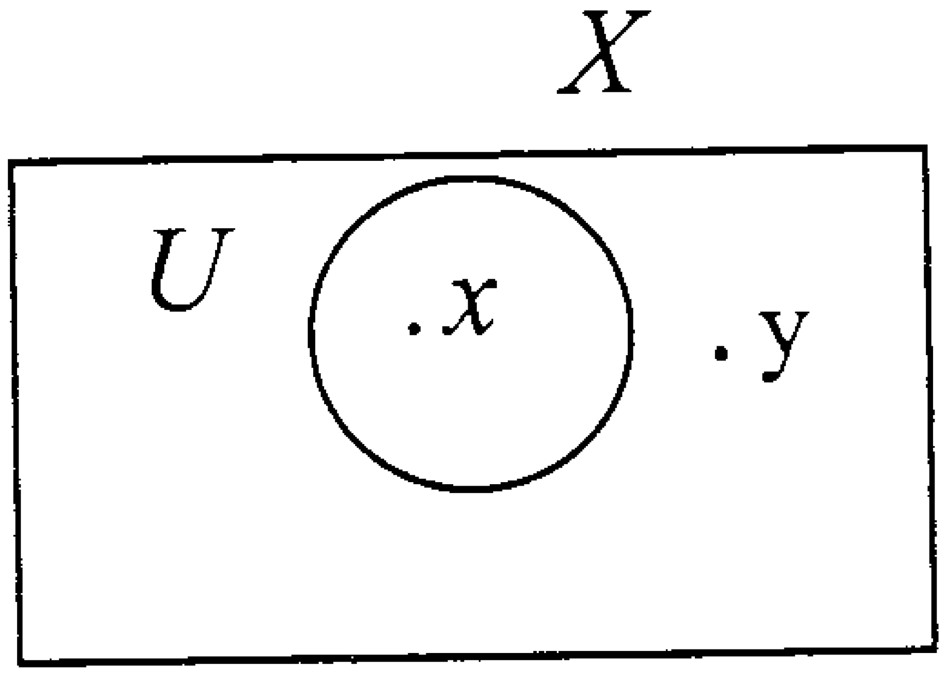
قدمـــنا في دراستنا السابقة مفهوم الفضاء التوبولوجي دون فرض أي قيود على عناصـــر هـــذا الفضاء. ولكن من أجل الحصول على نتائج أعمق وأوسع في هذه الدراســـة لابد من وضع شروط أو فروض على الفضاءات التوبولوجية عن طريق فصـــل نقطـــتين أو مجموعـــتين أو نقطـــة ومجموعة في الفضاء التوبولوجي بواسطة مجموعـــات مفـــتوحة•. في هـــذا الـــباب ســـوف نقـــوم بدراســـة الفضـــاءات $T_o , T_1 , T_2 , T_3 , T_{3\frac{1}{2}} , T_4 , T_5$ ودراســـة العديد من خواص تلك الفضاءات والعديـــد من التكافؤات. وبهذا أمكن الحصول على نتائج أفضل وخصائص أقوى تساعدنا على برهنة العديد من النظريات في الفضاءات التوبولوجية.

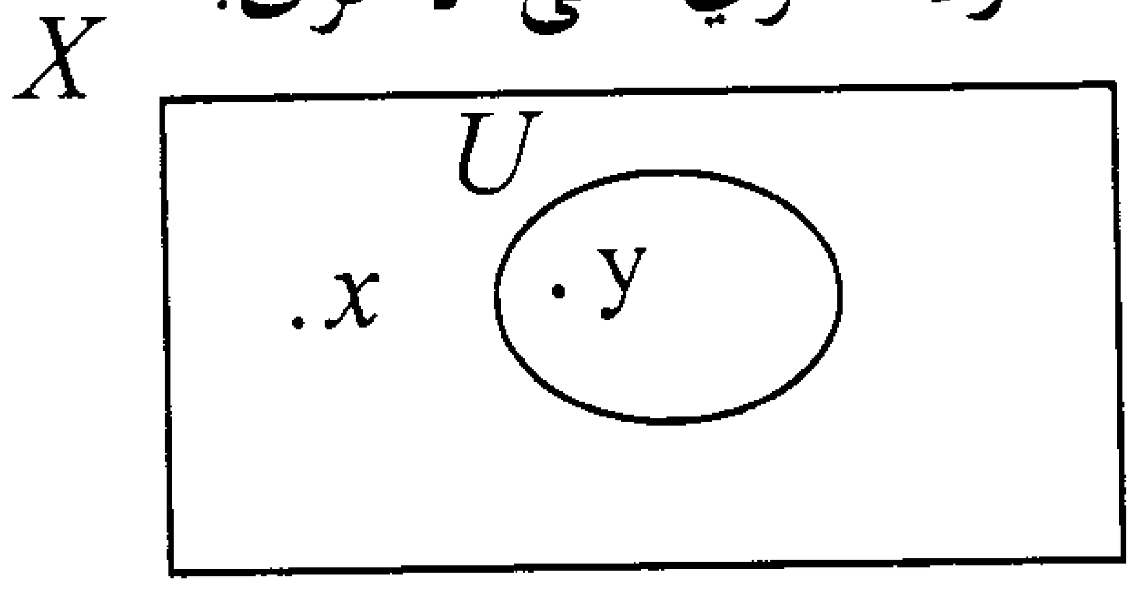
الفضاء – T_o : T_o– **Space or Kolmogorff space**

يسمى الفضاء (X, τ) فضاء– T_o إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall\, x, y \in X ,\ x \neq y , \exists\, U \in \tau : x \in U , y \notin U \text{ or } y \in U , x \notin U$$

أي أن لكـــل نقطـــتين مختلفتين x , y في X توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحداهما ولا تحتوي على الأخرى.





وهـــذا التعريف يكافئ القول بأن الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون T_o إذا وفقط إذا كان لكل نقطتين مختلفتين يوجد جوار لأحدهما لا يحوي النقطة الأخرى

• طريقة توزيع المجموعات المفتوحة في الفضاء التوبولوجي

نستطيع تبديل الجوار المجموعة المفتوحة في التعريف السابق)

مثال (٦. ١) :

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$ ، $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ هل (X,τ) فضاء- T_o ؟

الحل :

واضح أن (X,τ) فضاء T_o لأنه من أجل $a,b\in X$ توجد $\{a\}\in\tau$ بحيث أن $b\notin\{a\}$. كذلك من أجل $a,c\in X$ توجد $a\in\{a\}$ ، $c\notin\{a\}$ و أخيراً من أجل $b,c\in X$ توجد $b\in\{b\}$ ، $c\notin\{b\}$.

مثال (٦. ٢) :

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$ ، $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ هل (X,τ) فضاء- T_o ؟

الحل :

واضح أن (X,τ) ليس فضاء T_o لأنه لا توجد $U\in\tau$ بحيث أن $b\in U$، $c\notin U$ أو $c\in U$ ، $b\notin U$ (لاحظ أن التعريف محقق من أجل a,b وكذلك من أجل a,c).

مثال (٦. ٣) :

هل الفضاء المنفصل (X,D) هو فضاء- T_o ؟

الحل :

من تعريف التوبولوجي المنفصل $D=P(X)$ نجد أنه لكل $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ توجد مجموعة مفتوحة $\{x\}$ بحيث أن $x\in\{x\}$ ولكن $y\notin\{x\}$. إذاً (X,D) فضاء- T_o.

مثال (٦. ٤) :

هل الفضاء الغير منفصل (X,I) حيث X تحتوي على أكثر من عنصر هو

فضاء- T_o ؟

الحل : تترك للقارئ كتمرين

مثال (٦ . ٥) :

هل فضاء النقطة المختارة (X, P) هو فضاء- T_o ؟

الحل :

نفرض أن $x, y \in X$ ، $x \neq y$ وحيث أن :

$$\mathrm{P} = \{\phi \ , U \subseteq X: \ p \in U\}$$

فيكون لدينا إحتمالان الأول : $x \neq y \neq p$

إذاً توجد مجموعة مفتوحة $U = \{x, p\}$ بحيث يكون $x \in \{x, p\}$ ، $y \notin \{x, p\}$.

والاحتمال الثاني : إحدى النقطتين تساوي p ولتكن $x = p$ ، إذاً توجد مجموعة مفتوحة هي $\{p\}$ بحيث يكون $p \in \{p\}$ ، $y \notin \{p\}$.

إذاً (X, P) هو فضاء- T_o .

مثال (٦ . ٦) :

هل فضاء المتممات المنتهية (X, C) فضاء - T_o ؟

الحل :

نفرض أن $x, y \in X$ ، $x \neq y$ ومن تعريف التوبولوجي C فإن

$$C = \{\phi, U \subseteq X : U^c \ finite\}$$

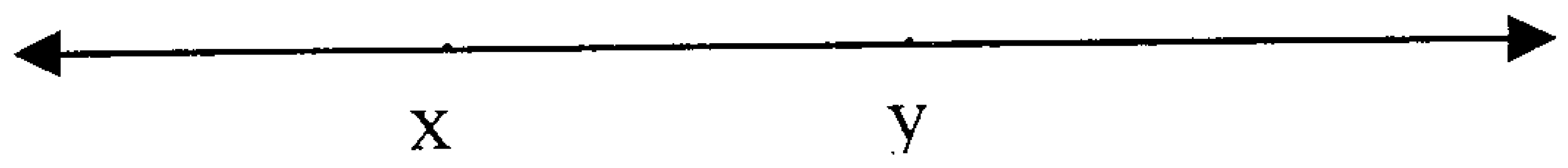
نجد أن $\{x\}$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن $U = X - \{x\} \in C$ مجموعة مفتوحة لا تحتوي x أي $x \notin U$ وتحقق $y \in U$. إذاً (X, C) فضاء - T_o.

مثال (٦ . ٧) :

بفرض أن $\tau = \{\phi, R, E_a = (a, \infty) : a \in R\}$ هل (R, τ) فضاء - T_o ؟

الحل :

لكل $x, y \in R$ بحيث أن $x<y$



توجد مجموعة مفتوحة $E_x=(x,\infty)$ تحوي y ولكن $x \notin E_x$.

إذاً (R,τ) فضاء - T_o.

نظرية (٦ . ٨) :

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات التالية متكافئة :

(١) X فضاء - T_o

(٢) $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ لكل $x, y \in X$ حيث $x \neq y$.

(٣) لكل $x \in X$ فإن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة .

االبرهان :

(١) $\Leftarrow$ (٢) :

نفرض أن (X,τ) فضاء - T_o وأن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$. إذاً توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحدى النقطتين x, y ولا تحتوي على الأخرى ولتكن (مثلاً) $x \in U$ ، $y \notin U$ وبذلك يكون $U \cap \{y\} = \phi$ وهذا يعنى أن $x \notin \overline{\{y\}}$ ولكن $x \in \overline{\{x\}}$. (راجع نظرية(٢ . ٣ . ٨)).

وبالمثل يمكن إثبات أن $y \notin \overline{\{x\}}$ ومن ثم فإن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

(٢) $\Leftarrow$ (٣) :

من (٢) يكون لدينا (لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$) $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

نفرض أن $z \in \{x\}'$ إذاً $z \neq x$ (لأن $x \notin \{x\}'$) . وعليه نحصل على $x \notin \overline{\{z\}}$

لكن $\overline{\{z\}} \subset \overline{\{x\}}$ (وذلك لأن $z \in \overline{\{z\}}, z \in \{x\}' \Rightarrow z \in \overline{\{x\}}$) وحيث أن $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}'$. إذاً $z \in \overline{\{z\}} \subseteq \{x\}'$. وعليه فإن

$$\{x\}' = \bigcup \{ \overline{\{z\}} : z \in \{x\}' \}$$

أي أن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة .

(٣) $\Leftarrow$ (١) :

بفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن إما $y \in \{x\}'$ أو $y \notin \{x\}'$.

(أ) إذا كانت $y \in \{x\}'$ فإنه يوجد مجموعة مغلقة F بحيث $F \subseteq \{x\}'$ ، $y \in F$. إذاً $V = X - F$. V مجموعة مفتوحة تحتوى x ، $y \notin V$.

(ب) إذا كانت $y \notin \{x\}'$ فإن $y \notin \overline{\{x\}}$ وعليه فإن $y \in X - \overline{\{x\}} = V$ ، V مجموعة مفتوحة تحتوي y ولا تحتوى x.

في كلتا الحالتين (X, τ) فضاء $-T_o$

<u>تعريف (٦. ٩) :</u>

بفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي . يقال لخاصية ما بأنها خاصية وراثية (hereditary property) إذا وفقط إذا تحققت لأي فضاء جزئي (A, τ_A) ، $A \subseteq X$ ، طالما هي محققة في الفضاء الكلي (X, τ).

<u>نظرية (٦. ١٠) :</u>

خاصية أن الفضاء- T_o هي خاصية وراثية.

<u>البرهان :</u>

نفرض أن (X, τ) فضاء - T_o ، (A, τ_A) فضاء جزئي منه وأن $x, y \in A$ بحيث أن $x \neq y$. إذاً $x, y \in X$ وحيث أن (X, τ) فضاء - T_o ، إذاً توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي إحداهما ولا تحتوي الأخرى ولتكن

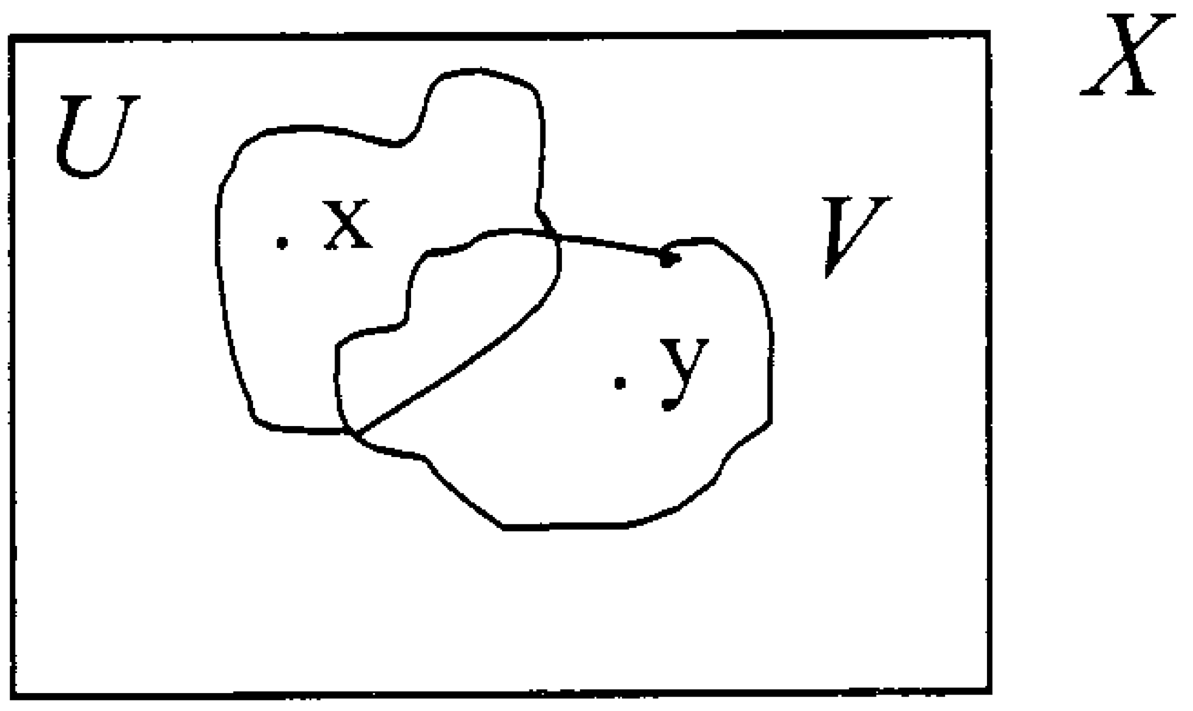
$x \in U , y \notin U$ ، ولكـــن $V = A \cap U$ مجموعـــة مفتوحة في A وتحقق أن $x \in V , y \notin V$. إذاً (A, τ_A) فضاء $-T_o$.

الفضاء $-T_1$: $T_1 - space$

يقـــال أن الفضـــاء التوبولوجي (X, τ) بأنه T_1 إذا كان لكل $x , y \in X$ حيث $x \neq y$ توجد مجموعتان مفتوحتان U , V بحيث أن

$$x \in U ,\ y \notin U ,\ y \in V ,\ x \notin V$$

أي أن $X \ is\ T_1 - Space \Leftrightarrow (\forall\, x , y \in X , x \neq y)(\exists U , V \in \tau)$
$(x \in U , y \notin U) \& (y \in V , x \notin V)$



من هذا التعريف يتضح أن الفضاء $-T_1$ هو فضاء $-T_o$ أي أن : $T_1 \Rightarrow T_o$
ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح على وجه العموم ونوضح ذلك بالمثال التالى:

مثال (٦. ١١) :

نفرض أن $X = \{a , b\}$ ، $\tau = \{X , \phi , \{a\}\}$ فإن (X , τ) فضاء $-T_o$
ولكنه ليس فضاء $-T_1$ لأن X المجموعة الوحيدة التي تحتوي b وأيضا تحتوي a.

مثال (٦. ١٢) :

الفضاء المنفصل هو فضاء $-T_1$ ولكن الفضاء الغير منفصل ليس فضاء $-T_1$.

مثال (٦. ١٣) :

نفرض أن $X = \{a , b\}$ ، $\tau = \{X , \phi , \{a\} , \{b\}\}$
هل (X , τ) فضاء $-T_1$ ؟

الحل :

واضح أن (X,τ) فضاء T_1- لأنه توجد $\{a\},\{b\}\in\tau$

بحيث أن $b\notin\{a\}$, $a\in\{a\}$, $a\notin\{b\}$, $b\in\{b\}$.

نظرية (٦ . ١٤) :

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) X فضاء T_1-

(٢) لكل $x\in X$ فإن $\{x\}$ مجموعة مغلقة .

(٣) لكل $x\in X$ فإن $\{x\}'=\phi$.

البرهان :

(١) $\Leftarrow$ (٢) :

نفرض أن X فضاء T_1- والمطلوب إثبات أن المجموعة $\{x\}$ مغلقة لكل $x\in X$ ؟ لذلك نفرض أن $y\in\{x\}^c$ وهذا يؤدي إلى أن $x\neq y$ وحيث أن X فضاء T_1-، فإنه توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x\notin U , y\in U$ أي أن $y\in U\subseteq\{x\}^c$ ، ومن ثم فإن $\{x\}^c$ مجموعة مفتوحة (لأنها اتحاد مجموعات مفتوحة) وهذا يؤدي إلى أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة .

(٢) $\Leftarrow$ (١) :

نفرض أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة لكل $x\in X$ ونحاول إثبات أن X فضاء T_1-، نفرض أن $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ فإنه ينتج أن $\{x\}^c$, $\{y\}^c$ مجموعات مفتوحة وأيضا $x\in\{y\}^c , y\in\{x\}^c$ ومن ثم فإن $\{x\}^c,\{y\}^c\in\tau$ بحيث أن

$$x\in\{y\}^c , y\notin\{y\}^c , y\in\{x\}^c , x\notin\{x\}^c$$

وهذا يعني أن X فضاء T_1- .

(٢) $\Leftarrow$ (٣) :

نفرض أن $x \in X$ فإنه ينتج من (٢) أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة أي أن $\overline{\{x\}} = \{x\}$. لكـــن $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}'$. إذاً $\{x\} = \{x\} \cup \{x\}'$ وحيث أن $x \notin \{x\}'$ فإن $\{x\}' = \phi$.

(٣) $\Leftarrow$ (١) :

نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ ، من (٣) $\{x\}' = \phi$ وهذا يؤدي إلى أن $y \notin \{x\}'$ أي يوجـــد مجموعـــة مفـــتوحة U_y تحـــوي y وتحقـــق $U_y \cap \{x\} = \phi$ ومن ثم فإن $x \notin U_y$ بالمثل $\{y\}' = \phi$ تؤدي إلى أنه توجد مجموعـــة مفتوحة V_x تحقق $V_x \cap \{y\} = \phi$ ومن ثم فإن $y \notin V_x$ ، $x \in V_x$ وبالتالى فإن (X, τ) فضاء- T_1 .

<u>نتيجة (٦. ١٥) :</u>

إذا كان (X, τ) فضاء- T_1 فإن كل مجموعة جزئية منتهية من X ليس لها نقـــاط نهاية. أى أن لكل $A \subseteq X$ حيث X فضاء- T_1 ، A مجموعة منتهيه فإن $A' = \phi$.

<u>البرهان :</u>

نفرض أن A مجموعة جزئية منتهية من X ولتكن $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ومن ثم فإن $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ وحيث أن X فضاء- T_1 فإن $\{x_i\}' = \phi$ وبذلك نحصل على

$$A' = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}' = \bigcup_{i=1}^{n} \phi = \phi$$

<u>نتيجة (٦. ١٦) :</u>

إذا كانت X مجموعة منتهية ، (X, τ) فضاء- T_1 فإن (X, τ) يكون

فضاء منفصل (متقطع).

البرهان :

نفرض أن $A \subseteq X$ ونحاول إثبات أن A مجموعة مغلقة حيث أن X منتهية فإن A منتهية ولكن X فضاء-T_1 فإنه من نتيجة (٦. ١٥) تكون $A' = \phi$. إذاً مغلقة $A' \subseteq A \Rightarrow A$.

ومن ثم فإن كل مجموعة جزئية من X تكون مفتوحة ومغلقة ومن ذلك يكون (X, τ) هو الفضاء المنفصل .

نتيجة (٦. ١٧) :

أي فضاء متري يكون فضاء-T_1.

نظرية (٦. ١٨) :

خاصية أن يكون الفضاء-T_1 هي خاصية وراثية .

نظرية (٦. ١٩) :

خاصية أن يكون الفضاء-T_1 هي خاصية توبولوجية .

البرهان :

نفرض أن (X, τ_1) فضاء-T_1 وأن (X, τ_2) فضاء توبولوجي ، $f : X \to Y$ دالة توبولوجية ، نحاول إثبات أن (X, τ_2) فضاء-T_1. لذلك نفرض أن $x, y \in Y$ بحيث أن $x \neq y$ وحيث أن f دالة تقابل فإن $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ وبما أن (X, τ) فضاء-T_1 إذاً يوجد $U, V \in \tau_1$ بحيث أن

$$f^{-1}(x) \in U, f^{-1}(y) \notin U \text{ and } f^{-1}(y) \in V, f^{-1}(x) \notin V$$

ومن ثم فإن $x \in f(U), y \notin f(U) \text{ and } y \in f(V), x \notin f(V)$

وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(U), f(V) \in \tau_2$ وهذا يؤدي إلى أن

(X,τ_2) فضاء- T_1.

نظرية (٦. ٢٠) :

الفضاء (X,τ) يكون T_1 إذا وفقط إذا كانت تقاطع المجموعات المفتوحة التي تحتوي P لكل $P\in X$ هي المجموعة $\{p\}$ أي أن :

$$X \text{ is } T_1-space \Leftrightarrow \cap\{G:P\in G\in\tau\}=\{p\}$$

البرهان :

أولا : نفرض أن X فضاء- T_1 ونفرض أن $\cap\{G:G\in\tau\}=\{p,q\}\ ;\ p\neq q$ ومن ثم فإن كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تحتوي أيضا q وبالتالي فإن X ليس فضاء- T_1 وهذا تعارض .

ثانيا : نفرض أن $p,q\in X$ حيث $p\neq q$. إذاً

$$\cap\{G_p:p\in G\in\tau\}=\{p\}\ ,\ \cap\{G_q:q\in G_q\in\tau\}=\{q\}$$

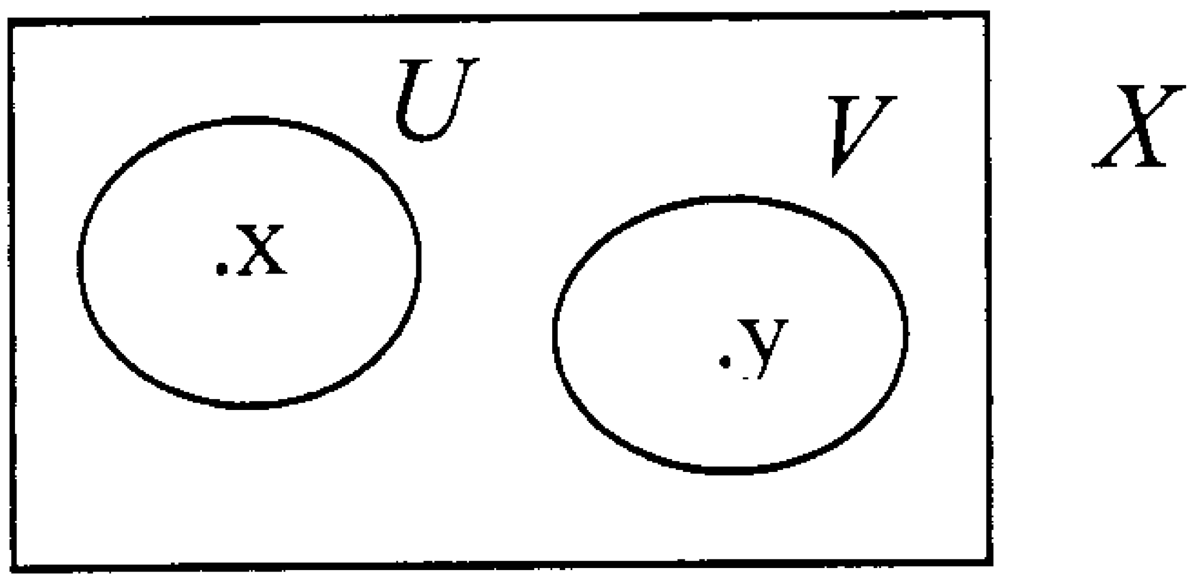
وبالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان G_p,G_q بحيث أن $p\in G_p\,,q\notin G_p\,,p\notin G_q\,,q\in G_q$ ومن ثم فإن X فضاء- T_1.

الفضاء - T_2 : (أو فضاء هاوسدورف - **T_2 - Space (or Housdorff space**

تعريف (٦. ٢١) :

يقال أن الفضاء (X,τ) فضاء- T_2 إذا وفقط إذا وجد لكل نقطتين مختلفتين مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين تحتوي إحداهما النقطة الأولى والأخرى تحتوي النقطة الثانية أي أن :

$$X \text{ is } T_2-space \Leftrightarrow \forall x,y\in X,\ x\neq y\ ,\ \exists u,v\in\tau:$$
$$x\in U\,,\ y\in V\,,\ U\cap V=\phi$$



من الواضح أن كل فضاء $-T_2$ هو فضاء $-T_1$ أي أن $T_2 \Rightarrow T_1$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح على وجه العموم وهذا يتضح من المثال التالي :

مثال (٦. ٢٢) :

فضاء المتممات المنتهية (X, C) حيث X لا نهائية هو فضاء $-T_1$ ولكنه ليس فضاء $-T_2$.

الحل :

(أ) نفرض أن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ فإن $U_x = \{y\}^c , U_y = \{x\}^c$ مجموعات مفتوحة ، $y \notin \{y\}^c = U_x , y \in \{x\}^c = V_y$ وأيضا $x \notin \{x\}^c = V_y , x \in \{y\}^c = U_x$ ومن ثم فإن (X, C) فضاء $-T_1$.

(ب) نفرض العكس ، أي نفرض أن (X, C) فضاء $-T_2$ وعلى هذا فإنه لكل $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ توجد مجموعتان مفتوحتان U_x , V_y بحيث أن $x \in U_x$ ، $y \in V_y$ ، $U_x \cap V_y = \phi$ ومن ذلك نستنتج أن $U_x \subseteq V_y^c$ ، وهذا يؤدي إلى أن V_y^c مجموعة منتهية تحتوي على U_x وبذلك يكون $U_x \subseteq V_y^c$ وهذا غير صحيح لأن U_x مجموعة غير منتهية ، أي تعارض مع $U \cap V = \phi$ ومن ثم فإن (X, C) ليس فضاء $-T_2$.

ملاحظة :

من الممكن أن نرى بسهولة من (أ) أن (X, C) ليس فضاء $-T_2$ لأن :

$$U_x \cap U_y = \{y\}^c \cap \{x\}^c = \{x, y\}^c \neq \phi$$

مثال (٦. ٢٣) :

إذا كان (R, τ) فضاء توبولوجي النهاية العليا فإنه يكون فضاء $-T_2$.

الحل :

نعلم أن $\mathcal{T}$ توبولوجي النهاية العليا يكون مولد بالأساس

$$\mathcal{B}=\{(a,b]: a,b\in R, a<b\}$$

$$a-1 \qquad a \qquad b$$

ومن الواضح أنه يوجد $U=(a-1,a], V=(a,b]$ مجموعتان مفتوحتان في $\mathcal{T}$ وتحقق أن $a\in U,\ b\in V,\ U\cap V=\phi$ ومن ثم فإن $(R,\mathcal{T})$ يكون فضاء- T_2.

مثال (٦. ٢٤) :

كل فضاء منفصل يكون فضاء- T_2 ولكن الفضاء الغير منفصل الذي يحتوي على أكثر من نقطة لا يكون فضاء- T_2.

الحل : يترك للقارئ كتمرين

نظرية (٦. ٢٥) :

كل فضاء متري يكون فضاء- T_2.

البرهان :

نفرض أن (X,d) فضاء متري ، من $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ وأن تعريف الفضاء المتري ينتج أن $d(x,y)=\varepsilon>0$. نعتبر الكرتان المفتوحتان $H=S(y,\frac{1}{3}\varepsilon)$, $G=S(x,\frac{1}{3}\varepsilon)$ إذاً H, G مجموعتان مفتوحتان في الفضاء المتري بحيث أن $y\in H, x\in G$ والآن نبين أن $G\cap H=\phi$ لذلك نفرض أن $p\in G\cap H$ من ذلك نستنتج أن $d(x,p)<\frac{1}{3}\varepsilon$ وكذلك $d(y,p)<\frac{1}{3}\varepsilon$ ولكن

$$d(x,y)\leq d(x,p)+d(y,p)<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon$$

وهذا تعارض مع أن $d(x,y)=\varepsilon$ ومن ثم فإن $G\cap H=\phi$ أي أن (X,d)

فضاء- T_2.

نظرية (٦. ٢٦) :

إذا كـان (X,τ) فضـاء توبولوجي فإن (X,τ) يكون فضاء- T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x\in X$ فإن $\{x\}=\cap\{F:F\in \mathcal{N}_x\}$ حيث F جوار مغلق أي أن تقاطع الجوارات المغلقة للنقطة x يطابق المجموعة $\{x\}$.

البرهان :

أولا : نفرض أن (X,τ) فضاء- T_2 وأن $x\neq y$، على ذلك توجد مجموعتان مفتوحـتان $U_i ,V_i\in\tau$ بحيـث أن $x\in U_i$, $y\in V_j$, $U_i\bigcap V_j=\phi$، ومن ثم فإن $U_i\subseteq V_j^c$ وهذا يؤدي إلى $x\in U_i\subseteq\overline{U_i}\subseteq\overline{V_i^c}=V_j^c$ لأن V_j^c مغلقـة وبالـتالي فإن $x\in U_i\subseteq\overline{U_i}\subseteq F_i$ أي أن F_i جوار مغلق للنقطة x لا يحتوي على y ومن ثم فإن : $\{x\}=\cap\{F_i :F_i\in \mathcal{N}_x\}$

ثانيا : نفرض أن لكل $x\in X$، المجموعة x يمكن التعبير عنها بالعلاقة الآتية:

$$\{x\}=\cap\{F_i :F_i\in \mathcal{N}_x\}$$

حيث F_i جوار مغلق للنقطة x.

سـوف نـبرهن عـلى أن الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_2 ، لذلك نفرض أن $x\neq y$ فإنـه يوجـد جـوار مغلـق F يحتوي x ولا يحتوي y وعليه تكون $V=F^c$ مجموعـة مفـتوحة تحتوي y ولا تحتوي x وحيث أن F جوار مغلق يحـتوي x فإنـه توجـد مجموعة مفتوحة U تحتوي x بحيث أن $x\in U\subseteq F$ وتحقق أن $U\cap V=\phi$ وبالتالي فإن (X,τ) فضاء- T_2 .

نتيجة (٦. ٢٧) :

الفضاء (X,τ) يكون فضاء- T_2 إذا وفقط إذاكان لكل $x,y\in X$ حيث $x\neq y$ توجد مجموعة مفتوحة $U\in\tau$ بحيث أن $x\in U$, $y\notin\overline{U}$ أي أن

$$X \text{ is } T_2-space \Leftrightarrow \forall x,y\in X, x\neq y,$$
$$\exists\ U\in\tau: x\in U,\ y\notin\overline{U}$$

البرهان :

نفرض أن X فضاء- T_2 ، $x,y\in X$ حيث $x\neq y$ فإنه توجد مجموعتان $U,V\in\tau$ بحيث أن $x\in U$ ، $y\in V$ ، $U\cap V=\phi$. إذاً

$$U\cap V=\phi \Rightarrow U\subseteq V^c \Rightarrow \overline{U}\subseteq \overline{V^c}=V^c \Rightarrow y\notin\overline{U}$$

بفرض أن $x,y\in X$ حيث $x\neq y$ وأنه توجد مجموعة مفتوحة $U\in\tau$ بحيث أن $x\in U, y\notin\overline{U}$. إذاً $y\in\overline{U}^c=V \Rightarrow V\in\tau, y\in V$.

وعليه فإن : $U\cap V=U\cap\overline{U}^c=\phi$. ومن ثم فإن (X,τ) فضاء- T_2 .

نظرية (٦. ٢٨) :

خاصية أن يكون الفضاء (X,τ) هو فضاء- T_2 هي خاصية (وراثية) توبولوجية.

البرهان :

تترك للقارئ كتمرين.

نظرية (٦. ٢٩) :

نفرض أن $f,g:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ دالتان متصلتان من الفضاء التوبولوجي (X,τ_1) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,τ_2) . إذا كان (Y,τ_2) فضاء- T_2 فإن المجموعة $A=\{x:f(x)=g(x)\}$ تكون مجموعة مغلقة .

البرهان :

نحاول إثبات أن المجموعة $A^c=\{x:f(x)\neq g(x)\}$ مجموعة مفتوحة .

نفرض أن $x\in A^c$ إذاً $f(x)\neq g(x)$ حيث أن (Y,τ_2) فضاء- T_2

بالـــــتالي توجـــــد مجموعـــــتان مفتوحـــــتان $U, V \in \tau_2$ بحيــــث أن $f(x) \in U, g(x) \in V$ ، $U \cap V = \phi$ وحيث أن f, g دالتان متصلتان فإن $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau_1$ أي أن :

$$x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = W \in \tau$$

وهذا يؤدي إلى أن : $x \in W \subseteq A^c$. ومن ثم فإن A^c مجموعة مفتوحة .

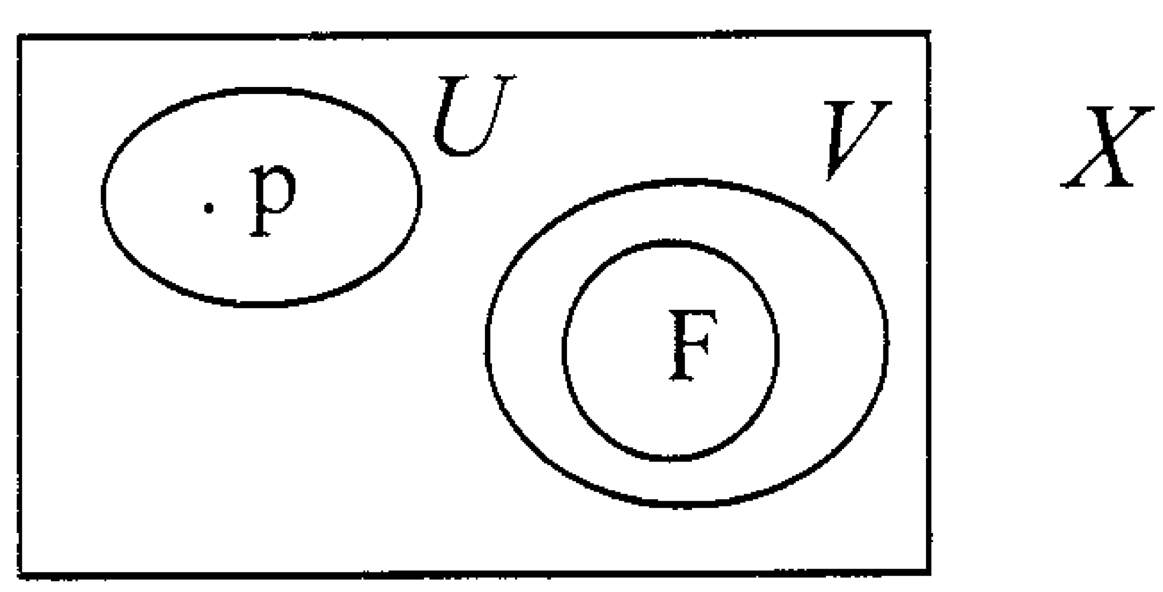
الفضاءات المنتظمة والفضاءات الطبيعية (الناظمية) :

(Regular Space and Normal Space)

تعريف (٦. ٣٠) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) بأنه فضاء منتظم **(Regular space)** إذا وجـــد لأي مجموعـــة مغلقة F وأي نقطة p لا تنتمي للمجموعة F مجموعتان مفتوحتان U, V بحيث يكون $p \in U$ ، $F \subset V$ ، $U \cap V = \phi$ أي أن :

$$X \text{ is regular} \Leftrightarrow \forall F \text{ closed}, \forall p \notin F, \exists U, V \in \tau, \\ p \in U, F \subset V, U \cap V = \phi$$



ملاحظة :

يعـــود الفضل في تعريف الفضاء المنتظم إلى العالم فيتروس**(Vietrories)** الذي قدمه في عام ١٩٢١م .

تعريف (٦. ٣١) :

يقال للفضاء (X, τ) إنه فضاء $-T_3$ إذا كان منتظماً وفضاء $-T_1$ أي أن $T_3 = regular + T_1$.

ملاحظة :

لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنتظمة والفضاءات- T_1 وهذا يتضح من المثال التالي.

مثال (٦. ٣٢) :

لتكن $X=\{a,b,c\}$ و أن τ توبولوجي معرف على X بالصورة :

$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ فإن المجموعات المغلقة في X هي :

وأن $\Im=\{\phi,X,\{b,c\},\{a\}\}$

$$b\notin\{a\}\Rightarrow\exists\{a\},\{b,c\}\in\tau,b\in\{b,c\},\{a\}\subseteq\{a\}$$
$$\{a\}\cap\{b,c\}=\phi$$
$$c\notin\{a\}\Rightarrow\exists\{a\},\{b,c\}\in\tau,c\in\{b,c\},\{a\}\subseteq\{a\},$$
$$\{a\}\cap\{b,c\}=\phi$$
$$a\notin\{b,c\}\Rightarrow\exists\{a\},\{b,c\}\in\tau,a\in\{a\},\{b,c\}\subseteq\{b,c\}$$
$$\{a\}\cap\{b,c\}=\phi$$

وبالتالي فإن (X,τ) فضاء منتظم ولكنه ليس فضاء- T_1 ولا فضاء- T_2.

كذلك المثال التالي يوضح أنه قد يكون هناك فضاء- T_1 لكنه ليس فضاء منتظم .

مثال (٦. ٣٣) :

علمنا مما سبق أن فضاء المتممات المنتهية هو فضاء- T_1 ، سوف نبين أنه ليس فضاء منتظم ، من أجل ذلك نفرض العكس ، أي نفرض أن فضاء المتممات المنتهية (X,C) منتظم وأن $x,y\in X$ ، حيث X لا نهائية وبالتالي $\{x\}$ مجموعة مغلقة لأنه فضاء- T_1 وأن $y\notin\{x\}$ ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U,V بحيث أن $U\cap V=\phi, y\in U, \{x\}\subseteq V$ ، من تعريف توبولوجي المتممات المنتهية U^c,V^c مجموعات منتهية وعليه يكون $U^c\cup V^c$ مجموعة منتهية لكن $U\cap V=\phi \Rightarrow (U\cap V)^c=X=U^c\cup V^c$ أي أن X

مجموعة منتهية وهذا تناقض إذاً (X,C) فضاء ليس منتظم.

مثال (٦. ٣٤) :

كل فضاء غير منفصل (X,I) حيث X تحتوي على أكثر من نقطة هو فضاء منتظم ولا يكون T_o أو T_1 أو T_2.

مثال (٦. ٣٥) :

كل فضاء منفصل (X,D) هو فضاء منتظم .

نظرية (٦. ٣٦) :

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي فإن الخواص التالية متكافئة :-

(١) X فضاء منتظم .

(٢) لكل $x\in X$ ، $U\in\tau$ بحيث أن $x\in U$ توجد $V\in\tau$ بحيث أن :

$$x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq U$$

(٣) كل جوار للنقطة $x\in X$ يحتوي على جوار مغلق.

البرهان :

(١) $\Leftarrow$ (٢) :

نفرض $x\in X$ ، $U\in\tau$ بحيث أن $x\in U$ إذاً U^c مجموعة مغلقة ، $x\notin U^c$ وحيث أن X فضاء منتظم ، فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $W,V\in\tau$ بحيث يكون $V\cap W=\phi$, $U^c\subseteq W$, $x\in V$ وحيث أن W^c مجموعة مغلقة فإن :

$$V\subseteq W^c\Rightarrow\overline{V}\subseteq\overline{W^c}=W^c\Rightarrow x\in V\subset\overline{V}\subseteq W^c\subseteq U$$

(٢) $\Leftarrow$ (١) :

بفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x\notin F$ فإن F^c مجموعة مفتوحة ، $x\in F^c$ ومن (٢) نجد أنه توجد مجموعة مفتوحة V حيث $x\in V$ ، $x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq F^c$.

ومن ذلك نستنتج أن $V\cap\overline{V}^c=\phi$, $\overline{V}^c\in\tau$, $x\in V,F\subseteq\overline{V}^c$ (لأن $V\subseteq\overline{V}$) وبالتالي فإن X فضاء منتظم .

(١) $\Leftarrow$ (٣) :

نفرض أن N جوار للنقطة x لذلك فإنه توجد مجموعة مفتوحة V حيث $x\in V\subseteq N$ إذاً V^C مجموعة مغلقة ، $x\notin V^c$ وحيث أن X فضاء منتظم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان U,W بحيث يكون : $x\in U,V^c\subseteq W,U\cap W=\phi$ ومن ذلك نستنتج أن $W^c\subseteq V$ ، W^c مجموعة مغلقة ، $W^c\subseteq V\subseteq N$ أي أن N تحتوي W^c ، W^c جوار مغلق للنقطة x (لأن $x\in V\subseteq W^c$).

والعكس ، نفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x\notin F$ فإن $x\in F^c$ حيث F^c مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن F^c جوار للنقطة x لكل $x\in F^c$ ومن الفرض (٣) يوجد جوار مغلق $H\subseteq F^c$ للنقطة x . إذاً $F\subseteq H^c$ وحيث أن H جوار للنقطة x فإنه توجد مجموعة مفتوحة U بحيث يكون $x\in U\subseteq H,U\cap H^c=\phi$ ومن ذلك نجد أن $x\in U,F\subseteq H^c,U\cap H^c=\phi$ أي أن X فضاء منتظم .

نتيجة (٦. ٣٧) :

الفضاء (X,τ) يكون منتظم إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة G يمكن التعبير عنها بالصورة : $G=\cup\{W\in\tau:\overline{W}\subseteq G\}$

البرهان :

بفرض أن (X,τ) فضاء منتظم ، $G\in\tau$ من النظرية السابقة فإنه توجد لكل $x\in G$ مجموعة مفتوحة W بحيث يكون $x\in W\subseteq\overline{W}\subseteq G$ والعكس ،

نفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن F^c مجموعة مفتوحة بالتالي فإن :

$$F^c = \cup \{W \in \tau : \overline{W} \subseteq F^c\}$$

وحيث أن $x \in F^c$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة W_x بحيث يكون $x \in W_x , \overline{W_x} \subseteq F^c$ ومن ذلك نرى أن $V = (\overline{W_x})^c \supseteq F$ ، $W_x \cap V = \phi$. أي أن (X, τ) فضاء منتظم .

نتيجة (٦. ٣٨) :

الفضاء (X, τ) يكون فضاء منتظم إذا وفقط إذا كانت لكل مجموعة مغلقة F فإن تقاطع الجوارات المغلقة للمجموعة F يطابق المجموعة F أي أن :

$$F = \cap \{ N : F \text{ جوار مغلق لـ } N \}$$

البرهان :

نفرض أن F مجموعة مغلقة، $x \notin F$ فإن $x \in F^c$ ، F^c مجموعة مفتوحة، من النظرية السابقة نستنتج أن توجد مجموعة مفتوحة V بحيث أن $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$. إذاً $F \subseteq (\overline{V})^c \subseteq V^c$. وحيث أن $(\overline{V})^c$ مجموعة مفتوحة فإن V^c جوار مغلق للمجموعة F ومنها نحصل علي :

$$F = \cap \{ V^c : F \text{ جوار مغلق لـ } V^c \}$$

$$= \cap \{ V^c : F \text{ جوار مغلق لـ } N \}$$

والعكس ، لنفرض أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإنه يوجد جوار مغلق N للمجموعة F لا يحتوي x أي توجد مجموعة مفتوحة U بحيث يكون $F \subseteq U \subseteq N$ ومن ثم فإن المجموعتين U , N^c مفتوحتان حيث أن : $x \in N^c , F \subseteq U$. أي أن (X, τ) فضاء منتظم .

نظرية (٦. ٣٩) :

كل فضاء- T_3 يكون فضاء- T_2.

البرهان :

نفـرض أن $x, y \in X$ حيـث $x \neq y$ والفضاء (X, τ) فضاء- T_3 ، حيث أن (X, τ) فضاء- T_1 فإن $\{x\}$ مجموعة مغلقة حيث $y \notin \{x\}$ ، لكن (X, τ) فضـاء منـتظم وبذلـك توجدمجموعتان $U, V \in \tau$ بحيث يكون $y \in U, \{x\} \subseteq V, U \cap V = \phi$ ومـن ذلـك نستنتج أن (X, τ) فضاء- T_2.

نظرية (٦. ٤٠) :

إذا كان (X, τ) فضاء منتظم فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) (X, τ) فضاء- T_2.

(٢) (X, τ) فضاء- T_1 .

(٣) (X, τ) فضاء- T_o.

البرهان :

واضح أن (١) $\Leftarrow$ (٢) $\Leftarrow$ (٣) . ونبين فقط أن (٣) $\Leftarrow$ (١)

لـنفرض أن $x, y \in X$ حيث $x \neq y$ وأن (X, τ) فضاء- T_o لذلك حسب نظرية(٦. ٨) يكون إما $x \notin \overline{\{y\}}$ أو $y \notin \overline{\{x\}}$.

بفـرض أن $x \notin \overline{\{y\}}$ وحيث أن المجموعة $\overline{\{y\}}$ مغلقة والفضاء (X, τ) منتظم فإنـه توجد مجموعتان مفتوحتان $U, V \in \tau$ بحيث أن : $x \in U, \overline{\{y\}} \subseteq V$ ، $U \cap V = \phi$ من ذلك نرى أن (X, τ) فضاء- T_2.

نظرية (٦. ٤١) :

خاصية أن يكون الفضاء منتظما أو T_3 هي خاصية وراثية.

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء منتظم ، (A,τ_A) فضاء جزئي منه ، ولتكن B مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئى (A,τ_A) ، $x\in A$ حيث $x\notin B$.

وبالتالي توجد مجموعة مغلقة F في الفضاء الكلي (X,τ) حيث $B=A\cap F$ وبموجب أن الفضاء الكلي منتظم وأن F مجموعة مغلقة في X وأن $x\notin F$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U,V\in\tau$ بحيث أن $x\in U, F\subseteq V$ ، $U\cap V=\phi$ ومن ثم فإنه توجد $U_1,V_1\in\tau_A$ بحيث يكون $U_1=A\cap U$ ، $V_1=A\cap V$ ، حيث $x\in U_1, B\subseteq V$ ، $U_1\cap V_1=\phi$.

أي أن (A,τ_A) فضاء منتظم.

نظرية (٦. ٤٢) :

خاصية أن يكون الفضاء المنتظم هي خاصية توبولوجية.

البرهان :

نفرض أن $f:X\to Y$ دالة توبولوجية من الفضاء المنتظم (X,τ) إلى الفضاء (Y,υ) وأن F مجموعة مغلقة في Y حيث $x\notin F, x\in Y$ وحيث أن f دالة تناظر أحادي ومتصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X وأن $f^{-1}(x)\notin f^{-1}(F)$. لكن (X,τ) فضاء منتظم ، بذلك توجد مجموعتان مفتوحتان $U,V\in\tau$ بحيث يكون $f^{-1}(x)\in U,\ f^{-1}(F)\subseteq V$ ، $U\cap V=\phi$. ولكن $f(V), f(U)$ مجموعتان مفتوحتان في Y ، حيث

$$x\in f(U), F\subseteq f(V), f(U)\cap f(V)=\phi$$

أي أن (Y,υ) فضاء منتظم .

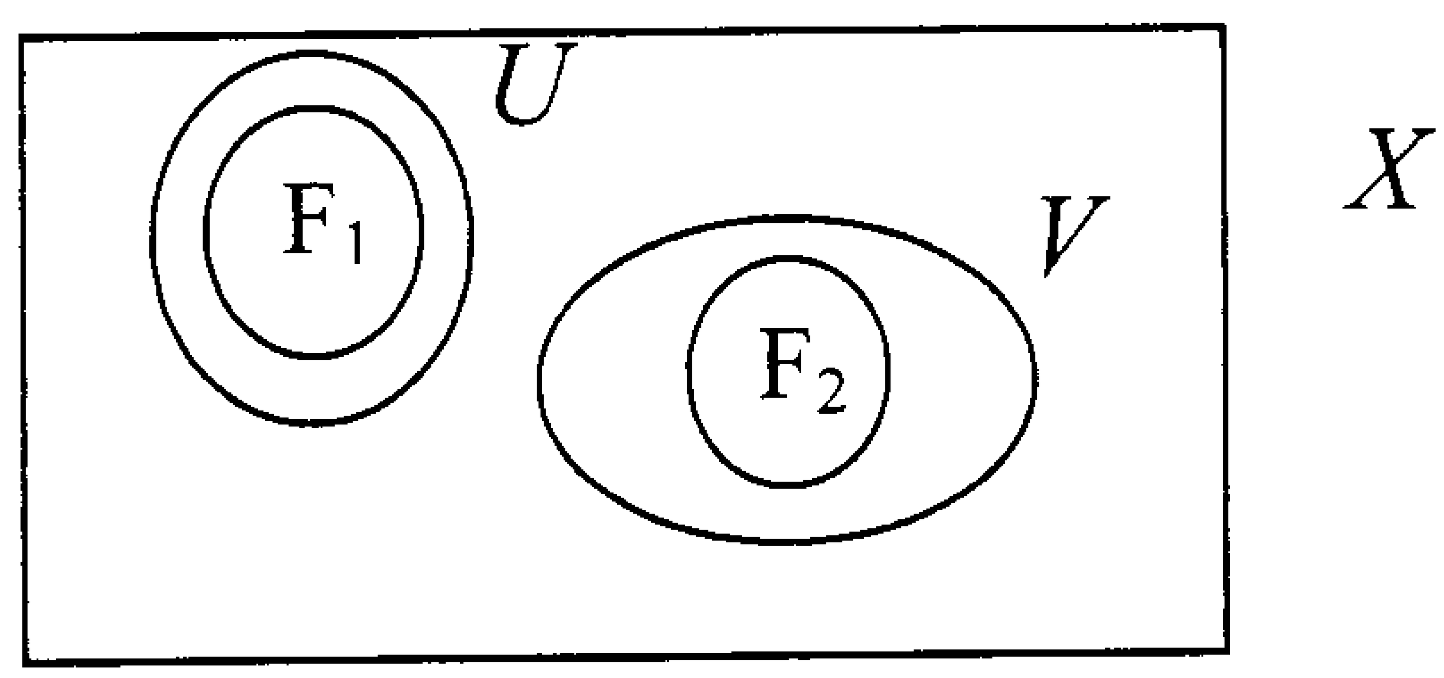
نظرية (٦. ٤٣) :

خاصية أن يكون الفضاء- T_3 هي خاصية توبولوجية .

الفضاء الطبيعي : Normal Space

تعريف (٦. ٤٤) :

يسمى الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاء طبيعي إذا وفقط إذا وجد لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين في X مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان إحداهما تحتوي على إحدى المجموعتين المغلقتين بينما تحتوي الثانية على المجموعة الأخرى. أي أن إذا كانت F_1, F_2 مجموعتين مغلقتين في X حيث $F_1 \cap F_2 = \phi$ فإنه توجد $U, V \in \tau$ بحيث $F_1 \subseteq U, F_2 \subseteq V, U \cap V = \phi$.



ملاحظة :

لا يوجد ارتباط بين الفضاءات المنتظمة والفضاءات الطبيعية وذلك يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (٦. ٤٥) :

بفرض أن $X = \{a, b, c\}$ وأن τ توبولوجي على X حيث

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

من السهل ملاحظة أن (X,τ) فضاء طبيعي لأن المجموعات المغلقة في X هي :

$$\phi, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$$

لايجاد مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين يجب أن تكون إحداهما هي ϕ ولتكن $F_1 = \phi$ بالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان هما X, ϕ حيث $\phi = F_1 \subseteq \phi, F_2 \subseteq X$.

من جانب آخر (X,τ) ليس منتظماً حيث توجد مجموعة مغلقة $\{b,c\}$ ، $a\notin\{b,c\}$ ولا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان بحيث تحتوي إحداهما على النقطة a وتحتوي الأخرى على المجموعة المغلقة $\{b,c\}$ ، أيضا (X,τ) ليس فضاء- T_1 لأن المجموعة $\{a\}$ ليست مغلقة .

المثال التالي يوضح أنه قد يكون الفضاء طبيعي ولكنه ليس فضاء- T_o .

مثال (٦. ٤٦) :

بفرض أن $X=\{a,b,c\}$ $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ من السهل أن نرى أن الفضاء (X,τ) فضاء طبيعي لكنه ليس فضاء- T_o لأن $b\neq c$ والمجموعة الوحيدة التي تحتوي b هي X حيث $c\in X$.

والمثال التالي يوضح أنه قد يكون الفضاء هو فضاء- T_o ولكنه ليس طبيعي.

مثال (٦. ٤٧) :

بفرض أن

$\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ، $X=\{a,b,c,d\}$

من السهل أن نرى أن (X,τ) هو فضاء- T_o ولكنه ليس فضاء طبيعي لأن $F=\{a,c,d\}$ هي مجموعة مغلقة ، $b\notin F$ ولا توجد مجموعة مفتوحة تحتوي F سوى المجموعة X التي تحتوي b أيضا .

مثال (٦. ٤٨) :

بفرض أن X مجموعة غير منتهية فإن فضاء المتممات المنتهية (X,C) لا يكون فضاء منتظم ولا فضاء طبيعي.

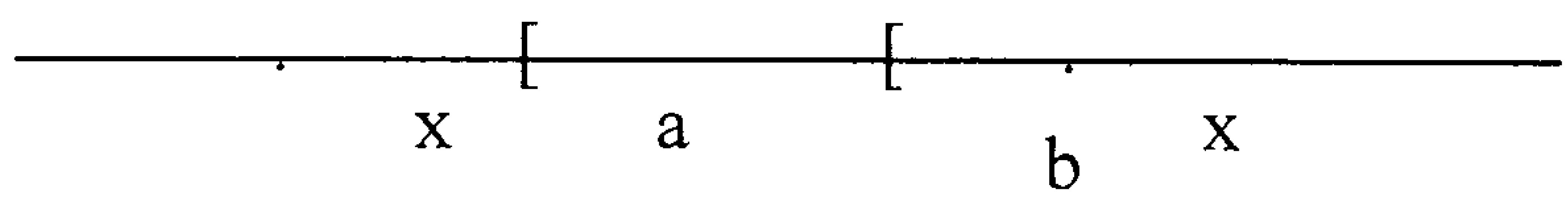
مثال (٦. ٤٩) :

ليكن (R,τ) هو توبولوجي النهاية السفلي أي التوبولوجي الذي أساسه

$$\mathcal{B}=\{[a,b):a,b\in R\}$$

يجب أن نلاحظ هنا إن عناصر الأساس مفتوحة ومغلقة في آن واحد وذلك لأن :

$$let\ x \notin [a,b) \Rightarrow x<a \quad or \quad b \leq x$$



فـإذا كانت $x<a$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة $[x,a)$ حيث $x \in [x,a)$ ، $[x,a) \cap [a,b) = \phi$ وإذا كانـت $b \leq x$ فإنـه توجـد مجموعـة مفتوحة $[x,x+1)$ تحتوي x ولا تتقاطع مع $[a,b)$ وهذا يؤدي إلى أن المجموعة $R-[a,b)$ مجموعة مفتوحة ومن ثم فإن $[a,b)$ مجموعة مغلقة ، من السهل أن نرى أن (R,τ) فضاء منتظم وفضاء طبيعي.

ملاحظة :

حيـث أنـه لا يوجـد ارتـباط بـين الفضاءات الطبيعية والمنتظمة وكذلك T_o, T_1, T_2 من أجل إيجاد علاقة بين هذه الفضاءات نعطي التعريف التالي :

الفضاء $-T_4$: T_4 - Space

تعريف (٦. ٥٠) :

يسـمى الفضاء (X,τ) فضاء$-T_4$ إذا كان فضاء طبيعي وكان فضاء T_1 أيضا أي أن :
$$T_4 - space \equiv T_1 + Normal$$

تعريف (٦. ٥١) :

كل فضاء$-T_4$ هو فضاء$-T_3$.

البرهان :

بفرض أن (X,τ) هو فضاء$-T_4$ ، $P \in X$ ، $F \subseteq X$ مجموعة مغلقة في X بحيث أن $P \notin F$ ، وعليه تكون المجموعة $\{p\}$ مغلقة ، لأن X فضاء$-T_1$ وحيـث أن X فضـاء طبيعي فإنه توجد مجموعتين مفتوحتين U,V وتحقق $\{p\} \subseteq V$ ، $F \subseteq U$, $U \cap V = \phi$ أي أن X فضاء منتظم وهو المطلوب .

المـــثال التالي يوضح أن خاصية أن يكون الفضاء (X,τ) طبيعي ليست خاصية وراثية .

مثال (٦. ٥٢) : نفرض أن

$X=\{a,b,c,d\}$ ، $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$

حيث أن $\Im_X=\{\phi,X,\{b,c,d\},\{c,d\},\{b,d\},\{d\}\}$

فإن المجموعتان المغلقتان والغير متقاطعتان هما فقط X,ϕ وبالتالي فإن (X,τ) فضاء طبيعي .

لنأخذ $Y=\{a,b,c\}$ فإن :

$$\tau_Y=\{Y,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$$
$$\Im_Y=\{\phi,Y,\{b,c\},\{c\},\{b\}\}$$

ومـــن ذلـــك نجد أن (Y,τ_Y) لا يكون فضاء طبيعي لأن $\{b\},\{c\}$ مجموعتان مغلقـــتان وغـــير متقاطعـــتان في Y ولا توجد مجموعتان مفتوحتان في Y وغير متقاطعتان وتحويان $\{c\},\{b\}$.

ملاحظة :

في المـــثال السابق إذا أخذنا $Y=\{b,c,d\}$ فهي مجموعة مغلقة في X من السهل أن نرى أن (Y,τ_Y) فضاء طبيعي .

نظرية (٦. ٥٣) :

كل فضاء جزئي مغلق من فضاء طبيعي يكون فضاء طبيعي .

البرهان :

نفـــرض أن (X,τ) فضاء طبيعي ، (Y,τ_Y) فضاء جزئي منه حيث Y مجموعـــة مغلقـــة في X ، نفرض أن $F_1,F_2\in\Im_Y$ مجموعتان مغلقتان في Y بحيـــث أن $F_1\cap F_2=\phi$ من نظرية (٣. ٣. ٩) فإن $F_1,F_2\in\Im_X$ ، وحيث

أن (X,τ) فضاء طبيعي فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U,V\in\tau$ بحيث أن :

$$F_1\subseteq U \quad ,F_2\subseteq V ,U\cap V=\phi$$

وبالتالي فإن $U_1=Y\cap U ,V_1=Y\cap V\in\tau_Y$ وتحقق

$$F_1\subseteq U\cap Y=U_1 \ ,\ F_2\subseteq V\cap Y=V_1$$

$$U_1\cap V_1=(Y\cap U)\cap(Y\cap V)=Y\cap(U\cap V)=\phi$$

أي أن (Y,τ_Y) هو فضاء طبيعي .

الفضاءات المنتظمة تماماً : Completely regular space

سوف نذكر هنا تمهيداً مهماً يسمى تمهيد أوريسون **(Urysohn's l.emma)** بدون برهان .

نظرية (٦. ٥٤) :

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي فإن X يكون فضاء طبيعي إذا وفقط إذا كان لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين F,H من الفضاء X توجد دالة متصلة $f:X\to I=[0,1]$ بحيث أن $f(F)=1\ ,f(H)=0$. وحيث أن $[0,1]\cong[a,b]$ فإنه يمكن إعادة صياغة النظرية السابقة بالصور :

نظرية (٦. ٥٥) :

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء طبيعي إذا وفقط إذا كان لكل مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين F,H من الفضاء X توجد دالة متصلة $f:X\to[a,b]$ بحيث أن $f(H)=a,f(F)=b$.

تعريف (٦. ٥٦) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاء منتظم تماماً إذا كان لكل $x\in X ,F\in\Im_X$ بحيث أن $x\notin F$ توجد دالة متصلة $f:X\to[0,1]$ بحيث أن $f(F)=1,f(X)=0$.

نظرية (٦. ٥٧) :

الفضاء المنتظم تماماً هو فضاء منتظم.

البرهان :

نفرض أن (X,τ) فضاء منتظم تماماً ، $x\in X$, $F\in\Im_X$ بحيث أن $x\notin F$ ، فإنه توجد دالة متصلة $f:X\to[0,1]$ بحيث أن $f(F)=1, f(X)=0$ ولكن $[0,1]$ فضاء جزئي من فضاء- T_2 (لأن R فضاء- T_2) وبالتالي فإن $[0,1]$ فضاء- T_2 ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان U,V بحيث أن $1\in U,0\in V$ وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان في الفضاء X وتحقق $x\in f^{-1}(V),F\subseteq f^{-1}(U)$ وبالتالي فإن X فضاء منتظم .

ملاحظة :

عكس النظرية السابقة غير صحيح في الحالة العامة والنظرية التالية تعطي الشرط الضروري والكافئ لكي يكون الفضاء منتظم تماماً ، كذلك الفضاءات الطبيعية ليست من الضروري أن تكون منتظمة تماماً.

نظرية (٦. ٥٨) :

إذا كان (X,τ) فضاء طبيعي فإن X يكون منتظم تماماً إذا وفقط إذا كان منتظم .

البرهان :

سوف نبرهن فقط على أن كل فضاء منتظم وطبيعي يكون منتظم تماماً ، ليكن (X,τ) فضاء منتظم وطبيعي وأن F مجموعة مغلقة في X ، $x\notin F$ ، ومن ذلك توجد مجموعتان مفتوحتان U,V بحيث أن $x\in V$, $F\subseteq U$, $U\cap V=\phi$ وحيث أن $H=U^c$ مجموعة مغلقة

وتحقق $F \cap H = \phi$ فإنه حسب نظرية أوريسون توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث أن $f(H)=0, f(F)=1$ وحيث أن $x \in V \subseteq U^c$ فإن $x \in H$ أي أن $f(X)=0$ ، $f(F)=1$ أي أن الفضاء X منتظم تماماً.

ملاحظة :

يمكن توضيح الجزء الأخير من برهان النظرية السابقة بطريقة مكافئة كالتالي :

حيث أن F مجموعة مغلقة ، $x \notin F$ فإن F^c مجموعة مفتوحة وبموجب أن X فضاء منتظم فإنه حسب نظرية (٦. ٣٦) توجد مجموعة مفتوحة V تحقق $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c$ ومن هذا يتضح أن المجموعتين $\overline{V}, F$ مغلقتين وغير متقاطعتين ، طبقا لنظرية أوريسون (٦. ٥٤) توجد دالة $f : X \to [0,1]$ متصلة تحقق العلاقات الآتية : $f(y)=0$ إذا كانت $f(y)=1, y \in \overline{V}$ إذا كانت $y \in F$ وحيث أن $x \in \overline{V}$ فإن $f(x)=0$ وكذلك $f(F)=1$ أي أن الفضاء X منتظم تماماً.

فضاء تيخونوف : Tychonoff space

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) فضاء تيخونوف أو فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ إذا كان منتظم تماماً وكذلك فضاء- T_1.

من نظرية (٦. ٥٦) يتضح أن $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$.

نظرية (٦. ٥٩) :

خاصية أن يكون الفضاء فضاء تيخونوف هي خاصية وراثية .

البرهان :

يكفي أن نبين أنه إذا كان (X, τ) فضاء منتظم تماماً فإن أي فضاء جزئي

(Y,τ_Y) حيث $Y\subseteq X$ هو أيضا منتظم تماماً ، لذلك نفرض أن E مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) ، $x\in Y$ حيث $x\notin E$ ، حسب نظرية (٣. ٩) توجد مجموعة مغلقة F في X بحيث أن $E=Y\cap F$ وحيث أن $x\notin E$ فإن $x\notin Y\cap F$ ولكن $x\in Y$ ومن ذلك نجد أن $x\notin F$. وحيث أن (X,τ) فضاء منتظم تماماً فإنه توجد دالة متصلة $f:X\to[0,1]$ بحيث أن $f(F)=1$, $f(X)=0$ ، وبتقييد الدالة f على الفضاء الجزئي Y تكون $f_Y:Y\to[0,1]$ دالة متصلة وتحقق $f(E)=f(A\cap F)=1$ ، $f(X)=0$. وهو المطلوب.

<u>نظرية (٦. ٦٠) :</u>

خاصية أن يكون الفضاء منتظم تمامًا هي خاصية توبولوجية.

<u>البرهان :</u>

نفرض أن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ دالة هومومورفيزم ، (X,τ) فضاء منتظم تماماً لإثبات أن (Y,τ^*) يكون أيضا منتظم تماماً نفرض أن $F\subseteq Y$ مجموعة مغلقة ، $y\in F$ حيث $y\in Y$ وحيث أن f دالة متصلة فإن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في X تحقق $x=f^{-1}(y)\notin f^{-1}(F)$ لكن (X,τ) فضاء منتظم تماماً فإنه توجد دالة متصلة $g:X\to[0,1]$ بحيث تكون $g(X)=0$, $g(f^{-1}(F))=1$ وحيث أن f دالة هومومورفيزم فإن f^{-1} دالة متصلة ومن ذلك نجد أن : $h=gof^{-1}:Y\to[0,1]$ دالة متصلة وتحقق :

$$h(y)=gof^{-1}(y)=gh(f^{-1}(y))=0\ ,$$
$$h(F)=gof^{-1}(F)=g(f^{-1}(F))=1$$

أي أن (Y,τ^*) فضاء منتظم تماماً.

نظرية (٦. ٦١) :

إذا كان (X,τ) فضاء تيخونوف $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ فإنه توجد دالة حقيقية $f:X\to R$ بحيث أن $f(x)\neq f(y)$.

البرهان :

نفـرض أن (X,τ) فضاء تيخونوف ، $x,y\in X$ بحيث أن $x\neq y$ ، إذاً (X,τ) فضـاء T_1- . إذاً $\{y\}$ مجموعـة مغلقـة تحقـق $x\notin\{y\}$ ، لكن (X,τ) فضـاء منتظم تماماً وبالتالي توجد دالة متصلة $f:X\to R$ بحيث أن $f(x)=0\ ,\ f(y)=f(\{y\})=1$ أي أن $f(x)\neq f(y)$.

ملاحظة : النظرية السابقة تعني أن عائلة $C(X,R)$ كل الدوال الحقيقية المتصلة في فضاء تيخونوف تفصل بين نقاط R.

الفضاءات الطبيعية تماما : Completely normal space

تعريف (٦. ٦٢) :

يقـال أن المجموعـتين الجزئيـتين A,B من الفضاء التوبولوجي (X,τ) منفصـلتين إذا كان $\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\phi$ أي أن A منفصلة عن B ، B منفصلة عن A ، سوف نرى أن المجموعات المنفصلة تلعب دوراً هاماً في الفضاءات المترابطة .

تعريف (٦. ٦٣) : Completely normal space

يقـال أن الفضـاء الـتوبولوجي (X,τ) فضاء طبيعي تماماً إذا كان لكل مجموعـتين منفصـلتين A,B من X توجد مجموعتين مفتوحتين U,V بحيث تكون $U\cap V=\phi, A\subseteq U, B\subseteq V$.

ومن هذا التعريف يتضح أن كل فضاء طبيعي تماماً هو فضاء طبيعي وذلك لأن أي مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين هما منفصلتين .

الفضاء - T_5 : (T_5 – space)

تعريف (٦. ٦٤) :

يقال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) بأنه فضاء- T_5 إذا كان فضاء طبيعي تماماً وكان فضاء- T_1 أي أن

$$T_5 = T_1 + completely\ normal\ space$$

من ذلك يتضح أن : $T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_o$

نظرية (٦. ٦٥) :

الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء طبيعي تماماً إذا وفقط إذا كان أي فضاء جزئي (Y,τ_Y) منه فضاء طبيعي .

البرهان :

بفرض أن (X,τ) فضاء طبيعي تماماً ، Y مجموعة جزئية من X ، A,B مجموعتين مغلقتين وغير متقاطعتين من الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) ، بالرجوع إلى نظرية (٣. ٣. ١٢) نجد أن : $\overline{A_X} \cap Y = \overline{A_Y} = A$ وينتج من ذلك أن :

$$B \cap \overline{A_X} = (B \cap Y) \cap \overline{A_X} = B \cap (Y \cap \overline{A_X})$$
$$= B \cap \overline{A_Y} = B \cap A = \phi$$

بالمثل نجد أن $A \cap \overline{B_X} = \phi$ وبالتالي فإن المجموعتين A,B منفصلتين في الفضاء الكلي (X,τ) ومن ثم فإنه توجد مجموعتين مفتوحتين U,V في الفضاء الكلي بحيث أن : $U \cap V = \phi\ , A \subseteq U , B \subseteq V$

ومن تعريف الفضاء الجزئي نجد أن المجموعتين $U \cap Y\ ,V \cap Y$ مفتوحتين في الفضاء الجزئي وتحقق :

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \phi\ ,$$
$$A \subseteq U \cap Y\ \ ,B \subseteq V \cap Y$$

وهذا يعني أن الفضاء الجزئي (Y , τ_Y) طبيعي ، العكس ، لنفرض أن أي فضاء جزئي (Y , τ_Y) من الفضاء (X , τ) هو فضاء طبيعي ، لإثبات أن (X , τ) فضـــاء طبـــيعي تمامــاً ، لذلك نفرض أن A , B مجموعتين منفصلتين في الفضاء (X , τ) أي أن $A \cap \overline{B} = \phi \ , B \cap \overline{A} = \phi$ لـــــــــــــــــــــــــنفرض أن $Y = X - (\overline{A} \cap \overline{B})$ ومـــن الفـــرض نجـــد أن (Y , τ_Y) هو فضاء طبيعي والمجموعتان $Y \cap \overline{B} , Y \cap \overline{A}$ مغلقتان وغير متقاطعتان لأن :

$$(Y \cap \overline{A}) \cap (Y \cap \overline{B}) = Y \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$= [X - (\overline{A} \cap \overline{B})] \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \phi$$

ومن ثم فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان $U , V \in \tau$ بحيث أن

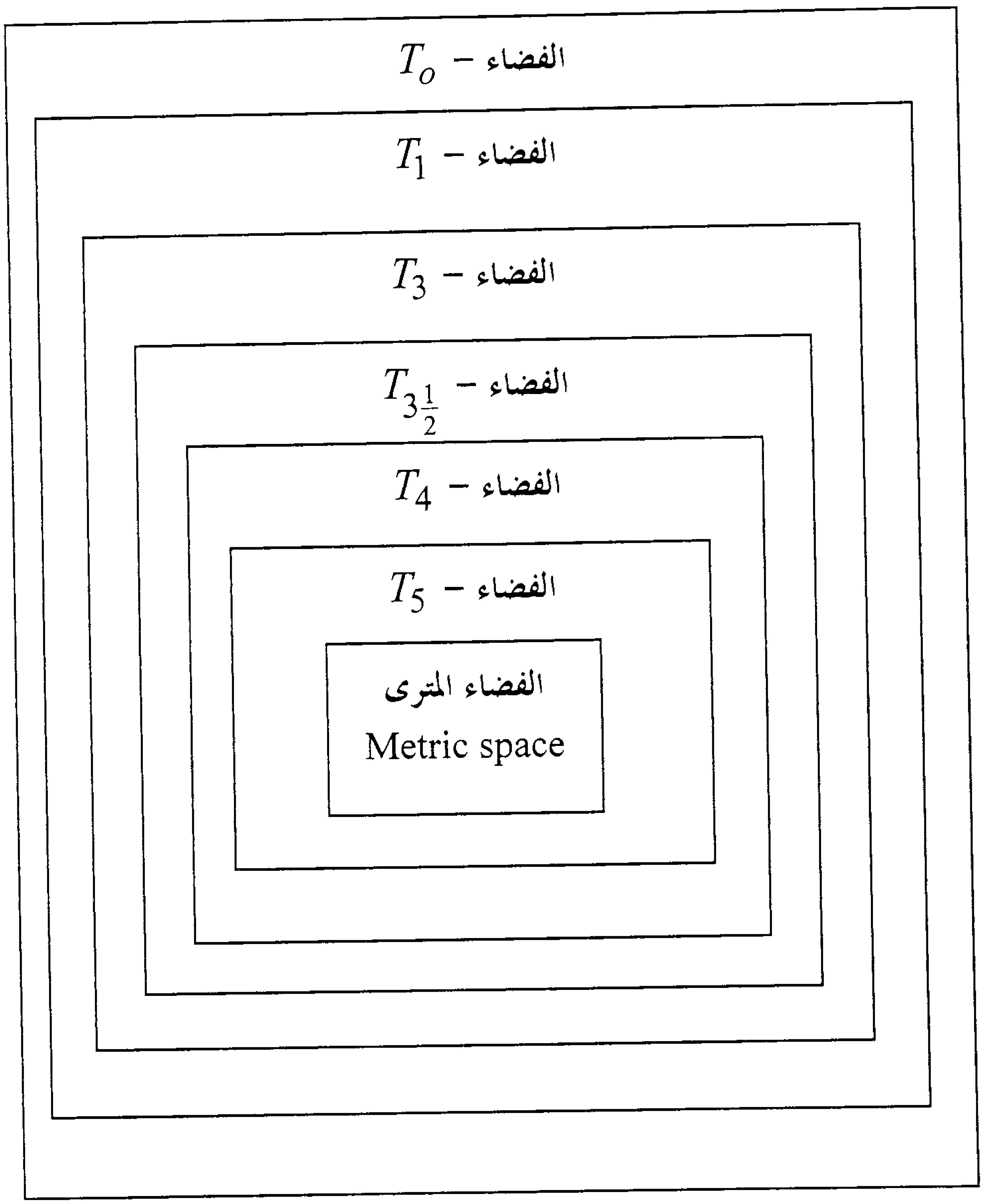
$$U \cap V = \phi \ , A \subseteq Y \cap \overline{A} \subseteq U , B \subseteq Y \cap \overline{B} \subseteq V$$

ولكـــن $Y = X - \overline{A} \cap \overline{B}$ مجموعـــة مفـــتوحة وبالتالي فإن U , V مجموعتان مفتوحتان في X وغير متقاطعتان وتحويان A , B إذاً الفضاء (X , τ) طبيعي تماماً.

ملاحظة :

حيث أن أي فضاء جزئي من فضاء- T_4 ليس من الضروري أن يكون فضاء- T_4. (راجـــع نظرية (٦. ٥٣)) وبالتالي فهو ليس طبيعي تماماً ومن ذلك نجد أن $T_5 \Rightarrow T_4$.

ممـــا ســـبق يمكن رسم الشكل التوضيحى لأحتواء الفضاءات التوبولوجيه لبعضها البعض كما يلى :



تمارين عامة على الباب السادس

(١) إذا كان (X,τ) فضاء- $T_o(T_1,T_2)$ ، $\tau \subseteq \tau^*$. أثبت أن (X,τ^*) يكون فضاء- $T_o(T_1,T_2)$.

(٢) بفرض أن $X=\{a,b,c,d\}$ كون توبولوجي τ على X بحيث يكون :

(i) (X,τ) فضاء- T_o

(ii) (X,τ) فضاء- T_1

(iii) (X,τ) فضاء- T_2

(٣) بين أنه إذا كان (X,τ) فضاء- T_2 حيث X مجموعة لا نهائية ، فإنه يوجد عدد لا نهائي من المجموعات المفتوحة المنفصلة.

(٤) إذا كان (X,τ) فضاء- T_o بحيث أنه توجد نقطة واحدة x كثيفة في X أي أن $\overline{\{x\}}=X$). بين أنه لا توجد نقطة أخرى $y\in X$ تحقق $\overline{\{y\}}=X$.

(٥) إذا كانت $X=\{a,b,c\}$ ، $\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

(i) هل (X,τ) فضاء- T_o

(ii) هل (X,τ) فضاء- T_1

(iii) هل (X,τ) فضاء- T_2

(iv) هل (X,τ) فضاء منتظم

(v) هل (X,τ) فضاء طبيعي.

(vi) هل (X,τ) فضاء منتظم تماماً.

(٦) ليكن X فضاء توبولوجي ، $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ على X. $\mathcal{B}$ يسمى أساس منتظم إذا وجد لأى عنصر $B\in\mathcal{B}$ مجموعة مفتوحة U تحقق $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq B$. أثبت أن الفضاء (X,τ) يكون فضاء منتظم إذا وفقط إذا كان للفضاء X أساس منتظم.

(٧) أثبت أن (X,τ) يكون فضاء طبيعي إذا وفقط إذا كان لكل $U,V\in\tau$ بحيث أن $U\cup V=X$ توجد $F_1,F_2\in\Im_X$ بحيث أن $F_1\subseteq U, F_2\subseteq V$ حيث $F_1\cup F_2=X$.

(٨) أعط مثال لفضاء توبولوجي طبيعي وليس منتظم.

(٩) أثبت أن كل فضاء منتهي ومنتظم فإنه يكون طبيعي.

(١٠) لتكن $A=\{\frac{1}{n}:n\in N\}$ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R.

بفرض أن $\tau=\{G\subseteq R:G=U-A_1, U\in\mathcal{U}, A_1\subseteq A\}$

حيث $(R,\mathcal{U})$ هو الفضاء العادى.

(i) أثبت أن τ توبولوجي على R.

(ii) أثبت (R,τ) أن فضاء$-T_2$.

(iii) أثبت أن (R,τ) فضاء غير منتظم.

(١١) بفرض أن (X,τ) فضاء$-T_2$. برهن أن كل متتابعة في X لها نقطة نهاية وحيدة.

(١٢) بفرض أن τ هو التوبولوجيعلى R المولد بواسطة الفترات النصف المفتوحة $[a,b)$ حيث $a<b$. بين أن (R,τ) فضاء$-T_2$ ومنتظم وطبيعي.

(١٣) بفرض أن X مجموعة مرتبة ، τ التوبولوجي المرتب أى أن τ مولد بواسطة المجموعات الجزئية التى على الصورة $\{x:x<a\}$ ، $\{x:x>a\}$ بين أن (X,τ) هو فضاء طبيعي.

(١٤) لتكن $X=[0,1[$ ، $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ على X حيث

$$\mathcal{B}=\{[a,b[:\ 0<b\leq 1\ ,\ 0\leq a<1\}$$

(i) أثبت أن (X,τ) فضاء منتظم.

(ii) أثبت أن (X,τ) فضاءاً منفصلاً.

(١٥) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجى. أثبت أن العبارات الآتية متكافئه :

(i) X فضاء- T_1

(ii) تقاطع المجموعات المفتوحة التى تحتوى المجموعة $A\subseteq X$ يطابق A .

(iii) تقاطع المجموعات المفتوحة التى تحتوى $x\in X$ يطابق $\{x\}$.

(iv) تقاطع المجموعات المغلقة التى تحتوى $x\in X$ يطابق $\{x\}$.

(v) لكل $x\in X$ فإن $\{x\}'=\phi$

(vi) لكل $x\in X$ فإن المجموعة $\{x\}$ مغلقة.

(١٦) إذا كـــان (X,τ) فضـــاء توبولوجـــى فإن العبارات الآتية متكافئة لكل $i=0,1,2$:

(i) X فضاء- T_i.

(ii) لكـــل $x,y\in X$ توجد دالة $f:X\to Y$ حيث Y فضاء- T_i بحيث يكون $f(x)\neq f(y)$.

الباب السابع

الفضاءات المحكمة (المتراصة)

Compact spaces

الباب السابع

الفضاءات المحكمة (المتراصة)

Compact spaces

مقدمة :

الإحكـــام (التراص) هو تعميم لبعض خواص المجموعات المحدودة والمغلقة في فضاء الأعـــداد الحقيقية ، حيث هناك نظريات تلعب دوراً هاماً في التحليل الرياضي كنظرية هـــاين- بوريـــل (Heine-Borel) والتي تنص على أن كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعـــداد الحقيقية تكون محكمة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة ، نظرية بولزانو- فيرشـــتراس (Bolzano-Weierstrass Theorem) ، والتي تنص على أن أي مجموعة جزئية غير منتهية من مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء الأعداد الحقيقية لها نقطة تراكم ونظـــرية كانتور للتقاطع (Cantor's intrection) و التي تنص على أنه : إذا كانت $\{F_n\}$ متتابعة تناقصية من المجموعات المغلقة الغير خالية في الفراغ المتري (X,d) وكانت $\lim_{n\to\infty} d(F_n)=0$ فإن $\cap F_n \neq \phi$.

ونظراً للأهمية البالغة لهذه النظريات في تطوير التحليل الرياضي والتوبولوجى سنقدم في هذا الباب مفهوم الأحكام في الفضاءات التوبولوجية وعلاقتها بالفضاءات الأخرى كما سندرس الخصائص الأساسية لهذا المفهوم .

بند(١) : الفضاءات المحكمة (المتراصة) : Compact spaces

تعريف (٧. ١. ١) :

يقـــال أن العائلـــة $\mathcal{G}=\{G_i : i\in I\}$ من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X بأنها غطاء (Cover) للمجموعة A إذا كانت :

$$A \subseteq \bigcup_i G_i = G_1 \cup G_2 \cup \ \ldots$$

وإذا كانت عناصر العائلة $\mathcal{G}$ مجموعات مفتوحة فإنه يقال عندئذ أن $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح

لـــلمجموعة A (open cover) . إذا كانـــت $\mathcal{G}$ غطـــاء للمجموعة A وكانت $\mathcal{G}^* = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ عائلـــة جزئية من $\mathcal{G}$ ومنتهية فإن $\mathcal{G}^*$ تسمى غطاء منتهي للمجموعة A إذا تحقق أن :

$$A \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

أو نقول أن $\mathcal{G}$ تحتوي على غطاء جزئي منتهي (finite subcover) للمجموعة A .

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجي $\mathcal{G} \subseteq P(X)$ فإن $\mathcal{G}$ تسمى غطاء للمجموعة X إذا كان اتحاد عناصر $\mathcal{G}$ يساوي X . أي أن

$$X = \cup \{G_i : G_i \in \mathcal{G} \,,\ \forall i \in N\}$$

وتسمى $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح إذا كانت عناصر $\mathcal{G}$ مجموعات مفتوحة.

ملاحظة (٧. ١. ٢) :

إذا كانت العائلة $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة X فإن لكل $x \in X$ توجد $G_{i_o} \in \mathcal{G}$ بحيث يكون $x \in G_{i_o}$.

تعريف (٧. ١. ٣) :

الفضـــاء الـــتوبولوجي (X, τ) يسمى فضاءاً محكماً (compact) إذا كان لكل غطاء مفتوح للفضاء X يوجد غطاء جزئي منتهي للفضاء X .

$$X \text{ is compact} \Leftrightarrow \forall\ \mathcal{G} = \{G_i : i \in N, G_i \in \tau\};\ X \subseteq \bigcup_{i} G_i\,;$$

$$\exists\ G_i, \forall i = 1, \ldots, n \ \text{ such that } \ X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

ويجـــب أن نلاحظ أن (X, τ) يكون فضاء غير محكم إذا وجد غطاء مفتوح للفضاء X لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

مثال (٧. ١. ٤) :

كل فضاء توبولوجي منتهي يكون محكم .

الحل :

نفرض (X,τ) فضاء توبولوجي ، X مجموعة منتهية ولتكن

$$X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

إذا كانت $\mathcal{G}=\{G_i : i\in N\}$ غطاء مفتوح للفضاء X فإنه لكل $x_j\in X$ توجد مجموعة $G_{ij}\in\mathcal{G}$ بحيث أن $x_j\in G_{ij}$ ومن هذا نجد أن :

$$x_1\in G_{i1}\ , x_2\in G_{i2}, \dots, x_n\in G_{in}$$

ومن ثم فإن $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}\subseteq G_{i1}\cup G_{i2}\cup\dots\cup G_{in}$

أي أن $\mathcal{G}^* = \{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ غطاء جزئي منتهي للمجموعة X .

مثال (٧. ١. ٥) :

فضاء المكملات المنتهية (X,C) فضاء محكم.

الحل :

(i) إذا كانت X منتهية فإنه طبقاً لمثال(٧. ١. ٤) تكون X محكمة

(ii) بفرض أن X لا نهائية وأن $\mathcal{G}=\{G_i : i\in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X . إذا كانت $G_o\in\mathcal{G}$ فإن G_o^c مجموعة منتهية ولتكن

$$G_o^c=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

وحيث أن $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة X فإنه توجد $G_{ij}\in\mathcal{G}$ بحيث تكون :

$$a_1\in G_{i1}\ , a_2\in G_{i2}, \dots, a_n\in G_{in}$$

ومن هذا نجد أن $G_o^c\subseteq G_{i1}\cup G_{i2}\cup\dots\cup G_{in}$

ومن ثم فإن $X=G_o\cup G_o^c\subseteq G_{i1}\cup G_{i2}\cup\dots\cup G_{in}$

ولكن $G_o\cup G_{i1}\cup G_{i2}\cup\dots\cup G_{in}\subseteq X$

إذاً $X=G_o\cup G_{i1}\cup G_{i2}\cup\dots\cup G_{in}$

أي أن $\mathcal{G}$ تحتوي على غطاء جزئي منتهي وبالتالي فإن الفضاء X محكم .

مثال (٧. ١. ٦) :

أي فضاء متقطع (X, D) غير منتهى هو فضاء غير محكم.

الحل :

نعتبر $\mathcal{G} = \{\{p\} : p \in X\}$ حيث أن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة لكل $p \in X$ فإن $\mathcal{G}$ غطــاء مفتوح للمجموعة X ولا يحتوي على غطاء جزئي منتهى ، وعلى هذا فإن X غير محكمة .

مثال (٧. ١. ٧) :

الفضاء الغير متقطع (X, I) هو فضاء محكم .

الحل :

حيــث أن $I = \{X, \phi\}$ فإن أي غطاء مفتوح للمجموعة X يجب أن يكون عــلى الصورة $\mathcal{G} = \{X\}$ وهو غطاء منتهى لأنه لا يحتوي إلا على عنصر واحد هو X.

مثال (٧. ١. ٨) :

بين أن فضاء النقطة المستبعدة (X, E) بدون النقطة p هو فضاء محكم.

الحل :

حيــث أن $E_p = \{X, U \subseteq X : p \notin U\}$ وإذا كانــت $\mathcal{G}$ غطــاء مفتوح لــلمجموعة X، $p \in X$ فإنــه توجد $G_{io} \in \mathcal{G}$ بحيث تكون $p \in G_{io}$. لكن المجموعة X هي المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحتوي p ولهذا فإن $X \in \mathcal{G}$ لكل غطــاء مفــتوح $\mathcal{G}$ للمجموعة X. وبالتالي فإن $\{X\}$ غطاء جزئي منتهى إذاً X فضاء محكم .

مثال (٧. ١. ٩) :

بين أن فضاء النقطة المختارة (X, P) بدون النقطة p هو فضاء غير محكم.

الحل :

نعلم أن $P_p=\{\phi,U\subseteq X:p\in U\}$. وبفرض أن X لا نهائية. إذا كانت $\mathcal{G}=\{\{p,x\}:x\in X\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X فإنه لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى لأن X لا نهائية وبالتالي فإن X غير محكم .

مثال (٧. ١. ١٠) :

الفضاء العادي $(R,\mathcal{U})$ غير محكم .

تعريف (٧. ١. ١١) :

يقال أن عائلة المجموعات $\mathcal{G}=\{G_i:\ i\in N\}$ لها خاصية التقاطع المنتهي Finite Intersection Property (F. I. P.) إذا كان تقاطع أي عائلة جزئية منتهية $\{G_{i1},G_{i2},\dots,G_{in}\}$ هو مجموعة غير خالية ، أي أن

$$G_{i1}\cap G_{i2}\cap\dots\cap G_{in}\neq\phi$$

ويقال أن $\mathcal{G}$ لها خاصية التقاطع الغير الخالي إذا كان $\cap\{G_i:G_i\in\mathcal{G}\}\neq\phi$

مثال (٧. ١. ١٢) :

العائلة $\mathcal{G}=\{(0,\frac{1}{n}):\ n\in N\}$ لها خاصية التقاطع المنتهي لأن تقاطع أي عائلة جزئية منتهية هو مجموعة غير خالية لأن :

$$(0,1)\cap(0,\frac{1}{2})\cap\dots\cap(0,\frac{1}{m})=(0,r)\neq\phi$$

حيث $r=\min\{1,2,\dots,m\}$. ونلاحظ هنا أن $\mathcal{G}$ نفسها لها خاصية التقاطع الخالي لأن : $\cap\{(0,\frac{1}{n})\ :n\in N\}=\phi$

مثال (٧. ١. ١٣) :

العائلة $\mathcal{G}=\{(-\infty,n]:n\in Z\}$ لها خاصية التقاطع الخالي لأن :

$$\cap\{(0,\frac{1}{n})\ :n\in Z\}=\phi$$

ولكن $\mathcal{G}$ تحقق F . I . P لأن تقاطع عدد منتهى منها هو مجموعة غير خالية حيث :

$$(-\infty,\frac{1}{n_1}]\cap(-\infty,\frac{1}{n_2}]\cap\dots\cap(-\infty,\frac{1}{n_m}]=(-\infty,r)$$

حيث $r=\min\{\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2},\dots,\frac{1}{n_m}\}$

نظرية (٧. ١. ١٤) :

في أي فضاء توبولوجي (X,τ) الخواص الآتية متكافئة :

(١) X فضاء محكم .

(٢) كل عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F.I.P. لها تقاطع غير خالي.

البرهان :

(١) $\Leftarrow$ (٢) :

بفرض أن X فضاء محكم ، $\mathcal{G}=\{F_i : i\in N\}$ عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F.I.P. ولنفرض جدلاً أن : $\underset{i}{\cap}\{F_i : i\in N\}=\phi$

من ذلك نحصل على أن العائلة $\{F_i^c : i\in N\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X وبالتالي يوجد غطاء جزئي منتهي $\{F_{ij}^c : i\in N, j=1,2,\dots,n\}\}$ للمجموعة X لأن X فضاء محكم. إذاً $X=\overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} F_{ij}^c = X-(\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} F_{ij})$

وهذا يؤدي إلى أن $\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} F_{ij}=F_{i1}\cap F_{i2}\cap\dots\cap F_{in}=\phi$

مما يؤدي إلى تناقض مع الفرض أن $\mathcal{G}$ تحقق F.I.P. ومن ذلك نحصل على :

$$\underset{i}{\cap}\{F_i : i\in I\}\neq\phi$$

(٢) $\Leftarrow$ (١) :

بفرض أن أي عائلة من المجموعات المغلقة في X تحقق F. I. P. لها تقاطع غير خالي. ولنفرض جدلاً أن X فضاء غير محكم . وبالتالي يوجد غطاء مفتوح

$\mathcal{G}=\{G_i : i\in I\}$ لـــلمجموعة X لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى وليكن $\{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ أي أن $X\neq G_{i1}\cup G_{i2}\cup\ldots\cup G_{in}$.

ومن ثم فإن $X-(\bigcup\limits_{j=1}^{n} G_{ij})=\bigcap\limits_{j=1}^{n}(X-G_{ij})\neq\phi \; ; \; \forall n\in N$

ولكـــن $\{G_i^c : G_i\in\mathcal{G}\}$ عائلـــة من المجموعات المغلقة تحقق F . I . P . وطبقاً للفرض (٢) فإن $\bigcap\limits_{i}\{G_i^c : G_i\in\mathcal{G}\}\neq\phi$

أي أن $X-\bigcup\limits_{i}\{G_i : G_i\in\mathcal{G}\}\neq\phi$

وهذا يؤدي إلى تعارض مع كون أن $\mathcal{G}$ غطاء للمجموعة X ومن ثم فإن X فضاء محكم .

ملاحظات (٧. ١. ١٥) :

(١) يمكن إثبات (٢)⇐(١) في النظرية السابقة بطريقة مباشرة وذلك كما يلي:

بفـــرض أن $\mathcal{G}=\{G_i : i\in I\}$ غطـــاء مفـــتوح لـــلمجموعة X أي أن $X=\bigcup\limits_{i} G_i$. ومن ذلك نستنتج أن : $\phi=(\bigcup\limits_{i} G_i)^c=\bigcap\limits_{i} G_i^c$

وبالتالي فإن $\{G_i^c : i\in I\}$ عائلة من المجموعات المغلقة لها تقاطع خالي ومن (٢) فإنه يوجـــد عائلة جزئية منتهية $\{G_{ij}^c\}_{i=1}^{n}$ لا تحقق F . I . P. أي $\bigcap\limits_{j=1}^{n} G_{ij}^c=\phi$ ومن ثم فـــإن $X=\bigcup\limits_{j=1}^{n} G_{ij}=(\bigcap\limits_{j=1}^{n} G_{ij}^c)^c$. وهذا يعني أنه يوجد غطاء جزئي منتهى $\{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ للمجموعة X . أي أن X فضاء محكم .

(٢) يمكن إعادة كتابة النظرية السابقة بالصورة التالية :

الخواص الآتية متكافئة :

(i) X فضاء محكم .

(ii) كل عائلة من المجموعات الجزئية المغلقة $\{F_i\}$ في X تحقق $\bigcap_i F_i = \phi$ تحتوي على عائلة جزئية منتهية $\{F_{ij}\}_{j=1}^{n}$ تحقق $\bigcap_{j=1}^{n} F_{ij} = \phi$.

بند (٢) : **المجموعات الجزئية المحكمة** : **(Compact Subsets)**

تعريف (٧. ٢. ١) :

المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ من الفضاء التوبولوجي (X, τ) تكون محكمة إذا كان كل غطاء مفتوح للمجموعة A يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

أي أن

$$A \subseteq X \ is\ compact \Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1} G_i, \ G_i \in \tau, \exists \{G_{ij}\}_{j=1}^{n} ;$$

$$such\ that \quad A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}$$

نظرية (٧. ٢. ٢) :

كل مجموعة منتهية في أي فضاء توبولوجي تكون محكمة.

نظرية (٧. ٢. ٣) : (هاين– بورل **Heine - Borel**)

كل فترة محدودة ومغلقة في R تكون محكمة.

البرهان :

نفرض أن $I_1 = [c, d]$ ، $\mathcal{G} = \{(a_i, b_i) : i \in N\}$ غطاء للفترة I_1 عناصره عائلة الفترات المفتوحة . ونفرض جدلاً أن $\mathcal{G}$ لا تحتوي على غطاء جزئي منتهى للفترة I_1. نقسم الفترة I بالنقطة $\frac{c+d}{2}$ من ذلك نحصل على الفترتين $I_2' = [c, \frac{c+d}{2}]$; $I_2'' = [\frac{c+d}{2}, d]$

نجد أن واحدة من الفترتين على الأقل لا تُغطى بعدد منتهى من الفترات المفتوحة من $\mathcal{G}$ ولتكن مثلاً $I_2 = [c_2, d_2]$ نقسم الفترة I_2 نحصل من ذلك على الفترتين

$$I_3' = [c_2, \frac{c_2 + d_2}{2}] \; ; \; I_3'' = [\frac{c_2 + d_2}{2}, d_2]$$

واحـــدة من هذه الفترات لا تُغطى بعدد منتهى من الفترات المفتوحة من $\mathcal{G}$ ولتكن مثلاً I_3 . نستمر في ذلك لنحصل على متتابعة من الفترات المغلقة المتداخلة :

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \qquad (*)$$

بحيـــث أن كـــل فـــترة I_n لا تغطـــي بعـــدد منـــتهى مـــن عناصر $\mathcal{G}$ وأيضاً $\lim\limits_{n \to \infty} |I_n| = 0$ حيث $|I_n|$ طول الفترة I_n.

ونعلم من التحليل الرياضي إنه إذا كانت لدينا متتابعة مرقمة من الفترات المغلقة والمتداخلة $(*)$ فإنه : $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_n \neq \phi$

أي توجد نقطة p على الأقل في كل فترة I_n وعلى هذا فإن $p \in I_1$ وحيث أن $\mathcal{G}$ غطاء للفترة I_1 فإنه توجد فترة مفتوحة (a_{io}, b_{io}) بحيث أن $a_{io} < p < b_{io}$ ولكن $\lim\limits_{n \to \infty} |I_n| = 0$ ونستنتج من ذلك أن

$$\exists n_o \in N : |I_{no}| < \min(p - a_{io}, b_{io} - p)$$
$$i.e. \, , \; I_{no} \subseteq (a_{io}, b_{io}) \in \mathcal{G}$$

أي أن $\mathcal{G}$ تحـــتوي على عائلة جزئية تغطي I_{no} وهذا تعارض وعلى هذا فإن $\mathcal{G}$ تحتوي على عائلة جزئية منتهية تغطي I_1. ومن ثم فإن الفترة $I_1 = [c, d]$ محكمة.

ملاحظة (٧. ٢. ٤) :

مـــن نظرية هاين-بورل نستنتج أن كل غطاء مفتوح لأي فترة مغلقة ومحدودة يحـــتوي على غطاء جزئي منتهى والأمثلة الآتية توضح أن كلاً من شرطي الإغلاق والمحدودية هام.

مثال (٧. ٢. ٥) :

إذا كانت $A=(0,1)$ فإن A ليست محكمة ، لأن

$$\mathcal{G}=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}): n\in N\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A . $A\subset(\frac{1}{3},1)\cup(\frac{1}{4},\frac{1}{2})\cup\ldots$

ولكن $\mathcal{G}$ لا تحتوي على غطاء جزئي منتهي . من أجل ذلك نفرض أن :

$$\mathcal{G}^*=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_m,b_m)\}$$

عائلة جزئية منتهية من $\mathcal{G}$. إذا كانت $0<\varepsilon=\min(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ فإن

$$(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)\cup\ldots\cup(a_m,b_m)\subset(\varepsilon,1)$$

ولكن $(0,\varepsilon]\cap(\varepsilon,1)=\phi$. وبالتالي فإن $\mathcal{G}^*$ لا تغطي A وبذلك تكون A غير محكمة.

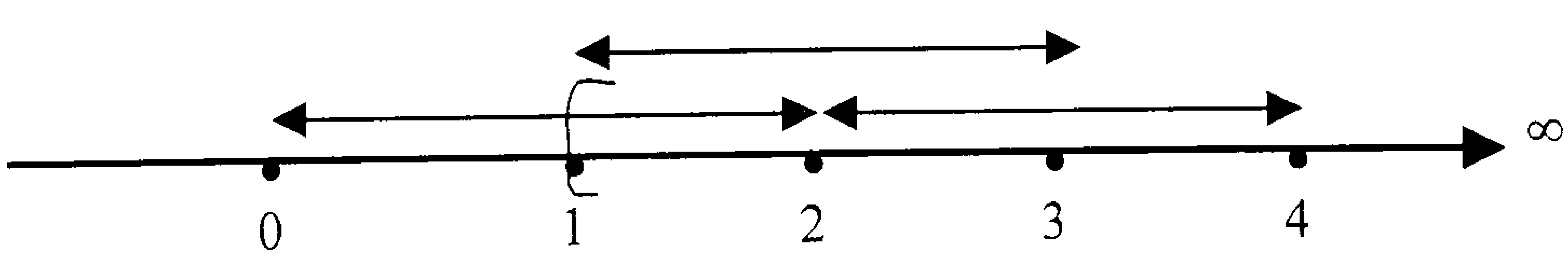
ولتوضيح ذلك إذا تم استبعاد فترة واحدة ولتكن $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ فإن العدد $\frac{1}{3}$ مثلاً لا يوجد له غطاء .

مثال (٧. ٢. ٦) :

المجموعة $A=[1,\infty)$ غير محكمة لأن

$$\mathcal{G}=\{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي.



نظرية (٧. ٢. ٧) :

كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء محكم تكون محكمة.

البرهان :

بفرض أن (X,τ) فضاء محكم ، F مجموعة جزئية مغلقة في X والمطلوب إثبات أن F محكمة ولذلك نفرض أن $\mathcal{G}=\{G_i\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F أي أن $F\subseteq \underset{i}{\cup} G_i$. عندئذ تكون F^c مجموعة مفتوحة حيث :

$$X=F\cup F^c \subseteq \{\underset{i}{\cup} G_i\}\cup\{F^c\}$$

وبالتالي فإن $\{\underset{i}{\cup} G_i\}\cup\{F^c\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X. ومن ذلك ينتج أنه يوجد غطاء جزئي منتهى للمجموعة X هو $\{G_{i1},G_{i2},\dots,G_{im}\}\cup\{F^c\}$ لأن X فضاء محكم . لكن

$$F\cap F^c=\phi \;, F\cup F^c=X$$

وهذا يعني أن $F^c\subseteq G_{i1}\cup G_{i2}\cup\dots\cup G_{im}$. أي أن F مجموعة محكمة.

نظرية (٧. ٢. ٨) :

الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) من الفضاء (X,τ) يكون محكماً إذا وفقط إذا كانت Y محكمة في الفضاء (X,τ).

البرهان :

أولاً : نفرض أن (Y,τ_Y) هو فضاء جزئي من الفضاء (X,τ) بحيث أن Y محكمة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y).

المطلوب إثبات أن Y محكمة في الفضاء (X,τ) ولذلك نفرض $\mathcal{G}=\{G_i : i\in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y (حيث $G_i\in\tau$ لكل $i\in I$) بمجموعات مفتوحة من X أي أن $Y\subseteq \underset{i}{\cup} G_i$

ومن ذلك نجد أن $Y\subseteq Y\cap(\underset{i}{\cup} G_i)=\cup(Y\cap G_i)=\underset{i}{\cup} H_i$

حيث $H_i = Y \cap G_i \in \tau_Y$ وبالتالي فإن العائلة $\{H_i : i \in I\}$ غطاء للمجموعة Y بمجموعات مفتوحة من Y ، ومن ثم فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{H_{ij}\}_{j=1}^{n}$ بحيث أن:

$$\begin{aligned} Y &\subseteq H_{i1} \cup H_{i2} \cup \ldots \cup H_{in} \\ &= (Y \cap G_{i1}) \cup (Y \cap G_{i2}) \cup \ldots \cup (Y \cap G_{in}) \\ &\subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \ldots \cup G_{in} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن Y محكمة في الفضاء (X, τ).

ثانياً: العكس نفرض أن Y محكمة في الفضاء (X, τ) ، $\mathcal{G} = \{G_i\}$ غطاء للمجموعة Y بمجموعات مفتوحة من Y. أي أن $Y \subseteq \bigcup_i G_i \ ; \ G_i \in \tau_Y$.

ومن تعريف الفضاء الجزئي نجد أنه لكل $i \in I$ توجد $H_i \in \tau$ بحيث أن $G_i = Y \cap H_i$. أي أن

$$Y \subseteq \bigcup_i G_i = \cup (Y \cap H_i) = Y \cap (\bigcup_i H_i) \subseteq \bigcup_i H_i \ , \ H_i \in \tau$$

أي أن العائلة $\{H_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y بمجموعات جزئية مفتوحة من X. وحيث أن Y محكمة في الفضاء (X, τ) فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{H_{ij}\}_{j=1}^{n}$ بحيث أن $Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} H_{ij}$. وهذا يؤدي إلى أن

$$Y \subseteq Y \cap (\bigcup_{j=1}^{n} H_{ij}) = \cup (Y \bigcap_{j=1}^{n} H_{ij}) = \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}$$

أن $\mathcal{G}$ تحتوي على غطاء جزئي منتهى للمجموعة Y ومن ثم فإن Y محكمة في الفضاء الجزئي (Y, τ_Y).

مثال (٧. ٢. ٩) :

كل مجموعة جزئية من الفضاء الغير منفصل (X, I) تكون محكمة.

مثال (٧. ٢. ١٠) :

كل مجموعة جزئية من فضاء المكملات المنتهية (X,C) تكون محكمة.

نظرية (٧. ٢. ١١) :

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي وكانت $F \subseteq X$. إذا كانت A مجموعة محكمة ، F مجموعة مغلقة فإن $A \cap F$ تكون مجموعة محكمة.

البرهان :

بفرض أن $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $A \cap F$ أي أن $A \cap F \subseteq \underset{i}{\cup} G_i$. ومن ثم فإن $A \subseteq (\underset{i}{\cup} G_i) \cup F^c$. وحيث أن F مجموعة مغلقة في X فإن F^c مجموعة مفتوحة وبالتالي فإن $\mathcal{G}^* = \{G_i\} \cup \{F^c\}$ غطاء مفتوح للمجموعة A ولكن A محكمة ، إذاً يوجد غطاء جزئي منتهى $\{G_{ij}\}_{j=1}^{n} \cup \{F^c\}$ للمجموعة A أي أن $A \subseteq (\overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} G_{ij}) \cup \{F^c\}$. ومن ثم فإن $A \cap F \subseteq \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} G_{ij}$. وهذا يؤدي إلى أن $A \cap F$ مجموعة محكمة.

بند (٣) : الأحكام ومسلمات الانفصال :

(Compactness and separation Axioms)

من خلال دراستنا لمسلمات الانفصال وجدنا أن :

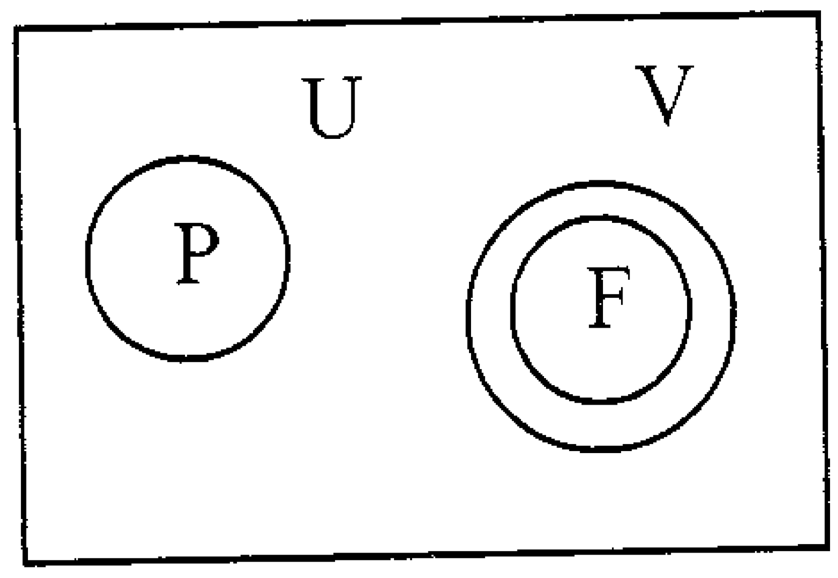
$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_o$$

ولكن العكس ليس صحيح دائماً . من خلال دراسة العلاقة بين الأحكام ومسلمات الانفصال سوف نعطي بعض النظريات التي تجعل عكس العلاقات السابقة يكون صحيح .

نظرية (٧. ٣. ١) :

بفرض أن (X,τ) فضاء- T_2 ، $F \subseteq X$ مجموعة جزئية من X ومحكمة بحيث أنه لأي نقطة p ، $p \notin F$ فأنه توجد مجموعتان مفتوحتان U,V في X

بحيث تكون $U \cap V = \phi \quad , F \subseteq U \ , \ p \in V$



البرهان :

نفرض أن $x \in F$ وحيث أن $p \notin F$ فإن $x \neq p$. لكن (X, τ) فضاء- T_2 . إذاً توجد $U_x , V_x \in \tau$ بحيث أن

$$x \in U_x \, , p \in V_x \text{ and } U_x \cap V_x = \phi$$

ومن ثم فإن العائلة $\{U_x : x \in F\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F وبما أن F مجموعة محكمة في X فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$

تغطي F أي أن $F \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_n} = U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$

بوضع $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_n} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$

نستنتج من ذلك أن $p \in V ; \ F \subseteq U ; \ U , V \in \tau$

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}) \cap (V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}) \\ &= (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \ldots \cup (U_{x_n} \cap V_{x_n}) = \phi \cup \ldots \cup \phi = \phi \end{aligned}$$

نتيجة (٧. ٣. ٢) :

إذا كان (X, τ) فضاء- T_2 ، F مجموعة محكمة في X فإن F تكون مغلقة.

البرهان :

بفرض أن (X, τ) فضاء- T_2 ، F مجموعة محكمة في X . المطلوب إثبات

أن F مغلقة وهذا يكافئ أن F^c مجموعة مفتوحة . لذلك نفرض أن $p \notin F^c$ وهـــذا يعني أن $p \in F$. طبقاً للنظرية (٧. ٣. ١) توجد $U, V \in \tau$ بحيث أن $p \in U, F \subseteq V, U \cap V = \phi$. وحيـــــث أن $U \cap V = \phi$ نجـــــد أن $U \cap F = \phi$ ومـــــنها $p \in U \subseteq F^c$. وهـــــذا يـــــؤدي إلى أن $F^c = \cup \{U : p \in F^c\}$ ، وهي مجموعة مفتوحة لأنها اتحاد لمجموعات مفتوحة. ونستنتج من ذلك أن كل مجموعة جزئية محكمة في الفضاء- T_2 هي مغلقة .

نتيجة (٧. ٣. ٣) :

إذا كانـــت A مجموعـــة جزئية محكمة من الفضاء- T_2 فإنه توجد مجموعة مفتوحة U لكل $p \notin A$ بحيث يكون $p \in U \subseteq F^c$.

البرهان : واضح من نتيجة (٧. ٣. ٢)

نظرية (٧. ٣. ٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء- T_2 ومحكماً فإنه يكون فضاء طبيعي **(Normal)**

البرهان :

بفـــرض أن (X, τ) فضاء- T_2 ومحكماً . بفرض أن F_1, F_2 مجموعتان مغلقـــتان بحيـــث أن $F_1 \cap F_2 = \phi$. طـــبقاً لنتيجة(٧. ٣. ٢) فإن F_1, F_2 مجموعـــات محكمة ، ولكل $p \notin F_1$ فإن $p \in F_2$. وحيث أن X فضاء- T_2 ، F_2 محكمـــة فإنـــه طبقاً لنتيجة(٧. ٣. ٣) توجد مجموعتان مفتوحتان U_p, V_p بحيث يكون $F_1 \subseteq U_p \; ; p \in V_p \; ; U_p \cap V_p = \phi$

وعـــلى هذا فإن العائلة $\{V_p : p \in F_2\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F_2 وحيث أن F_2 محكمة، فإنه توجد $V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_n}$ بحيث أن

$$F_2 \subseteq V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup \ldots \cup V_{p_n}$$

بوضع
$$U = U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \ldots \cup U_{p_n}$$

وعليه فإن $U, V \in \tau \; ; \; F_1 \subset U \; ; \; F_2 \subseteq V$

$$U \cap V = (U_{p_1} \cap \ldots \cap U_{p_n}) \cap (V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_n})$$
$$= (U_{p_1} \cap V_{p_1}) \cup \ldots \cup (U_{p_n} \cap V_{p_n}) = \phi$$

أي أن X فضاء طبيعي.

نتيجة (٧. ٣. ٥) :

إذا كان (X, τ) فضاء$-T_2$ ومحكماً فإنه يكون فضاء منتظم.

البرهان :

حيث أن X فضاء$-T_2$. محكم فإنه طبقاً لنظرية (٧. ٣. ٤) يكون X فضاء طبيعي . لكن X فضاء$-T_1$ (لأنه فضاء$-T_2$) وبالتالي فإن X فضاء$-T_4$ ومن ذلك نستنتج أن X فضاء$-T_3$ ومن ثم فإن X فضاء منتظم .

نظرية (٧. ٣. ٦) :

إذا كانت F مجموعة جزئية محكمة من الفضاء المنتظم (X, τ) ، U مجموعة مفتوحة تحتوي F (أي أن $F \subseteq U$) فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث يكون $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ أي أن U تحتوي على جوار مغلق للمجموعة F.

البرهان :

حيث أن U مجموعة مفتوحة ، $F \subseteq U$ فإن U جوار لكل نقطة $p \in F$.

بما أن X فضاء منتظم فإنه توجد مجموعة مفتوحة V_p تحقق

$$p \in V_p \subseteq \overline{V_p} \subseteq U$$

وعليه تكون العائلة $V = \{V_p : p \in F\}$ غطاء مفتوح للمجموعة F. لكن F حكمة وبالتالي توجد عائلة جزئية منتهية $V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_n} \in V$ بحيث أن

$$F \subseteq V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup \ldots \cup V_{p_n} = V$$

وعلى ذلك فإن

$$\overline{V}=\overline{V}_{p_1}\cup\overline{V}_{p_2}\cup\ldots\cup\overline{V}_{p_n},$$
$$F\subseteq V\subset\overline{V}\subseteq U$$

نتيجة (٧. ٣. ٧) :

كل فضاء محكم ومنتظم هو فضاء طبيعي . أي أن

Compact + regular $\Rightarrow$ Normal

البرهان :

بفرض أن F_1, F_2 مجموعتان مغلقتان وغير متقاطعتان في الفضاء التوبولوجي (X,τ) المحكم والمنتظم . حيث أن $F_1\cap F_2=\phi\Rightarrow F_2\subseteq F_1^c$ أي أن F_1^c مجموعة مفتوحة تحتوي F_2 . لكن F_2 مغلقة في الفضاء المحكم . فإنه طبقاً لنظرية (٧. ٢. ٦) تكون F_2 محكمة . وبموجب أن X فضاء منتظم ، F_2 مجموعة محكمة محتواه في F_1^c فإنه طبقاً لنظرية ((٧. ٣. ٦) توجد مجموعة مفتوحة V بحيث أن $F_2\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq F_1^c$. وبالتالي يكون لدينا :

$$F_2\subset V\ ,\ F_1\subset\overline{V}^c=U\in\tau,\ \ U\cap V=\overline{V}^c\cap V=\phi$$

وبذلك يكون (X,τ) فضاء طبيعي.

بند (٤) : الأحكام والاتصال : Compactness and Continuity

نظرية (٧. ٤. ١) :

إذا كانت $f:X\to Y$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y وكان X فضاء محكم فإن $f(X)$ تكون أيضاً محكماً .

البرهان :

نفرض أن $\mathcal{G}=\{G_i:i\in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $f(X)$ ، أي أن : $f(X)\subseteq\bigcup_i G_i$. ومن ثم فإن $X=\bigcup_i f^{-1}(G_i)$ وحيث أن f دالة

متصلة فإن العائلة $\{f^{-1}(G_i)\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X . لكن X فضاء محكم ومن ثم فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{f^{-1}(G_{ij})\}_{j=1}^{n}$ بحيث تكون $X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{ij})$. وهذا يؤدي إلى أن

$$f(X) = f(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{ij})) = (\bigcup_{j=1}^{n} ff^{-1}(G_{ij})) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (G_{ij})$$

وعليه فإنه توجد عائلة جزئية منتهية $\{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ من $\mathcal{G}$ تغطي $f(X)$ أي أن $f(X)$ محكمة.

نتيجة (٧. ٤. ٢) :

إذا كانت $f: X \to Y$ دالة متصلة وشاملة من الفضاء التوبولوجي Y وإذا كان X فضاء محكم فإن Y فضاء محكم أيضاً .

نظرية (٧. ٤. ٣) :

إذا كانت $f: X \to Y$ دالة أحادية من الفضاء التوبولوجي X إلى فضاء هاوسدروف Y فإن $X \cong f(X)$ أي أن $f(X)$ ، X متكافئان توبولوجياً.

البرهان :

واضح أن الدالة $f: X \to f(X)$ دالة شاملة . وحيث أن f متصلة وأحادية فإن $f^{-1}: f(X) \to X$ موجودة . سنحاول الآن إثبات أن f^{-1} دالة متصلة ، لذلك نفرض أن F مجموعة مغلقة في X وبالتالي حسب نظرية(٧. ٤. ١) فإن F مجموعة محكمة في الفضاء الجزئي $f(X)$ من فضاء هاوسدورف Y فـإن $f(X)$ يكون فضاء هاوسدورف ومن ثم فإن $f(F)$ مجموعة مغلقة حسب نتيجة(٧. ٣. ٢).

لكن $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ وبالتالي فإن الصورة العكسية للمجموعة المغلقة

F وفق الدالة العكسية f^{-1} مجموعة مغلقة، وهذا يؤدي إلى أن $f: X \to f(X)$ دالة توبولوجية . أي أن $X \cong f(X)$.

نتيجة (٧. ٤. ٥) :

خاصية أن يكون الفضاء محكم هي خاصية توبولوجية .

نظرية (٧. ٤. ٦) :

إذا كان X فضاء محكم ، Y فضاء هاوسدورف فإن الدالة المتصلة $f: X \to Y$ تكون مغلقة .

البرهان :

نفرض أن F مجموعة مغلقة في X. وحيث أن X فضاء محكم فانه حسب نظرية (٧. ٤. ١) تكون $f(F)$ مجموعة محكمة . لكن Y فضاء هاوسدورف ينتج من ذلك أن $f(F)$ مجموعة مغلقة حسب نتيجة (٧. ٣. ٢). ومن ثم فإن صورة كل مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة ، أي أن f دالة مغلقة.

النتيجة التالية تلعب دوراً مهماً في الهندسة.

نتيجة (٧. ٤. ٧) :

إذا كان X فضاء محكم ، Y فضاء هاوسدورف فإن كل دالة تناظر احادي ومتصلة $f: X \to Y$ تكون هومومورفيزم .

البرهان :

حيث أن f تناظر أحادي ومتصلة فإننا سوف نبرهن فقط على أن $f^{-1}: Y \to X$ متصلة وهذا يكافئ إثبات أن f دالة مفتوحة. لذلك نفرض أن G مجموعة مفتوحة في X فإن G^c مجموعة مغلقة في X. وبالتالي فإن $f(G^c)$ مجموعة مغلقة لكن $f(G^c) = (f(G))^c$. لأن f دالة تناظر أحادي ولذلك فإن $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y .

المثال التالي يوضح أن النظرية السابقة ليست صحيحة في الصورة العامة.

مثال (٧. ٤. ٨) :

بفرض أن $f: X=[0,1) \to R$ دالة معرفة بالصورة :

$$f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

نلاحظ أن f دالة تناظر أحادي من X إلى دائرة الوحدة S وهي دالة متصلة.

لكن $S \not\equiv [0,1)$ حيث $[0,1)$ ليست محكمة.

بند (٥) : بعض أنواع الأحكام :

- الفضاء المحكم محلياً
- الفضاء المحكم تتابعياً
- الفضاء المحكم عدياً

تعريف (٧. ٥. ١) : الفضاءات المحكمة محلياً **(Locally compact spaces)**

يقـــال أن الفضاء التوبولوجي (X,τ) محكم محلياً إذا وجد جوار محكم لكل $p \in X$.

يتضح من هذا التعريف أن كل فضاء محكم يكون فضاء محكم محلياً أي أن :

Compact $\Rightarrow$ Locally compact

لأنه إذا كان X محكم فإن لكل $p \in X$ يوجد جوار محكم وهو المجموعة X.

ولكن العكس غير صحيح والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (٧. ٥. ٢) :

الفضـــاء العـــادي $(R,\mathcal{U})$ محكـــم محلـــياً لأنه لكل $p \in R$ يوجد الجوار $[p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ وهـــذا الجوار مغلق ومحدد وبالتالي طبقاً لنظرية هاين – بورل فـــإن جـــوار p محكم وعلى ذلك فإن R محكم محلياً . ونعلم أن R ليس فضاء محكم لأن مجموعة الفترات المفتوحة :

$$\mathcal{G} = \{\ldots,(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3),\ldots\}$$
$$= \{(n,n+2) : n \in N\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة R ولكنها لا تحتوي على غطاء جزئ منتهى.

مثال (٧. ٥. ٣) :

الفضاء المنفصل (X,D) محكم محلياً لأن لكل $p \in X$ تكون $\{p\}$ جوار محكماً للنقطة p لأن $\{p\}$ مجموعة محكمة (لأنها منتهية).

ملاحظة (٧. ٥. ٤) :

الفضاء (X,I) محكم محلياً لأن X فضاء محكم .

ملاحظة (٧. ٥. ٥) :

إذا كان الفضاء (X,τ) محكم محلياً وكانت A مجموعة جزئية مغلقة في X فإن A تكون محكمة محلياً.

البرهان :

بفـرض أن A مجموعـة مغلقة في الفضاء المحكم محلياً (X,τ) ، $p \in A$. ومـن هـذا يتضح أنه يوجد جوار محكم H للنقطة p . وحيث أن A مجموعة مغلقـة في X فإنـه طـبقاً لنظرية(٧. ٢. ١١) تكون المجموعة $F = A \cap H$ مجموعـة محكمـة. لكـن $p \in H^o$ ومن ثم فإن $p \in H^o \cap A \subseteq F$ حيث $H^o \cap A \in \tau_A$ وهذا يؤدي إلى أن p لها جوار محكم هو $F = A \cap H$ أي أن A مجموعة محكمة محلياً.

نظرية (٧. ٥. ٦) :

إذا كان (X,τ) فضاء- T_2 فإن X يكون فضاء محكم محلياً إذا وفقط إذا كان لكل $p \in X$ يوجد جوار مفتوح V بحيث أن $\bar{V}$ تكون مجموعة محكمة.

البرهان :

حيث أن (X,τ) فضاء محكم محلياً فإن لكل $p\in X$ يوجد جوار N محكم ، ومن ثم فإن $V=N^o$ جوار مفتوح للنقطة p .

وحيث أن N مجموعة محكمة في الفضاء$-T_2$ فإن N مجموعة مغلقة وبالتالي فإن:

$$N^o\subseteq N \Rightarrow \overline{N^o}\subseteq \overline{N}=N$$

لكن $\overline{V}=\overline{N^o}$ مجموعة مغلقة وجزئية من مجموعة محكمة، إذاً V مجموعة محكمة .

ومن جانب آخر ، إذا كان X فضاء$-T_2$ ولكل $p\in X$ يوجد جوار مفتوح V بحيث تكون $\overline{V}$ جوار محكم للنقطة p وعلى هذا فإن X فضاء محكم محلياً.

نظرية (٧. ٥. ٧) :

إذا كان (X,τ) فضاء محكم محلياً وكانت $f:X\to Y$ دالة متصلة ومفتوحة فإن $f(X)$ مجموعة محكمة محلياً .

البرهان :

نفرض أن $y\in f(X)$ ، إذاً توجد $x\in X$ بحيث أن $y=f(x)$. بما أن X فضاء محكم محلياً إذاً يوجد جوار محكم N للنقطة x. لكن حيث أن الدالة f متصلة فإن $f(N)$ محكمة من نظرية(٧. ٤. ١). وحيث أن f دالة مفتوحة فإن $f(N^o)$ مجموعة مفتوحة تحتوي y لأن $x\in N^o$ ، ومن ثم فإن

$$y=f(x)\in f(N^o)\subseteq f(N)=U$$

وبالتالي فإن U جوار محكم للنقطة y ، أي أن $f(X)$ يكون فضاء محكم محلياً.

نتيجة (٧. ٥. ٨) :

خاصية أن يكون الفضاء محكم محلياً هي خاصية توبولوجية.

تعريف (٧. ٥. ٩) : الفضاءات المحكمة تتابعياً .

الفضاء(X,τ) تكون محكمة تتابعياً إذا كانت كل متتابعة في X تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة.

مثال (٧. ٥. ١٠) :

كل مجموعة منتهية في الفضاء (X,τ) تكون محكمة تتابعياً.

الحل :

بفرض أن A مجموعة منتهية في الفضاء X، $<a_n>=<a_1,a_2,...>$ متتابعة في A . حيث أن A منتهية فإنه على الأقل عنصر من A ليكن a_o يجب أن يظهر بعدد لا نهائي من المرات في المتتابعة ، ومن ثم فإنه $<a_o,a_o,...>$ متتابعة جزئية من $<a_n>$ وهي متقاربة في A إلى a_o.

مثال (٧. ٥. ١١) :

كل فترة مفتوحة في R ليست محكمة تتابعياً.

الحل :

بفرض أن $A=(0,1)$ فترة مفتوحة في الفضاء $(R,\mathcal{U})$ نعتبر المتتابعة

$$<a_n>=<\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...>$$

في المجموعة A. نلاحظ أن $<a_n>$ تتقارب إلى 0 وبالتالي كل متتابعة جزئية منها تتقارب إلى 0 ولكن $0\notin A$. إذاً A ليست محكمة تتابعياً .

مثال (٧. ٥. ١٢) :

بفرض أن $\tau=\{\phi,U\subseteq X:U^c$ قابلة للعد $\}$ بين أن كل مجموعة جزئية غير منتهية من X لا تكون محكمة تتابعياً .

الحل :

المتتابعة $<a_n>=<a_1,a_2,...>$ تتقارب إلى $b\in X$ إذا وإذا فقط كانت المتتابعة على الصورة $<a_1,a_2,...,a_{n_0},b,b,...>$ أي أن المجموعة A المكونة من حدود المتتابعة $<a_n>$ التي تختلف عناصرها عن b منتهية. المجموعة A تكون قابله للعد وبالتالي فإن A^c مجموعة مفتوحة تحتوي b. إذا كانت $a_n\to b$ فإن A^c تحتوي

على حدود المتتابعة فيما عدا عدد منتهى وبالتالي فإن A منتهية.

إذا كانت A غير منتهية فإنه توجد متتابعة $< b_n >$ في A عناصرها مختلفة ، وبالتالي فإن $< b_n >$ لا تحتوي على أي متتابعة جزئية متقاربة.

تعريف (٧. ٥. ١٣) : الفضاءات المحكمة عدياً (Countable compact)

الفضاء (X, τ) يسمى محكم عدياً إذا كان كل غطاء مفتوح قابل للعد للمجموعة X يحتوي على غطاء جزئي منتهى.

نظرية (٧. ٥. ١٤) :

في أي فضاء توبولوجي (X, τ) تكون الشروط التالية متكافئة :

(١) X فضاء محكم عدياً .

(٢) أي عائلة من المجموعات الجزئية القابلة للعد والمغلقة في X تحقق F. I. P لها تقاطع غير خالي.

(٣) كل مجموعة جزئية غير منتهيه من X لها نقطة تراكم.

(٤) كل متتابعة في X لها نقطة لاصقة.

البرهان :

(١) $\Rightarrow$ (٢)

برهان هذا الجزء يشبه نظرية (٧. ١. ١٤)

(٢) $\Leftarrow$ (٣)

لنفرض أن A مجموعة جزئية غير منتهية ولتكن $S_n = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من عناصر A مختلفة مثنى مثنى .

ونعتبر المجموعات $S_m = \{a_i : i \geq m\}$ فإن عائلة المجموعات $\{S_m\}$ قابلة للعد وتحقق F . I . P. وبالتالي فإن العائلة $\{S_m\}$ مكونة من مجموعات مغلقة وتحقق F . I . P. ومن ثم فإن $\cap S_m \neq \phi$.

بفرض أن $x \in \cap S_m$ نجد أن x تكون نقطة تراكم للمجموعة A لأن أي مجموعة مفتوحة تحوي x تتقاطع مع أي عنصر من العائلة $\{S_m\}$.

(٣) $\Leftarrow$ (٤)

بفرض أن $\{x_n : n \in N\}$ متتابعة من عناصر X وبفرض أن A تتكون من عناصر هذه المتتابعة أي أن $A = \{x_n : n \in N\}$. إذا كانت A غير منتهية فإن A لها نقطة تراكم وبالتالي فإن هذه النقطة تكون نقطة لاصقة للمجموعة A .

إذا كانت A منتهية فإن A يجب أن تكون على الصورة :

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

وبالتالي فإنه يوجد عنصر $x \in A$ بحيث أن $x_n = x$ لكل $n \in N$ من ذلك نجد أن x نقطة لاصقة للمتتابعة.

ملاحظة (٧. ٥. ١٥) :

من النظرية السابقة يمكن إعادة تعريف الفضاء المحكم عدياً أو المجموعة المحكمة عدياً بالصورة التالية :

المجموعة الجزئية A من الفضاء التوبولوجي X تكون محكمة عدياً إذا كانت كل مجموعة B غير منتهية وجزئية من A لها نقطة تراكم في A .

نظرية (٧. ٥. ١٦) : (بولزانو ـــ فيراستراش) **Bolzano-Weierstrass**

كل مجموعة محددة وغير منتهية جزئية من R لها نقطة تراكم .

مثال (٧. ٥. ١٧) :

كل فترة محدودة ومغلقة $A = [a, b]$ من R محكمة عدياً.

الحل :

إذا كانت B مجموعة جزئية غير منتهية من A فإن A تكون محدودة . طبقاً لنظرية بولزانو ـــ فيراستراش ، فإن B لها نقطة تراكم p وحيث أن A مغلقة فإن $p \in A$ ، أي أن A محكمة عدياً .

مثال (٧. ٥. ١٨) :

الفترة المفتوحة $A=(0,1)$ ليست محكمة عدياً .

الحل :

نعتبر المجموعة $B=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$ ، الجزئية من A ، فإن B لا نهائية، B لها على الأكثر نقطة تراكم 0 حيث $0\notin A$.

ملاحظة (٧. ٥. ١٩) :

العلاقة بين الفضاءات المحكمة ، المحكمة تتابعياً والمحكمة عدياً تعطي بالصورة :

محكم تتابعياً $\Leftarrow$ محكم عدياً $\Rightarrow$ محكم

Compact $\Rightarrow$ Countable Compact $\Leftarrow$ Sequentially Compact

نظرية (٧. ٥. ٢٠) :

إذا كان X فضاء توبولوجي فإن :

(١) إذا كان X فضاء محكم فإن X محكم عدياً

(٢) إذا كان X فضاء محكم تتابعياً فإن X محكم عدياً

المثال التالي يوضح أن عكس النظرية السابقة غير صحيح .

مثال (٧. ٥. ٢١) :

بفرض أن N مجموعة الأعداد الطبيعية ، ونفرض

$$B=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\dots\}$$

عائلة من المجموعات الجزئية من N. وبفرض أن τ هو التوبولوجي المولد بواسطة B.

لتكن A مجموعة غير خالية من N، $n_o\in A$ فإذا كان n_o عدد فردي فإن n_o+1 يكون نقطة تراكم للمجموعة A وإذا كان n_o عدد زوجي فإن n_o-1 يكون نقطة تراكم للمجموعة A وفي كلتا الحالتين A لها نقطة تراكم .

ومـــن ثم فإن (N,τ) فضاء محكم عدياً . ومن جانب آخر (N,τ) ليس فضاء محكم لأن $\mathcal{G} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\ldots\}$ غطاء مفتوح للمجموعة N ولا يحـــتوي على غطاء جزئي منتهى. أيضاً (N,τ) فضاء غير محكم تتابعياً لأن المتتابعة $\{1,2,3,\ldots\}$ لا تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة.

<u>مثال (٧. ٥. ٢٢) :</u>

(١) بين أن الصورة المتصلة للمجموعة المحكمة عدياً لا تكون محكمة عدياً .

(٢) بين أن كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء محكم عدياً تكون محكمة عدياً .

<u>الحل :</u>

(١) بفـــرض أن $X=(N,\tau)$ هو الفضاء التوبولوجي المعطى في المثال السابق وبالـــتالي فـــإن (N,τ) محكم عدياً . بفرض أن $Y=(N,D)$ حيث D هو الـــتوبولوجي المنفصل على N وبالتالي فإن Y فضاء غير محكم عدياً . ومن جانب آخـــر الدالـــة $f:X\to Y$ المعرفة بالصورة : $f(n)=2n;\ n\in N$ دالة متصلة .

(٢) بفرض أن X فضاء محكم عدياً ، F مجموعة جزئية مغلقة من X. بفرض أن A مجموعـــة جزئية غير منتهية من F. حيث أن $X \supseteq F$ فإن A مجموعة جزئية غير منتهية من X. ومن ثم فإن A لها نقطة تراكم $p\in X$. وحيث أن $F\subseteq X$ فإن p هي أيضاً نقطة تراكم للمجموعة F. ولكن F مغلقة . إذاً $p\in F$ أي أن F محكمة عدياً.

تمارين عامة على الباب السابع

(١) بـــين أنه إذا كان الفضاء $(X,\mathcal{T})$ محكم وكان $(X,\mathcal{T}^*)$ فضاء توبولوجي بحيث أن $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ فإن $(X,\mathcal{T}^*)$ فضاء محكم أيضاً.

(٢) بفرض أن $(X,\mathcal{T}^*)=\{X,\phi,U\subseteq X : U^c$ قابلة للعد $\}$
أثبت أن أي مجموعة لانهائية من X ليست محكمة تتابعياً .

(٣) أعط مثال يبين أن الصورة المتصلة لمجموعة محكمة عدياً لا تكون محكمة عدياً.

(٤) بين أن المجموعة الجزئية المغلقة من الفضاء المحكم عدياً تكون محكمة عدياً.

(٥) برهن أن اتحاد عدد منته من المجموعات المحكمة هو مجموعة محكمة.

(٦) إذا كـــان $(X,\mathcal{T})$ فضـــاء$-T_2$ وكـــان $(X,\mathcal{T}^*)$ فضاء محكم بحيث أن $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}^*$. اثبت أن $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*$. هل $(X,\mathcal{T}^*)$ فضاء$-T_2$ ؟

(٧) إذا كانـــت الدالة $f:X\to Y$ أحادية ومتصلة من الفضاء المحكم X إلى الفضاء$-T_2$. أثبت أن $X\cong f(X)$

(٨) بين أن خاصية أن يكون الفضاء محكم تتابعياً (عدياً) هي خاصية توبولوجية.

(٩) إذا كان X فضاء يتمتع بقابلية العد الأولى أثبت أنه إذا كان X فضاء$-T_1$ فإن X محكم عدياً إذا وفقط إذا كان محكم تتابعياً.

(١٠) إذا كان X فضاء يتمتع بقابلية العد الثانية . أثبت أنه إذا كان X فضاء$-T_1$ فإن أي مجموعة جزئية تكون محكمة إذا وفقط إذا كانت محكمة عدياً.

(١١) هل خاصية أن يكون الفضاء محكم (محكم تتابعياً – محكم محلياً – محكم عدياً) هي خاصية وراثية.

(١٢) إذا كان $(X,\mathcal{T})$ فضاء منتظم ، A مجموعة محكمة ، B مجموعة مغلقة بحيث أن $A \cap B = \phi$. أثبت أنه يوجد $U, V \in \mathcal{T}$ بحيث أن $A \subseteq U , B \subseteq V$ ، $U \cap V = \phi$.

(١٣) إذا كانت A مجموعة جزئية محكمة في فضاء$-T_2$. برهن أنه إذا كانت $x \notin A$ فإنه توجد مجموعة مفتوحة V بحيث أن $x \in V \subseteq A^c$.

(١٤) بين أن أي مجموعة جزئية غير منتهية من الفضاء المنفصل ليست محكمة.

(١٥) إذا كان الفضاء X هو فضاء$-T_1$. بين أن X فضاء محكم عدياً إذا وفقط إذا كان كل غطاء مفتوح وقابلة للعد يحتوى على غطاء جزئي منتهي.

(١٦) بفرض أن X فضاء يتمتع بقابلية العد الثانية ، فضاء$-T_1$. أثبت أن X فضاء محكم إذا وفقط إذا كان X محكم عدياً.

(١٧) بين أن أي مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء المحكم تتابعياً تكون محكمة تتابعياً.

(١٨) بفرض أن $f:(X,d_1) \to (Y,d_2)$ دالة من الفضاء المحكم (X,d_1) إلى الفضاء المتري (Y,d_2) بين أن f تكون منتظمة الاتصال أي أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(١٩) بفـــرض أن A مجموعـــة جزئية ومحكمة عدياً من الفضاء المتري. أثبت أن A محكمة تتابعياً.

الباب الثامن

الترابط

Connectedness

الباب الثامن

الترابط Connectedness

نظراً للأهمية البالغة لمفهوم الترابط في الفضاءات التوبولوجية حيث له أسهامات فاعلة فيما يعرف بالتوبولوجية الجبرية وكذلك في التحليل الرياضى ، سوف نقوم في هذا الباب بدراسة الفضاءات المترابطة والخصائص الأساسية لها ونعطى بعض الأمثلة لكـي يستعين بها القارئ لتوضيح المعنى المطلوب. هذا ويعتبر الفصل الأول للعالم لينـز (Lennes) (١٩١١) والعالم هاوسدروف (Hausdorff) (١٩١٤) في تطور مفهـوم المجموعـة المترابطة والمركبات المترابطة إلى شكلها الحالى. أيضاً أدخل العالم هان (Hahn) (١٩١٤) مفهوم الفضاءات المترابطة محلياً.

بند (١) : المجموعات المنفصلة : (Separated Sets)

تعريف (٨. ١. ١) :

يقال للمجموعتين غير الخاليتين A,B في الفضاء التوبولوجـي (X,τ) إنهما منفصلتان، إذا تحقق الشرطين الآتيين :

$$(i)\ \ A\cap B=\phi \qquad (ii)\ \ A\cap B^{'}=\phi\ ,\ B\cap A^{'}=\phi$$

أى أن المجموعتين A,B غير متقاطعين ولا تحتوى أى منهما على نقاط تراكم للآخرى.

ومن جانب آخر يمكن القول بأن A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كان :

$$A\cap\overline{B}=\phi\quad ,\ \overline{A}\cap B=\phi$$

مثال (٨. ١. ٢) :

في الفضاء العادي $(R,\mathcal{U})$ إذا كانت

$$A=(1,2)\ ,\ B=(2,3)\ \ \&\ \ C=[3,4)$$

فإن المجموعتان A,B منفصلتان لأن $\overline{B}=[2,3]$, $\overline{A}=[1,2]$

ولذلك فإن $\overline{A}\cap B=\phi$, $A\cap\overline{B}=\phi$

ولكن B,C غير منفصلتان لأن $3\in C$ هي نقطة تراكم للمجموعة B ،

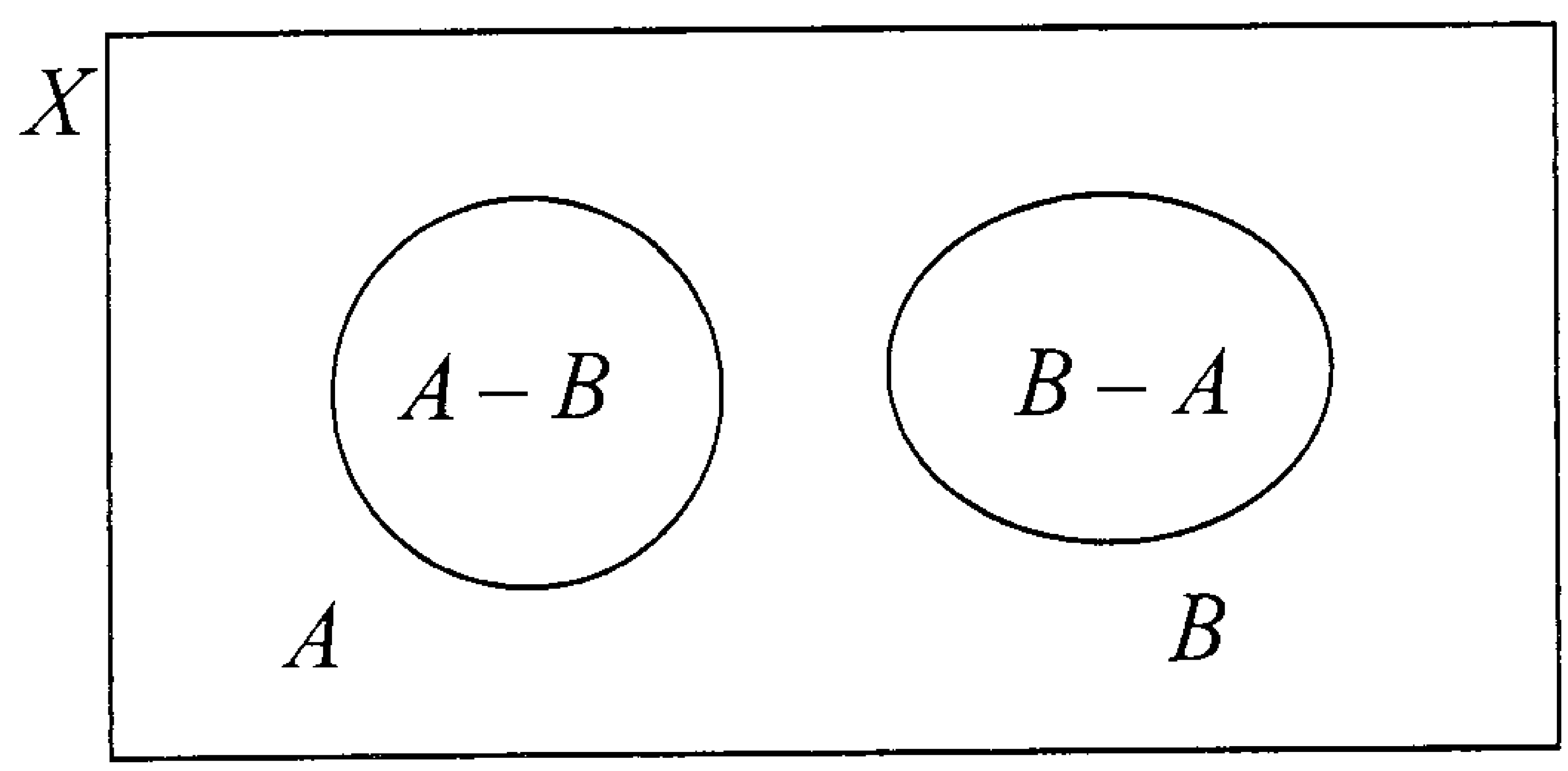
$$\overline{B}\cap C=[2,3]\cap[3,4)=\{3\}\neq\phi$$

نظرية (٨. ١. ٣) :

أي مجموعتين جزئيتين من أي فضاء توبولوجي مفتوحتين أو مغلقتين وغير متقاطعتين منفصلتين.

البرهان :

بفرض أن $A,B\subseteq X$ مجموعتين غير متقاطعين أي $A\cap B=\phi$



(١) إذا كانت A,B مفتوحتين فإن

$$(i)\ (A-B)\cap\overline{(B-A)}\subseteq A\cap\overline{(B-A)}$$
$$\subseteq\overline{A\cap(B-A)}=\phi,$$
$$(ii)\ \overline{(A-B)}\cap(B-A)\subseteq\overline{(A-B)}\cap B$$
$$\subseteq\overline{(A-B)\cap B}=\phi$$

أي أن $A-B$, $B-A$ منفصلتين.

(٢) بطريقة مشابهة يمكن إثبات أن إذا كانت A,B مغلقتين فإن $B-A$ ،

$A-B$ منفصلتين.

من (١) ، (٢) يمكن أستنتاج أن A,B منفصلتان.

بديهية (٨. ١. ٤) :

إذا كانت A,B مجموعتين منفصلتين في الفضاء التوبولوجى (X,τ) بحيث أن $C\subseteq A$, $D\subseteq B$ فإن C,D مجموعتين منفصلتين .

البرهان : حيث أن $A\cap B=\phi$ فإن $C\cap D=\phi$ وأيضاً

$$(i)\quad C\cap\overline{D}\subseteq A\cap\overline{B}=\phi$$

$$(ii)\quad \overline{C}\cap D\subseteq\overline{A}\cap B=\phi$$

بديهية (٨. ١. ٥) :

إذا كـــان (X,τ) فضـــاء- T_1 فإن أى مجموعتين منتهيتين غير خاليتين وغير متقاطعتين في X منفصلتين.

البرهان :

بفرض أن $A,B\subseteq X$ ومنتهيه حيث

$$A\cap B=\phi\ ,\ A\neq\phi\ ,\ B\neq\phi$$

لكـــن كـــل مجموعـــة منتهيه في فضاء T_1 تكون مغلقة لأنها أتحاد لمجموعات منتهيه وحـــيدة العنصـــر وهذا بدورة يؤدى إلى أن A,B مجموعات مغلقة وعليه تكون A,B منفصلتان لأن

$$A\cap\overline{B}=A\cap B=\phi\ ,\ \overline{A}\cap B=A\cap B=\phi$$

تعريف (٨. ١. ٦) :

في أى فضـــاء توبولوجى (X,τ) إذا وجدت المجموعتين المفتوحتين G,H في X بحيث أنه لأى مجموعة جزئية A من X يكون :

$$(i)\ A\cap G\neq\phi\ ,\ A\cap H\neq\phi$$

$$(ii)\ (A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$$

$$(iii)\ \ (A\cap G)\cup(A\cap H)=A$$

فإن المجموعة $H \cup G$ تسمى مجموعة أنفصال (disconnection) للمجموعة A

أو G, H مجموعتى أنفصال. ومن هذا التعريف يتضح أن :

$$(A\cap G)\cap(A\cap H)=A\cap(G\cap H)=\phi$$

$$\Leftrightarrow G\cap H\subseteq A^{c}$$

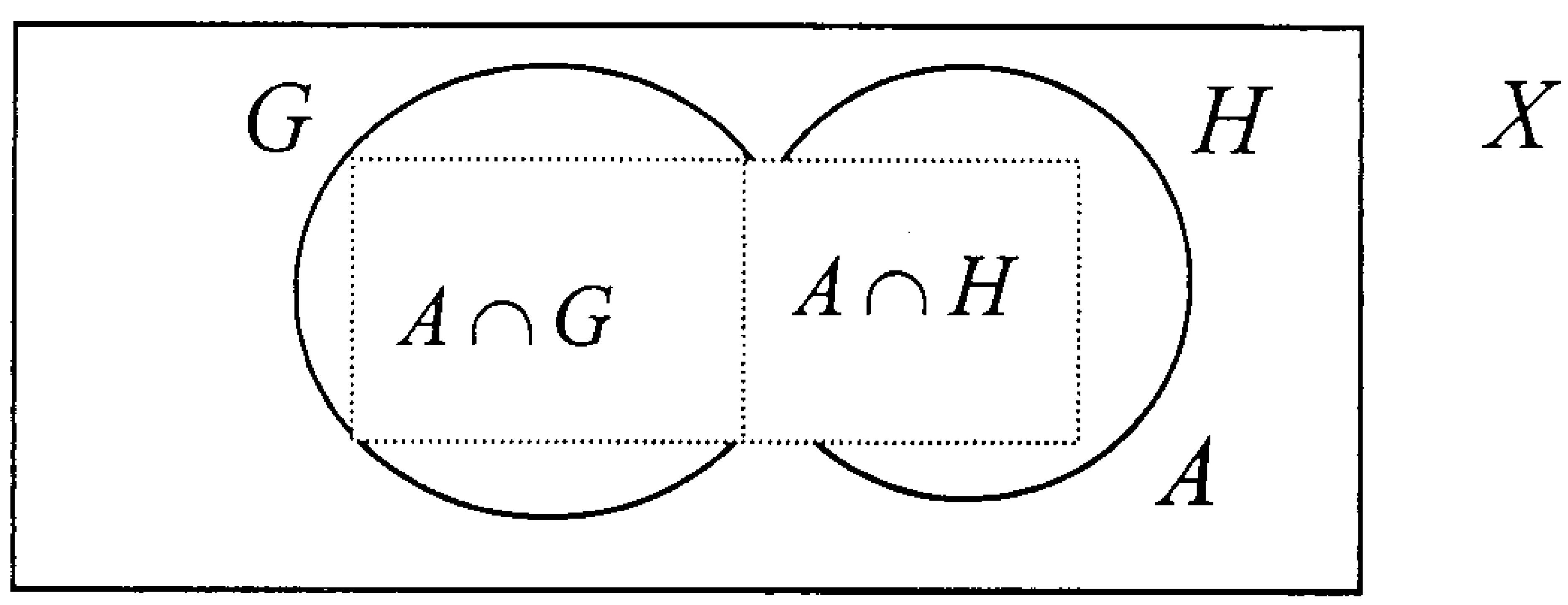
$$(A\cap G)\cup(A\cap H)=A\cap(G\cup H)=A$$

$$\Leftrightarrow A\subseteq G\cup H$$

ولذلك يمكن أعادة التعريف على النحو التالى :

المجموعة $G \cup H$ تسمى مجموعة أنفصال للمجموعة A إذا وفقط إذا كان :

$$A\cap G\neq\phi\ ,\ A\cap H\neq\phi\ ,\ A\subseteq G\cup H\ ,\ G\cap H\subseteq A^{c}$$



نظرية (٨. ١. ٧) :

في أى فضـــاء توبولوجى (X,τ) ، $A\subseteq X$ إذا كانت $G\cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة A فإن $A\cap G$ ، $A\cap H$ مجموعتين منفصلتين.

البرهان :

حيث أن $G\cup H$ مجموعة أنفصال فإن $G,H\in\tau$ حيث

$$(A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$$

والآن نثبت أن كلاً من المجموعتين $A\cap G$ ، $A\cap H$ لا تحتوى على نقاط

تراكم للآخرى لذلك نفرض أن : $p\in A\cap H\ ,\ p\in(A\cap G)'$

وحيث أن H مجموعة مفتوحة تحتوى p فإنها تحتوى على نقطة على الأقل من $A \cap G$ تختلف عن p أى أن $(A \cap G) \cap H \neq \phi$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أنه إذا كانت $p \in (A \cap H)'$ فإن $p \notin A \cap G$.

ومن ثم فإن $A \cap G$ ، $A \cap H$ مجموعات منفصلة.

بند (٢) : الفضاءات المترابطة والمجموعات المترابطة :

(Connected spaces and connected sets)

تعريف (٨. ٢. ١) :

يقال أن الفضاء التوبولوجى (X, τ) بأنه فضاء مترابط إذا كان لا يمكن كتابه X كأتحـــاد لمجموعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين ، خلاف ذلك فإنه فضاء غـــير مترابط **(disconnected)** . من هذا التعريف يمكن القول بأن (X, τ) فضاء مترابط إذا لم توجد مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث يكون :

$$A \cup B = X \ , \ A \cap \overline{B} = \phi \ , \ \overline{A} \cap B = \phi \ , \ A \neq \phi \ , \ B \neq \phi$$

ملاحظات (٨. ٢. ٢) :

(١) حيث أنه إذا كانت A, B مجموعتان غير خاليتين ومنفصلتين فإن

$$A \cap \overline{B} = \phi \ , \ \overline{A} \cap B = \phi$$

وهذا يؤدى إلى أن $A \cap B = \phi$ لأن $A \subseteq \overline{A} \ , \ B \subseteq \overline{B}$

ولذلك يمكن أستنتاج الآتي :

الفضـــاء الـــتوبولوجى (X, τ) يكون مترابط إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

(i) إذا لم توجد فيه مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث أن

$$A \cup B = X \ , \ A \cap B = \phi \ , \ A \neq \phi \ , \ B \neq \phi$$

(ii) المجموعــتان المفتوحتان والمغلقتان في الفضاء التوبولوجى (X, τ) هما فقط X, ϕ.

(٢) الفضــاء (X, τ) يكــون غير مترابط إذا وجدت فيه مجموعة جزئية فعلية مفــتوحة ومغلقــة في نفس الوقت لأنه إذا كانت A مجموعة جزئية فعلية مفتوحة ومغلقـــة فـــإن A^c تكـــون مجموعــــة مفـــتوحة حيـــث $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = X$. ومن ذلك نستنتج أن X فضاء مترابط.

مثال (٨. ٢. ٣) :

لـيكن (X, D) الفضــاء المنفصل حيث X تحتوى على أكثر من عنصر هو فضــاء غيرمــترابط لأن أى مجموعــة جزئية فعلية من X تكون مفتوحة ومغلقة وبصــورة أخــرى توجــد مجموعــتين مفتوحتين $\{p\}$ ، $\{p\}^c$ حيث p عنصر أختيارى من X.

مثال (٨. ٢. ٤) :

فضاء المكملات المنتهية (X, C) حيث X غير منتهية هو فضاء مترابط لأنه إذا كانــت A, B مجموعتان مفتوحتان وغير خاليتان ، فإن A^c, B^c مجموعات منتهية وحيث أن $A \cap B = \phi$ فإن $A^c \cup B^c = X$.

وهــذا بــدورة يؤدى إلى أن X مجموعة منتهية وهذا يناقض أن X مجموعة غير منتهــية وعلــيه لا توجد مجموعتان مفتوحتان وغير متقاطعتان أتحادهما هو المجموعة X.

مثال (٨. ٢. ٥) :

الفضاء الغير منفصل (X, I) يكون مترابط لأن X, ϕ هما فقط المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في X.

تعريف (٨. ٢. ٦) :

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي ، A مجموعة جزئية من X. يقال أن المجموعة A غير مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) غير مترابط وتسمى المجموعة A مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) مترابط.

من هذا التعريف يتضح أن المجموعة A تكون غير مترابطة إذا وجدت مجموعتين مفتوحتين G,H في الفضاء الكلى (X,τ) بحيث أن:

$$A=(A\cap G)\cup(A\cap H) \Leftrightarrow A\subset G\cup H$$

$$\phi=(A\cap G)\cup(A\cap H) \Leftrightarrow G\cap H\subset A^c$$

ولهذا فإن المجموعة $G\cup H$ تسمى مجموعة أنفصال للمجموعة A لأن :

$$A\subseteq G\cup H,(G\cap H)\cap A=\phi, A\cap G\neq\phi, A\cap H\neq\phi$$

من هذا التعريف أيضاً يتضح أن كلاً من المجموعتين ϕ ، $\{p\}$ مترابطة.

مثال (٨. ٢. ٧) :

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ ،

$$\tau=\{X,\phi,\{3\},\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$$

فإن المجموعة $A=\{1,4,5\}$ غير مترابطة لأن المجموعتين المفتوحتين $G=\{1,2,3\}$ ، $H=\{3,4,5\}$ في الفضاء (X,τ) ، $G\cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة A لأن

$$A\cap G=\{1\}\neq\phi \ , \ A\cap H=\{4,5\}\neq\phi$$

$$H\cap G\neq\phi \ , (A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi$$

$$(A\cap G)\cup(A\cap H) = A$$

مثال (٨. ٢. ٩) :

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ ،

$$\tau=\{X,\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$$

إذا كانــت $A=\{2,4,5\}$ ، $B=\{1,2\}$ فإن A مجموعة مترابطة بينما B ليست مترابطة. لأن

$$\tau_B=\{B,A,\{1\},\{2\}\} \text{ ، } \tau_A=\{A,\phi,\{2\},\{2,5\}\}$$

في الفضــاء الجــزئى (A,τ_A) لا توجد مجموعات مفتوحة وغير خالية في τ_A ولكن في الفضاء (B,τ_B) توجد المجموعتان غير الخاليتان $\{1\},\{2\}$ منفصلتان في B حيث $B=\{1\}\cup\{2\}$.

<u>مثال (٨. ٢. ١٠) :</u>

إذا كانت X مجموعة غير منتهية ، (X,C) هو فضاء المكملات المنتهية إذا كانت $A\subseteq X$ أثبت أن:

(١) إذا كانت A مجموعة غير منتهيه فإن A تكون مترابطة.

(٢) إذا كانت A مجموعة منتهية فإن A تكون غير مترابطة.

<u>الحل :</u>

(١) بفــرض أن A غــير مترابطة وهذا يعنى أن الفضاء الجزئى (A,τ_A) غير مــترابط وبالــتالى توجــد مجموعــتان منفصــلتان $G,H\in\tau_A$ بحيــث أن $A=G\cup H$ وبالـــــتالى توجـــــد $U_1,U_2\in\tau$ بحيـــــث أن $G=A\cap U_1$, $H=A\cap U_2$. وحيـــث أن $G\cap H=\phi$ فـــإن $\phi=(A\cap U_1)\cap(A\cap U_2)$. ومن ثم فإن

$$X=(A\cap U_1)^c\cup(A\cap U_2)^c=A^c\cup(U_1^c\cap U_2^c)$$

وهذا يؤدى إلى أن $A\subseteq U_1^c\cap U_2^c$. ولكن U_1^c,U_2^c مجموعات منتهية وهذا تناقض حيث A غير منتهية . وعليه تكون المجموعة A مترابطة.

(٢) واضح من (١).

نظرية (٨. ٢. ١١) :

المجموعــة الجزئــية A مــن الفضاء التوبولوجى (X,τ) تكون مترابطة في الفضاء الكلى إذا وفقط إذا كانت A مترابطة في الفضاء الجزئى (A,τ_A).

البرهان :

نفــرض أن A مجموعــة غير مترابطة في الفضاء الكلى (X,τ) وبالتالى فإن $G\cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة A في X.

والآن $G,H\in\tau$ ولذلك فإن $A\cap G\ ,\ A\cap H\in\tau_A$ وطبقاً لهذا فإن كلاً مــن $A\cap G\ ,\ A\cap H$ مجموعــة أنفصــال للمجموعة A في الفضاء الجزئى (A,τ_A) ومن ثم فإن A مجموعة مترابطة في (A,τ_A).

العكــس ، نفــرض أن A غير مترابطة في الفضاء الجزئى (A,τ_A). لنفرض أن $G^*\ ,H^*\in\tau_A$ مجموعــة أنفصــال لــلمجموعة A ولذلــك فإنــه توجد $G,H\in\tau$ بحيث أن $G^*=A\cap G\ ,\ H^*=A\cap H$. ولكن

$$A\cap G^*=A\cap(A\cap G)=A\cap G$$

$$A\cap H^*=A\cap(A\cap H)=A\cap H$$

وبالتالى فإن $G\cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة A في الفضاء الكلى (X,τ) وعليه تكون A مجموعة غير مترابطة في X.

ملاحظة (٨. ٢. ١٢) :

(١) بفــرض أن (X,τ) فضــاء غــير مــترابط ، $G\cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة X فإن

$$X=(X\cap G)\cup(X\cap H)\ ,$$

$$(X\cap G)\cap(X\cap H)=\phi$$

لكن $X\cap G=G\ ,\ X\cap H=H$

لذلك فإن X تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا وجدت مجموعتين G,H غير

خاليتين ومفتوحتين بحيث أن $G \cap H = \phi$ ، $X = G \cup H$

(٢) إذا كانت X مجموعة غير مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة X فإن الراسم : $f : X = G \cup H \to (Y, D)$

حيث $Y = \{0,1\}$ معرف عليها التوبولوجى المنفصل والمعرف بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ if \ x \in G \\ 1 & ; \ if \ x \in H \end{cases}$$

يكون راسم متصل.

نظرية (٨. ٢. ١٣) :

الصورة المتصلة للمجموعة المترابطة تكون مجموعة مترابطة.

البرهان :

بفرض أن $f : X \to Y$ دالة متصلة من الفضاء (X, τ) المترابط إلى الفضاء التوبولوجى (Y, τ^*). نثبت أن $f(X)$ مجموعة مترابطة. لذلك نفرض أن $f(X)$ مجموعة غير مترابطة، G, H مجموعتى أنفصال للمجموعة $f(X)$ فإن : $G \cap H = \phi$, $f(X) \subseteq G \cup H$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$X \subseteq f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) \ , \ f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \phi$$

وحيث أن $f^{-1}(G), f^{-1}(H)$ مجموعتين جزئيتين مفتوحتين وغير متقاطعتين فإن $f^{-1}(H)$ ، $f^{-1}(G)$ مجموعتى أنفصال للمجموعة X وهذا تعارض لأن X مجموعة مترابطة ومن ثم فإن $f(X)$ مجموعة مترابطة.

مما سبق يمكن أعطاء تعريف مكافئ للفضاءات المترابطة على النحو التالى :

نظرية (٨. ٢. ١٤) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) الفضاء (X,τ) مترابط.

(٢) لا يمكن التعبير عن X كأتحاد لمجموعتين غير خاليتين مغلقتين وغير متقاطعتين.

(٣) المجموعتان X,ϕ هما فقط المجموعتان المفتوحتان والمغلقتان في X.

(٤) لأى مجموعة جزئية فعلية $A\neq\phi$ من X يكون $b(A)\neq\phi$

(٥) إذا كانت $A=\{x,y\}$ ومعرف عليها التوبولوجى المنفصل فإنه لا يوجد راسم $f:X\to A$ يكون متصل وشامل.

البرهان :

$(2) \Rightarrow (1)$:

نفرض العكس ، أى توجد مجموعتين مغلقتين A,B بحيث أن :

$$X=A\cup B\ ,\ A\cap B=\phi,\ A\neq\phi\ ,\ A\neq\phi$$

وبالتالى فإن A^c, B^c مجموعتين مفتوحتين حيث

$$A^c\cup B^c=X\ ,\ A^c\cap B^c=\phi$$

وهذا تعارض لأن X فضاء مترابط.

$(3)\Rightarrow(2)$:

نفرض العكس أى توجد مجموعة جزئية A من X مفتوحة ومغلقة بحيث أن $A\neq X$ ، $A\neq\phi$ فإن هذا بدورة يؤدى إلى أن $A^c\neq\phi$ ، $A\neq\phi$ وحيث أن $A\cap A^c=\phi$ ، $X=A\cup A^c$ وعليه تكون المجموعتين A,A^c غير متقاطعتين ومغلقتين وأتحادهما يساوى X وهذا تعارض مع الفرض (٢) ومن ثم فإن X,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المغلقتان والمفتوحتان في X.

$(4)\Rightarrow(3)$:

نفرض أن A مجموعة جزئية فعلية من X وغير خالية بحيث أن $b(A)=\phi$

لكن $b(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}=\overline{A}\cap(A^o)^c=\phi$

وعليه تكون $\overline{A} \subseteq A^{o}$ ومن ثم فإن $A \subseteq \overline{A} \subseteq A^{o} \subseteq A$

أي أن $A^{o} = A$ ، $\overline{A} = A$ وتكون A مجموعة مفتوحة.

ومغلقة في نفس الوقت وهذا تعارض مع الفرض (٣).

$(4) \Rightarrow (5)$:

بفـــرض أنـــه يوجـــد راسم $f: X \to A$ يكون متصل وشامل وحيث أن $A = \{x, y\}$ ومعـــرف عليها التوبولوجى المنفصل ، فإن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة ومغلقـــة وهـــى مجموعـــة جزئـــية فعلية من A . حيث أن f راسم متصل فإن $B = f^{-1}(\{x\})$ مجموعـــة مفـــتوحة ومغلقـــة في X، وعلـــيه يكـــون :

$b(B) = \overline{B} \cap \overline{B^{c}} = B \cap B^{c} = \phi$.

وهذا تعارض مع الفرض (٤). ومن ثم فإن مثل هذا الراسم غير موجود.

$(5) \Rightarrow (1)$:

نفـــرض أن (X, τ) غير مترابط ، أى توجد مجموعتين غير خاليتين G, H ومفتوحتين في X بحيث أن : $X = G \cup H \ , \ G \cap H = \phi$

الراسم $f: X = G \cup H \to \{a, b\} = A$ المعرف بالصورة :

$$f(x) = \begin{cases} a & ; a \in G \\ b & ; b \in H \end{cases}$$

يكون متصل وشامل (لأن A معرف عليها التوبولوجى المنفصل)

وهذا تناقض مع الفرض وبالتالى فإن (X, τ) مترابط.

<u>مثال (٨. ٢. ١٥) :</u>

لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،

$$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

(١) أثبت أن (X, τ) غير مترابط .

(٢) المجموعة $A=\{b,d,e\}$ مترابطة.

الحل :

(١) حيث أنه توجد المجموعتين $\{a\},\{b,c,d,e\}$ المفتوحتين والمغلقتين في X ، $\{a\}\cup b,c,d,e\}=X$. فإن (X,τ) يكون غير مترابط.

التوبولوجى النسبى τ_A هو $\tau_A=\{A,\phi,\{d\}\}$.

وحيث أن A,ϕ هما المجموعتين الجزئيتين المفتوحتين والمغلقتين في A فإن A مجموعة مترابطة.

مثال (٨. ٢. ١٥) :

الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$ مترابط لأن R,ϕ هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان.

نظرية (٨. ٢. ١٦) :

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجى ، V,W مجموعتين منفصلتين في X. إذا كانت A مجموعة مترابطة في X بحيث أن $A\subseteq V\cup W$ فإن $A\subseteq V$ أو $A\subseteq W$.

البرهان :

بفرض أن المجموعة A ليست محتواة في V أو W فإن هذا يؤدى إلى أن :

$$A\cap V\neq\phi \ , \ A\cap W\neq\phi$$

وعليه تكون المجموعة A غير مترابطة ولاثبات ذلك :

حيث أن V,W مجموعتين منفصلتين في X فإن :

$$cl_A(A\cap V)\cap(A\cap W)=(A\cap\overline{V})\cap(A\cap W)$$
$$=A\cap(\overline{V}\cap W)=A\cap\phi=\phi$$

كذلك

$$cl_A(A\cap W)\cap(A\cap V)=(A\cap\overline{W})\cap(A\cap V)$$
$$=A\cap(\overline{W}\cap V)=A\cap\phi=\phi$$

ومن ثم فإن $A\cap W$, $A\cap V$ مجموعتين منفصلتين في الفضاء الجزئى (A,τ_A) وحيث أن $A\subseteq V\cap W$. فإن

$$(A\cap V)\cup(A\cap W)=A\cap(V\cup W)=A$$

أى أن A مجموعة غير مترابطة وهذا تناقض.

نتيجة (٨. ٢. ١٧) :

إذا كانــت المجموعــة A مــترابطة في أى فضاء توبولوجى (X,τ) فإنه لأى مجموعة جزئية B من X تحقق $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$ تكون مترابطة في X.

البرهان :

نفرض العكس ، أى أن B مجموعة غير مترابطة وبالتالى توجد مجموعتين V,W منفصلتين في B أى أن $V,W\in\tau$ وتحقق :

$$B\subseteq V\cup W\ ,\ B\cap V\neq\phi\ ,\ B\cap W\neq\phi\ \&\ (V\cap W)\cap B=\phi$$

وحيث أن A مجموعة مترابطة وتحقق $A\subseteq V\cup W$ فإنه طبقاً لنظرية (٨. ٢. ١٦) نجد أن أما $A\subseteq V$ أو $A\subseteq W$.

إذا كانت $A\subseteq V$ فإن $cl_B(A)\subseteq cl_B(V)$

ولكن $cl_B(A)=\overline{A}\cap B=B$ وبالتالى نحصل على $B\subseteq cl_B(V)$

وحيث أن V,W منفصلتين في B فإن :

$$cl_B(V)\cap W=\phi\Rightarrow B\cap W=\phi$$

وهذا تعارض وعليه تكون B مجموعة مترابطة.

ملاحظة (٨. ٢. ١٨) :

يمكــن أثبات النتيجة السابقة بصورة أخرى بفرض أن B مجموعة غير مترابطة في X بالتالى توجد مجموعتين $V,W\in\tau$ تحقق:

$$B \cap V \neq \phi \ , \ B \cap W \neq \phi \ , \ (V \cap W) \cap B = \phi \ , \ B \subseteq V \cup W$$

حيث أن $B \cap W \neq \phi$، W مجموعة مفتوحة فإنه توجد نقطة لاصقة x بالمجموعة A (لأن $B \subseteq \overline{A}$) بحيث يكون $x \in B \cap W$، ولكن W مجموعة مفتوحة تحوى x وهذا بدورة يؤدى إلى أن $A \cap W \neq \phi$.

وبنفس الطريقة يمكن أثبات أن $A \cap V \neq \phi$

ولكن $(V \cap W) \cap A \subseteq (V \cap W) \cap B = \phi , A \subseteq B \subseteq V \cup W$

أى أن $V \cup W$ مجموعة أنفصال للمجموعة A، ومن ثم فإن A تكون مجموعة غير مترابطة.

نتيجة (٨. ٢. ١٩) :

إذا كانت A مجموعة مترابطة في الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن $\overline{A}$ تكون مترابطة أيضاً.

البرهان :

واضح من نظرية(٨. ٢. ١٧)

ملاحظة (٨. ٢. ٢٠) :

عكس النتيجة السابقة غير صحيح في الحالة العامة لأن الفضاء العادى $(R, \mathcal{U})$ مترابط ولكن مجموعة الأعداد النسبية غير مترابطة في حين $\overline{Q} = R$.

نتيجة (٨. ٢. ٢١) :

الفضاء التوبولوجى (X, τ) يكون مترابط إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة ومترابطة.

البرهان :

بفرض أن A مجموعة كثيفة ومترابطة في الفضاء (X, τ) فإن $A \subseteq \overline{A} = X$

وحيث أن A مجموعة مترابطة فإن X مجموعة مترابطة.

بديهية (٨. ٢. ٢١) :

إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومنفصلتين من الفضاء التوبولوجى (X, τ) فإن $A \cup B$ تكون مجموعة غير مترابطة.

البرهان :

حيث أن A, B مجموعتين منفصلتين فإن $A \cap \overline{B} = \phi \ , \ \overline{A} \cap B = \phi$

وبفرض أن $G = (\overline{B})^c \ , \ H = (\overline{A})^c$ فإن G, H مجموعات مفتوحة حيث

$$(A \cup B) \cap G = A \ , \ (A \cup B) \cap H = B$$

وهاتين المجموعتين غير متقاطعتين وأتحادهما هو المجموعة $A \cup B$. لذلك فإن المجموعتين G, H مجموعتى أنفصال للمجموعة $A \cup B$ ومن ثم فإن $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة.

بديهية (٨. ٢. ٢٢) :

بفرض أن A, B مجموعتين جزئيتين من الفضاء التوبولوجى (X, τ)، $B \subseteq A$. إذا كانت B مجموعة مترابطة ، $G \cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة A فإن أما $B \cap H = \phi \ \ or \ B \cap G = \phi \ \ and \ B \subseteq G \ \ or \ B \subseteq H$

البرهان :

حيث أن $B \subseteq A$ ، $G \cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة A فإن :

$$A \subseteq G \cup H \Rightarrow B \subseteq G \cup H \ ,$$

$$G \cap H \subseteq A^c \Rightarrow G \cap H \subseteq B^c$$

لذلك إذا كانت كل من $B \cap G \neq \phi$ ، $B \cap H \neq \phi$ مجموعات غير خالية فإن $B \cup G$ تكون مجموعة أنفصال للمجموعة B. لكن B مجموعة مترابطة . إذاً

$$B \cap H = \phi \ \ or \ \ B \cap G = \phi$$

$$B \subseteq G \ \ or \ \ B \subseteq H$$

نظرية (٨. ٢. ٢٣) :

إذا كانت A,B مجموعتان مترابطتان وغير منفصلتان في الفضاء التوبولوجي (X,τ) فإن $A\cup B$ مجموعة مترابطة.

البرهان :

بفرض أن $A\cup B$ مجموعة غير مترابطة ، $G\cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة $A\cup B$. وحيث أن $A\subseteq A\cup B$ ، A مترابطة فإن من نظرية (٨. ٢. ١٦) أو بديهية (٨. ٢. ٢٢) أما $A\subseteq G$ أو $A\subseteq H$

وبطريقة مشابهه يمكن الحصول على أن إما $B\subseteq G$ أو $B\subseteq H$

والآن $if\ A\subseteq G\ \&\ B\subseteq H\ (or\ B\subseteq G\ \&\ A\subseteq H)$

فإن $(A\cup B)\cap G=A\ ,(A\cup B)\cap H=B$

مجموعتين منفصلتين وهذا تعارض مع الفرض أن $A\cup B$ مجموعة غير مترابطة. لذلك فإن إما $A\cup B\subseteq G$ أو $A\cup B\subseteq H$. وعليه فإن $G\cup H$ ليست مجموعة أنفصال للمجموعة $A\cup B$ ومن ثم فإن $A\cup B$ مجموعة مترابطة.

نظرية (٨. ٢. ٢٤) :

نفرض أن $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة من المجموعات المترابطة في الفضاء التوبولوجي (X,τ) بحيث أن $A_i\cap A_j\neq\phi\ ;\ \forall i,j$ فإن $A=\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ تكون مترابطة.

البرهان :

بفرض أن A_1 مجموعة جزئية مفتوحة ومغلقة في A. وبفرض أن $x\in A_1$ فإن $x\in A_{i_o}$ ، $i_o\in I$ وحيث أن $A\cap A_{i_o}$ مجموعة غير خالية مفتوحة ومغلقة في A_{i_o} ، A_{i_o} مجموعة مترابطة فإن $A\cap A_{i_o}=A_{i_o}$. ولأى $j\in I$ فإن $A_i\cap A_j$ تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة في A_j ولكن $A_{i_o}\subseteq A$ فإن

$$\phi\neq A_{i_o}\cap A_j\subseteq A_1\cap A_j=A_j$$

حيث A_j مجموعة مترابطة . وعليه يكون $A_j \subseteq A_1 \; ; \forall j$ لذلك فإن $A = \cup A_j \subseteq A_1$. إذاً $A = A_1$.

<u>نتيجة (٨. ٢. ٢٥) :</u>

إذا كانت الدالة $f: X \to Y$ متصلة وشاملة من الفضاء المترابط X إلى الفضاء التوبولوجى Y فإن Y فضاء مترابط أيضاً.

<u>نتيجة (٨. ٢. ٢٦) :</u> خاصية أن يكون الفضاء مترابط هى خاصية توبولوجية.

<u>نظرية (٨. ٢. ٢٧) :</u>

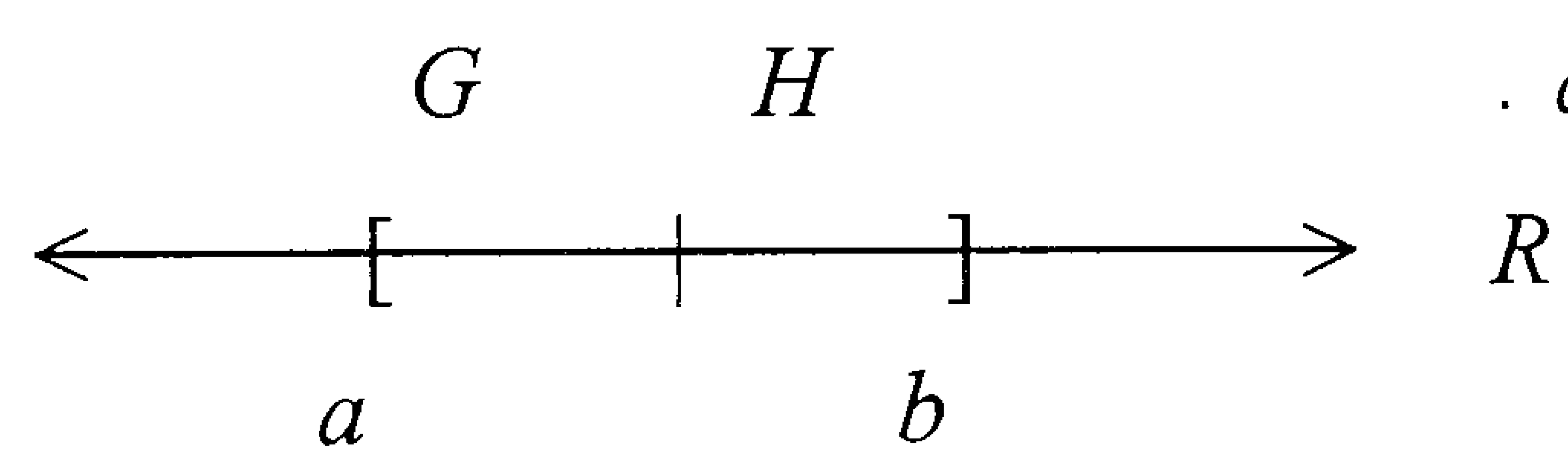
أى فترة مغلقة $[a,b]$ في الفضاء العادى $(R,\mathcal{U})$ تكون مترابطة.

<u>البرهان :</u>

بفرض أن الفترة $A=[a,b]$ ليست مترابطة أى أن الفضاء الجزئى A غير مترابط. وعليه توجد مجموعتان مفتوحتان $G, H \in \tau_A$ بحيث يكون :

$$G \cup H = A \;, G \cap H = \phi \;,\; G \neq \phi \;,\; H \neq \phi$$

وحيث أن G, H مجموعتين غير خاليتين لذلك نفرض أن $a \in G$ ، $b \in H$ بحيث أن $a < b$.



بفرض أن $S=[a,b] \cap G$ ، $c = \sup\{x : x \in S\}$. وحيث أن $[a,b]$ مجموعة مغلقة فإن $c \in [a,b]$ وعليه إما أن يكون $c \in G$ أو $c \in H$.

إذا كانت $c \in G$ ، G مجموعة مفتوحة فإنه توجد فترة مفتوحة $(c-\delta, c+\delta)$ حيث $(c-\delta, c+\delta) \subseteq G$. وهذا يعنى أن $c+\delta \in G$ ، $c+\delta < b$. وهذا تعارض مع تعريف العنصر c لأن $c = \sup\{[a,b] \cap G\}$. وفي الحالة الثانية إذا كانت $c \in H$ ، H مجموعة مفتوحة فإنه توجد فترة مفتوحة $(c-\delta, c+\delta)$ بحيث $(c-\delta, c+\delta) \subseteq H$ وهذا أيضاً يناقض أن $c = \sup S$. ومن ثم فإن

$[a,b]$ مجموعة مترابطة.

<u>ملاحظة :</u> يمكن توضيح الجزء الأخير من البرهان بصورة آخرى :

نلاحظ أن G مجموعة مغلقة في A لأن H مجموعة مفتوحة، $G=A-H$

وبالتالى توجد مجموعة مغلقة F في A بحيث أن $G=A\cap F$. وبالتالى

$$[a,b]\cap G=[a,b]\cap(A\cap F)$$
$$=([a,b]\cap A)\cap F=[a,b]\cap F$$

وهـــذا يعـــنى أن المجموعـــة $S=[a,b]\cap G$ مغلقة. وعليه تكون $c\in S$ حيث $c\notin H$. ومن جانب آخر $(c,b]\subseteq H$، H مجموعة مغلقة ومن ثم فإن $c\in H$ وهذا تعارض. أى أن A تكون مترابطة.

النظرية السابقة تقودنا إلى النظرية التالية.

<u>نظرية (٨. ٢. ٢٨) :</u>

أى مجموعة $E\subseteq R$ تحتوى على أكثر من عنصر تكون مترابطة إذا وفقط إذا كانت E فترة.

<u>البرهان :</u>

يكفى أن نبرهن على أنه إذا كانت $E\subseteq R$ مجموعة مترابطة وتحتوى على أكثرمن عنصر فإن E فترة.

نفرض العكس ، أى أن E ليست فترة . وهذا يعنى أنه إذا كانت $a,b\in E$ فإنه لكل $c\in R$ بحيث أن $a<c<b$ فإن $c\notin E$.

وبفرض أن $G=(-\infty,c)\cap E\ ,\ H=(c,\infty)\cap E$

فإن G,H مجموعتان مفتوحتان وغير خاليتان في الفضاء الجزئى E وايضاً

$$G\cap H=\phi\ ,\ G\cup H=E$$

وبالتالى فإن E مجموعة غير مترابطة وهذا تعارض.

نعلم أن نظرية القيمة المتوسطة تنص على أنه :

إذا كانت الدالة $f:R \to R$ متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ فإنه يوجد $x \in R$ بحيث أن $f(a)<f(x)=\alpha<f(b)$

وحيث أن الصورة المتصلة لكل مجموعة مترابطة تكون مجموعة مترابطة ، بالتالى يكون لدينا النظرية التالية التى تعتبر تعميم لنظرية القيمة المتوسطة.

نظرية (٨. ٢. ٢٩) :

بفرض أن $f:X \to R$ دالة متصلة حيث X فضاء توبولوجى مترابط. إذا كانت $\alpha \in R$ ، $x_1, x_2 \in X$ بحيث أن $f(x_1)<\alpha<f(x_2)$ فإنه توجد $x \in X$ بحيث أن $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$ حيث $f(x)=\alpha$.

البرهان :

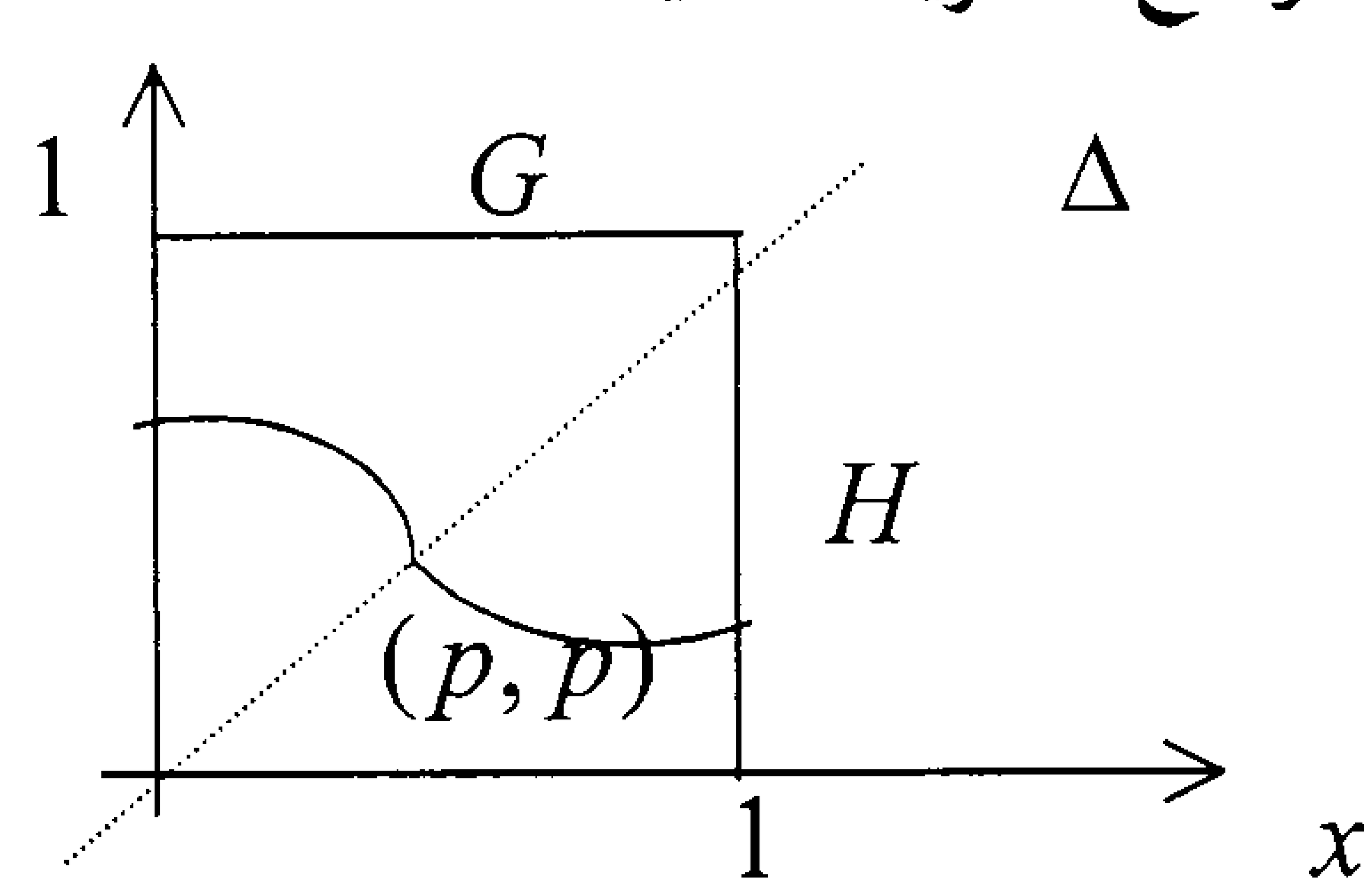
من نظرية (٨. ٢. ١٣) نحصل على أن $f(X)$ مجموعة مترابطة في R وبالتالى فإن $f(X)$ فترة وحيث أن $f(x_1), f(x_2) \in f(X)$ ، $f(x_1)<\alpha<f(x_2)$ فإن $\alpha \in f(X)$ وعليه يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x)=\alpha$.

من أهم التطبيقات على نظرية الترابط هى نظرية النقطة الثابتة(fixed point Theorem)

نظرية (٨. ٢. ٣٠) :

بفرض أن $I=[a,b]$ ، $f:I \to I$ دالة متصلة فإنه توجد نقطة $p \in I$ بحيث $f(p)=p$.

قبل أن نعطى البرهان نوضح النظرية هندسياً



منحنى الدالة $f:I \to I$ يقع داخل مربع الوحدة

$$I^2 = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$$

والنظرية تنص على أن المنحنى للدالة f يتقاطع مع القطر Δ.

والآن إذا كانت $f(0)=0$ أو $f(1)=1$ فإن النظرية تكون قد بُرهنت.

لذلك نفرض أن $f(0)>0$ ، $f(1)<1$

وحيث أن f دالة متصلة فإن الدالة $F:I \to R^2$ والمعرفه بالنحو التالى : $F(x)=(x, f(x))$ أيضاً تكون متصلة.

بوضع $G=\{(x, y): x<y\}$ ، $H=\{(x, y):\ y<x\}$

فإن $(1, f(1)) \in H\ ,\ (0, f(0)) \in G$

وبالتالى إذا كانت $F(I)$ لا تحتوى على نقاط من القطر $\Delta = \{(x, y): x=y\}$ حيث $\Delta = R^2 - (G \cup H)$. فإن $G \cup H$ مجموعة أنفصال للمجموعة $F(I)$. وهذا تعارض لكون أن I مترابطة ، الصورة المتصلة $F(I)$ مترابطة وبالتالى فإن $F(I)$ تحتوى على نقطة $(p, p) \in \Delta$ وعليه تكون $f(p)=p$.

بند (٣) : الترابط المحلى :

سنقوم بدراسة المركبة لفضاء توبولوجى ثم المركبة لمجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى.

تعريف (٨. ٣. ١) :

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجى. تسمى المجموعة الجزئية C من X مركبة للفضاء X إذا كانت C مجموعة مترابطة وكانت غير محتواة في أى مجموعة مترابطة أكبر منها أى أن C هى أكبر مجموعة جزئية مترابطة في X.

مثال (٨. ٣. ٢) :

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى مترابط فإن X يملك مركبة مترابطة واحدة

فقط هى X نفسها. الفضاء الحقيقى $(R,\mathcal{U})$ له مركبة واحدة هى R.

مثال (٨. ٣. ٣) :

في الفضاء المنفصل (X,D) أى مركبة مترابطة فيه تحوى نقطة واحدة فقط.

مثال (٨. ٣. ٤) :

بفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ،

$$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

فإن مركبات X هى $\{a\}$, $\{b,c,d,e\}$ وأى مجموعة جزئية مترابطة أخرى مثل $\{b,d,e\}$ هى مجموعة جزئية في واحدة من المركبات.

نظرية (٨. ٣. ٥) :

أى مجموعة جزئية مترابطة في أى فضاء توبولوجى تكون محتواه في مركبة مترابطة.

البرهان :

بفرض أن A مجموعة جزئية مترابطة في الفضاء التوبولوجى (X,τ). إذا كانت $\{A_i : i\in N\}$ عائلــــة المجموعـــات المـــترابطة الـــتى تحـــتوى A أى أن $A_i \subseteq A\ ;\forall i\in N$ فإن $A\neq\phi$ وعليه يكون $\bigcap_{i\in N} A_i\neq\phi$. من نظرية(٨. ٢. ٢٤) نجد أن $C=\bigcup_{i\in N} A_i$ مجموعة مترابطة حاوية للمجموعة A وإذا كانت E مجموعة مترابطة تحتوى C فإن E تحتوى A أيضاً وعليه فإن $E=C$ ومن ثم فإن C مجموعة مترابطة حاوية للمجموعة A.

نتيجة (٨. ٣. ٦) :

كل نقطة في الفضاء التوبولوجى X تكون محتواه في مركبة مترابطة.

البرهان :

حيث أن لكل $x\in X$ فإن المجموعة $\{x\}$ مترابطة.

نظرية (٨. ٣. ٧) :

أى مركبة مترابطة في فضاء توبولوجى X تكون مجموعة مغلقة.

البرهان :

لتكن C مركبة مترابطة ، حيث أن $C \subseteq \overline{C}$ فإن $\overline{C}$ مجموعة مترابطة حاوية للمجموعة C وذلك حسب نتيجة (٨. ٢. ١٩) وحيث أن C مركبة فهى أكبر مجموعة مترابطة وبالتالى فإن $\overline{C} \subseteq C$ ومن ثم فإن $\overline{C} = C$ أى أن C مغلقة.

نظرية (٨. ٣. ٨) :

عائلة المركبات المترابطة في الفضاء التوبولوجى X تكون تجزيئاً للفضاء X.

البرهان :

بفرض أن $\{C_i\}_{i \in N}$ عائلة المركبات المترابطة للفضاء التوبولوجى X فإن :

(i) $C_i \cap C_j = \phi \;\; ; \forall i \neq j$ لأنه إذا كانت $C_i \cap C_j \neq \phi$ فإنه ينتج من نظرية (٨. ٣. ٢٣) أن المجموعة $C_i \cup C_j$ تكون مترابطة وحاويه للمجموعتين C_i , C_j. وحيث أن C_i , C_j مركبتين مترابطتين فإن $C_i = C_i \cup C_j = C_j$ وهذا تناقض.

(ii) واضح أن $X = \underset{i \in N}{\cup} C_i$

تعريف (٨. ٣. ٩) :

ليكن (X, τ) فضاء توبولوجى ، A مجموعة جزئية من X. تسمى أى مركبة مترابطة للفضاء الجزئى (A, τ_A) بمركبة المجموعة A. ويرمز لها بالرمز $C(A)$ أى أن :

$$C(A) = \cup \{ E \subseteq A : E \text{ مجموعة مترابطة} \}$$

إذا كانت $A = X$ فإن $C(X) = \cup \{ E \subseteq X : E \text{ مجموعة مترابطة} \}$ هى مركبة الفضاء X وإذا كانت $p \in E$ فإن :

$$C(p) = \cup \{ E \subseteq A : p \in E , E \text{ مجموعة مترابطة} \}$$

تسمى مركبة النقطة p .

مثال (٨. ٣. ١١) :

ليكن $(R, \mathcal{U})$ الفضاء العادى ، $A = R - \{-1,0,2\}$ مجموعة جزئية من R فإن A لها أربع مركبات هي: $(-\infty,-1), (-1,0), (0,2), (2,\infty)$

تعريف (٨. ٣. ١٢) :

يقـــال أن الفضاء التوبولوجي (X, τ) مترابط محلياً (locally connected) عند الـــنقطة $p \in X$ إذا وفقـــط إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوى p تحتوى على مجموعـــة جزئية مترابطة. أى أن كل المجموعات المفتوحة المترابطة التى تحتوى p هي أساس محلي عند p .

ويقال أن الفضاء مترابط محلياً إذا كان مترابط محلياً عند كل نقطة.

مـــن ذلك نجد أن X فضاء مترابط محلياً إذا كان من أجل أى جوار N للنقطة p لكل $p \in X$ يوجد جوار مترابط W للنقطة p حيث $W \subseteq N$.

مثال (٨. ٣. ١٣) :

كـــل فضـــاء منفصل (X, D) مترابط محلياً لأنه إذا كانت $p \in X$ فإن $\{p\}$ مجموعة مفتوحة مترابطة محتواة في أى مجموعة مفتوحة تحتوى p . لاحظ أن X فضاء ليس مترابط إذا كانت X تحتوى على أكثر من نقطتين.

نظرية (٨. ٣. ١٤) :

إذا كـــان (X, τ) فضاء مترابط محلياً ، Y مجموعة جزئية مفتوحة في X فإن الفضاء الجزئى (Y, τ_Y) يكون مترابط محلياً.

البرهان :

بفرض أن $p \in Y$ ، N جوار للنقطة p في الفضاء الجزئى (Y, τ_Y). إذاً توجد مجموعـــة مفتوحة U في X بحيث أن $Y \cap U \subseteq N$. لكن Y مجموعة مفتوحة في X فإنه ينتج من ذلك أن $Y \cap U$ مجموعة مفتوحة في X وعليه تكون N جوار

للنقطة p في X، وحيث أن X فضاء مترابط محلياً فإنه يوجد جوار مترابط W في X بحيث أن $W \subseteq N$. والآن $V = W \cap Y \subseteq Y \cap N = N$. حيث أن V جوار مترابط للنقطة p في Y ، فإن (Y, τ_Y) فضاء مترابط محلياً.

<u>نتيجة (٨. ٣. ١٥) :</u>

المركبة المترابطة لأى فضاء مترابط محلياً هى مجموعة مفتوحة في X .

<u>نظرية (٨. ٣. ١٦) :</u>

إذا كان (X, τ) فضاء توبولوجى فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) X مترابط محلياً

(٢) مركبة أى مجموعة مفتوحة في X هى مجموعة مفتوحة.

(٣) المركبات المترابطة في X تشكل أساس للفضاء X.

<u>البرهان :</u>

(١) $\Leftarrow$ (٢)

بفرض أن X فضاء مترابط محلياً وأن Y مجموعة جزئية مفتوحة في X وحسب نظرية (٨. ٣. ١٤) يكون (Y, τ_Y) فضاء مترابط محلياً. وحيث أن Y مجموعة مفتوحة فإنه بناءاً على نظرية (٨. ٣. ١٥) تكون مركبة Y مجموعة مفتوحة في Y.

(٢) $\Leftarrow$ (٣)

بفرض أن G مجموعة مفتوحة في X وأن مركبات G مفتوحة في X وحيث أن المركبات مترابطة فهى عبارة عن أتحاد من المجموعات المفتوحة وبالتالى فهى أساس للفضاء X.

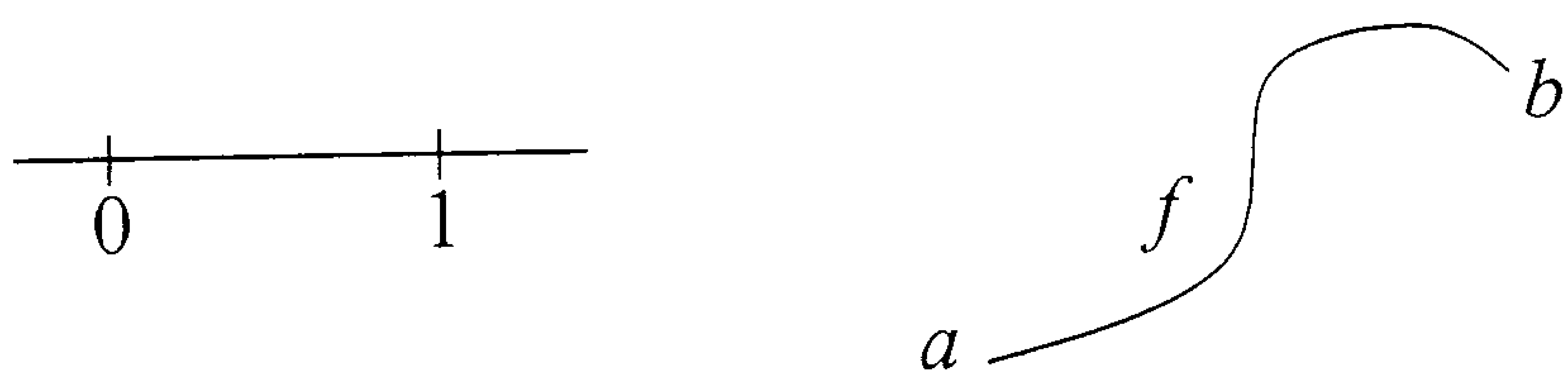
(٣) $\Leftarrow$ (١)

بفرض أن N جوار مفتوح للنقطة $p \in X$. من (٣) فإن N هى عبارة عن أتحاد من المجموعات المفتوحة المترابطة وبالتالى فإن X مترابطة محلياً.

بند (٤) : الترابط المسارى :

تعريف (٨. ٤. ١) :

بفـــرض أن $I=[0,1]$ فترة مغلقة. المسار من النقطة a إلى النقطة b في الفضاء الـــتوبولوجي (X,τ) هـــو دالـــة $f:I\to X$ متصلة بحيث أن $f(0)=a$ ، $f(1)=b$. في هذه الحالة a تسمى نقطة البداية ، b نقطة النهايه للمسار



مثال (٨. ٤. ٢) :

لأى نقطة $p\in X$ فإن الدالة الثابته $e_p:I\to X$ حيث $e_p(s)=p$ هي دالة متصلة فهى مسار يسمى المسار الثابت.

مثال (٨. ٤. ٣) :

بفرض أن $f:I\to X$ مسار من a إلى b فإن الدالة $f:I\to X$ المعرفة بالصورة : $f(s)=f(1-s)$ هى مسار من b إلي a .

مثال (٨. ٤. ٤) :

بفرض أن $f:I\to X$ مساراً من a إلى b ، $g:I\to X$ مساراً من b إلى c فإن الدالة fog حيث

$$fog(s)=\begin{cases} f(2s) & ;\ 0\le s\le \frac{1}{2} \\ g(2s-1) & ;\ \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

هى مساراً من a إلى c.

يتضح مما سبق أن العلاقة المعرفة على المجموعة X حيث (X,τ) فضاء توبولوجى بالصورة: $a\sim b \Leftrightarrow \exists\ path\ f:I\to X$

هـــى علاقـــة تكـــافؤ تجـــزئ X إلى فصـــول تكافؤ $C(x)$ لكل $x \in X$ حيث $C(x)=\{y \in X : x \sim y\}$.

تعريف (٨. ٤. ٥) :

فصـــول الـــتكافؤ الناشـــئة من علاقة التكافؤ السابقة تسمى المركبات المسارية **(path connected)** للفضاء X .

تعريف (٨. ٤. ٦) :

يقال أن الفضاء (X, τ) مترابط مسارياً **(pathwise connected)** إذا وجدت لـــه مركبة مسارية واحدة فقط وتسمى المجموعة الجزئية $A \subseteq X$ مترابطة مسارياً إذا كان الفضاء الجزئى (A, τ_A) مترابط مسارياً.

مثال (٨. ٤. ٧) :

الفضـــاء العـــادى $(R, \mathcal{U})$ مترابط مسارياً لأن الدالة $f : I \to X$ والمعرفة بالصورة : $f(x)=(1-x)a+bx \; ; \forall x \in I \; , \; a, b \in R$

هى دالة خطية فهى متصلة وتحقق : $f(0)=a \; , \; f(1)=b$

وعليه فإن f مسار من a إلى b .

مثال (٨. ٤. ٨) :

الفضـــاء المنفصل (X, D) حيث X تحتوى على أكثر من عنصر غير مترابط مســـارياً لأن أى دالـــة $f : I \to X$ تكون غير متصلة والسبب يرجع لكون أن المجموعة $\{x\}$ مفتوحة في X ولكن $f^{-1}(\{x\})=\{0\}$ ليست مجموعة مفتوحة في I .

مثال (٨. ٤. ٩) :

الفضاء غير المنفصل X الذى يحتوى على أكثر من عنصر يكون مترابط مسارياً لأن أى دالة $f : I \to X$ تكون متصلة.

نظرية (٨. ٤. ١٠) :

كل فضاء مترابط مسارياً يكون مترابط.

البرهان :

بفــرض أن (X,τ) فضــاء مــترابط مسارياً فإن لكل $x \in X$ يوجد مساراً $f: I \to X$ حيث $f_x(0)=x_o \; ; \; f_x(1)=x$

وحيــث أن I فضاء مترابط (لأن I فترة) ، f دالة متصلة فإن $f_x(I)$ مترابطة لكل $x \in X$. لكن $X = \underset{x\in X}{\cup} f_x(I)$.

وعليه تكون X مترابطه لأنها أتحاد مجموعات مترابطه غير متقاطعه مثنى مثنى.

نظرية (٨. ٤. ١١) :

المركبة المسارية $C(x)$ لكل نقطة x في الفضاء التوبولوجى (X,τ) هى أكبر مجموعة مترابطة مسارياً في X تحتوى النقطة x.

البرهان :

بفــرض أن A مجموعــة مــترابطة مسارياً في X وتحتوى النقطة x. بفرض أن $y \in A$ فإنه يوجد مساراً $f: I \to X$ بحيث أن $f(0)=x \; ; \; f(1)=y$.

بفــرض أن $i: A \to X$ هــو راســم الاحتواء المعرف بالصورة $i(x)=x$ لكل $x \in A$. والآن نعتــبر $g = iof: I \to X$. فهو دالة متصلة لأن تركيب دالتين متصلتين حيث

$$g(0)=iof(0)=i(f(0))=i(x)=x \; ,$$

$$g(1)=iof(1)=i(f(1))=i(y)=y$$

ومن ثم فإن $x \sim y$ أى أن $y \in C(x)$. ومن ذلك نحصل على $A \subseteq C(x)$ أى أن $C(x)$ هو أكبر مجموعة تحتوى x.

والآن نــبرهن أن $C(x)$ مــترابطه مسارياً ، لذلك نفرض أن $p \in C(x)$ أى أن $p \sim x$. وعليه فإنه يوجد مسار $f: I \to X$ بحيث أن $f(0)=x, f(1)=p$ المطلوب الآن أثبات أن $f(I) \subseteq C(x)$.

$$Let \;\; r \in I \; , \; g: I \to X \; is \; path \; , \; g(t)=f(rt) \; ; \forall t \in I$$

$$\Rightarrow g(0)=x \; ; \; g(1)=f(1)=p$$

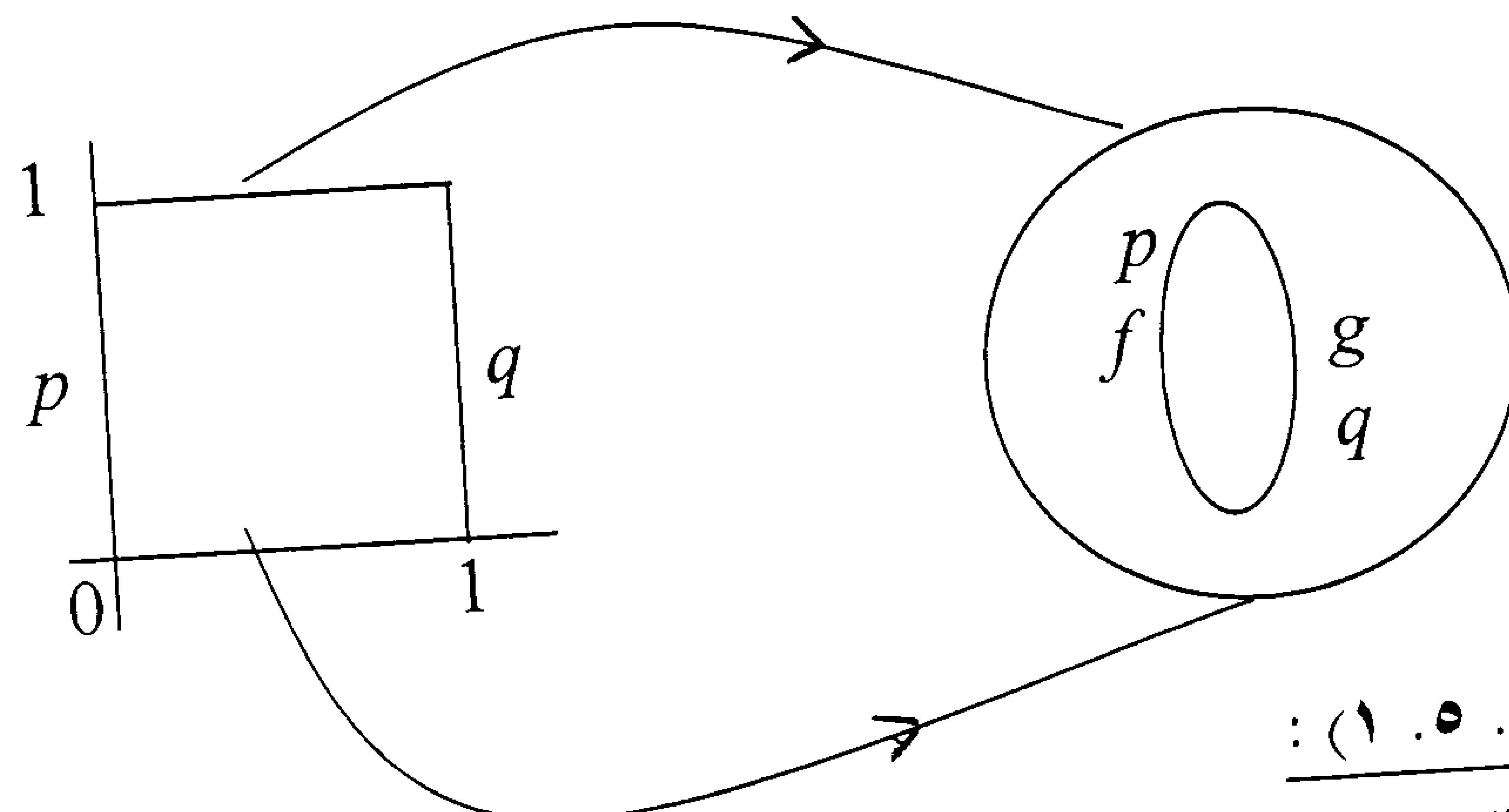
$$\Rightarrow x \sim g(t) \Rightarrow f(x) \subseteq C(x) \Rightarrow f(I) \subseteq C(x)$$

بند (٥) : المسارات المتوافقة توبولوجياً : (Homotopic Paths)

بفــرض أن $f, g: I \to X$ مسارين لهما نفس نقطة البداية $p \in X$ ونقطة الــنهاية $q \in X$. يقــال أن f متوافقة توبولوجياً (Homotopic) مع g ونكتب $f \approx g$ إذا وجد دالة متصلة $H: I^2 \to X$. بحيث أن

$$H(s,0) = f(s)\ ,\ H(0,t) = p$$
$$H(s,1) = g(s)\ ,\ H(1,t) = q$$

في هذه الحالة الدالة H تسمى توافقية (Homotopy) من f إلى g.



نظرية (٨. ٥. ١) :

العلاقة $\approx$ هى علاقة تكافؤ.

البرهان :

(i) بفــرض أن $f: I \to X$ مســاراً أختــيارى فــإن $f \approx f$ لأن الدالــة $H: I^2 \to X$ حيــث $H(s,t) = f(s)$ دالة توافقية من f إلى f. أى أن $f \approx f$.

(ii) بفرض أن $f \approx g$ ، $H: I^2 \to X$ دالة توافقية من f إلى g، فإن الدالة $H: I^2 \to X$ حيث $H(s,t) = H(s,1-t)$

دالة توافقية من g إلى f أى أن $g \approx f$.

لتوضيح ذلك :

$$H(s,0)=H(s,1)=g(s)$$
$$H(s,1)=H(s,0)=f(s)$$
$$H(0,t)=H(0,1-t)=p$$
$$H(1,t)=H(1,1-t)=q$$

(iii) بفرض أن $f \approx g$ ، $g \approx h$. الدالة $F:I^2 \to X$ توافقية من f إلى g ، الدالة $G:I^2 \to X$ توافقية من g إلى h ، والآن الدالة $H:I^2 \to X$ المعرفة بالصورة :

$$H(s,t)=\begin{cases} F(s,2t) & ;if \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1) & ;if \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

دالة توافقية من f إلى h أى أن $f \approx h$.

تعريف (٨. ٥. ٢) :

المسار $f:I \to X$ الذى فيه نقطة البداية تتطابق مع نقطة النهاية أى أن $f(0)=f(1)=p$ يسمى مسار مغلق عند النقطة $p \in X$.

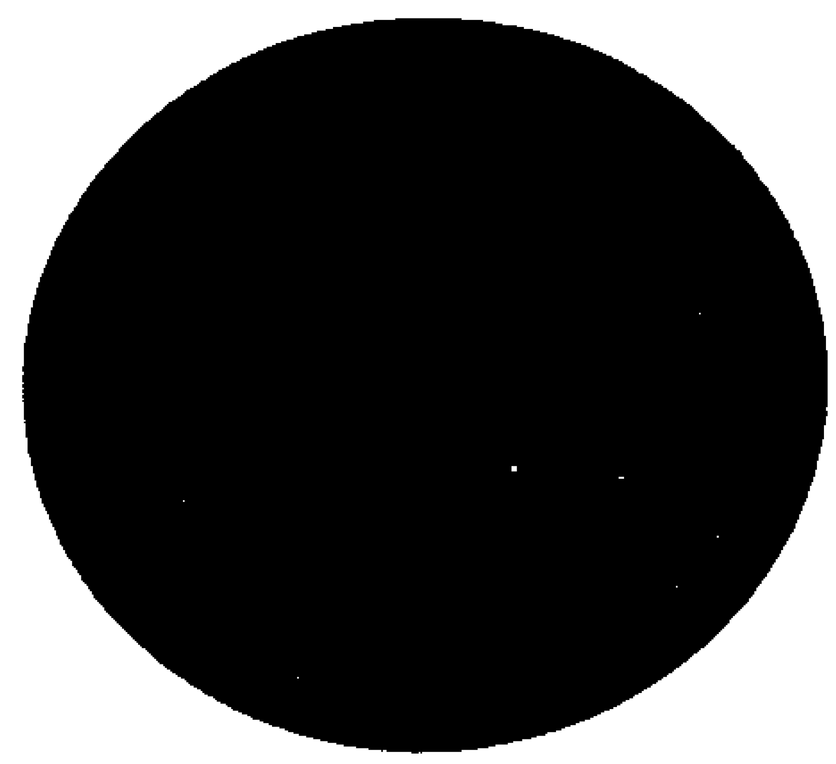
في الحالة الخاصة ، المسار الثابت $e_p:I \to X$ حيث $e_p(s)=p$ لكل $s \in I$ هو مسار مغلق. المسار المغلق $f:I \to X$ قابل للانكماش (contractable) عند نقطة إذا كان متوافق مع مسار مغلق.

تعريف (٨. ٥. ٣) :

الفضاء التوبولوجى X يسمى بسيط الترابط إذا كان كل مسار مغلق في X قابل للانكماش لنقطة.

مثال (٨. ٥. ٤) :

القرص المفتوح في المستوى R^2 بسيط الترابط.



Simply connected

تمارين عامة على الباب الثامن

(١) بين أن خاصية الترابط ليست وراثية ؟

(٢) إذا كان (X,τ) فضاء مترابط، $\tau^*\subseteq\tau$. بين أن (X,τ^*) فضاء مترابط؟

(٣) إذا كـــان (X,τ_1) ، (X,τ_2) فضائين مترابطين هل $(X,\tau_1\cap\tau_2)$ فضاء مترابط ؟

(٤) إذا كانـــت Y مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى (X,τ). برهن أن $\overline{Y}$ تكـــون غير مترابطة إذا وفقط إذا وجدت مجموعتين A,B غير خاليتين بحيث يكون $A\cup B=Y$ ، $\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$.

(٥) صـــف المجموعـــات المترابطة في الفضاء التوبولوجى (X,τ) إذا كان τ هو التوبولوجى المنفصل ، τ التوبولوجى غير المنفصل.

(٦) بين أن الفضاء (X,τ) يكون مترابط إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة ومترابطة.

(٧) هل المجموعات الجزئية من الفضاء العادى $(R^2,\mathcal{U})$ الآتية تكون مترابطة:

$$A=\{(x,y)\in R^2\ , y=0\},\ B=\{(x,y)\in R^2\ ,\ x\neq 1\}$$

(٨) أوجد مركبات فضاء النقطة المختارة.

(٩) إذا كانت C مركبه في الفضاء Y وكانت $f:X\rightarrow Y$ دالة متصلة من

الفضاء X إلى الفضاء Y. أثبت أن $f^{-1}(C)$ هي أتحاد مركبات في الفضاء X.

(١٠) أثبت أن الصورة المتصلة لأى مجموعة جزئية مترابطة مسارياً هى مجموعة مترابطة مسارياً.

(١١) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي، $A\subseteq X$ مجموعة كثيفة في X ومترابطة مسارياً. هل الفضاء (X,τ) مترابط مسارياً.

(١٢) إذا كان (X,τ) فضاء مترابط محلياً، $f:X\to Y$ دالة متصلة ومفتوحه وشاملة. بين أن الفضاء Y يكون مترابط محلياً.

(١٣) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي، $A,B\subseteq X$ مجموعتين مغلقتين بحيث أن $A\cup B$، $A\cap B$ مجموعتين مترابطتين. بين أن كل من A,B مجموعة مترابطة.

(١٤) إذا كانت A مجموعة جزئية مترابطة في الفضاء (X,τ). هل A^o، $b(A)$ مجموعتان مترابطتان أيضاً ؟

(١٥) إذا كان (X,τ) فضاء مترابط محلياً. بين أنه إذا كانت Y مجموعة جزئية من X، C مركبة مترابطة للمجموعة Y فإن $b(C)\subseteq b(Y)$

(١٦) بين أن القرص المفتوح D في المستوى R^2 مترابط مسارياً.

(١٧) عين مركبات فضاء المكملات المنتهية.

(١٨) بين أن الفضاء الغير منفصل بسيط الترابط.

(١٩) بين أن كل مجموعة مفتوحة في الفضاء المترابط محلياً تكون مترابطة محلياً.

(٢٠) بين أن خاصية أن يكون الفضاء بسيط الترابط هى خاصية توبولوجية.

(٢١) بين أنه إذا كان للفضاء التوبولوجى عدد منتهى من المركبات فإن كل مركبة تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة في الوقت نفسة.

(٢٢) بين أنه إذا كانت مركبات الفضاء المحكم عبارة عن مجموعات مفتوحة فإن عددها منتهى.

الباب التاسع

فضاء حاصل الضرب –

فضاء خارج القسمة –

الزمرة التوبولوجية

الباب التاسع

فضاء حاصل الضرب – فضاء خارج القسمة – الزمرة التوبولوجية

Product space -quotient Space and Topological Group

بند(١) : فضاء حاصل الضرب :

فضاء حاصل الضرب هو بناء توبولوجي على مجموعة حاصل الضرب الديكارتي لعائلة من المجموعات.

تعريف (٩ . ١ . ١) :

ليكن لدينا $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ عائلة من المجموعات، فإن مجموعة العناصر $\{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) : x_i \in X_i \forall i \in \Gamma\}$ تسمى مجموعة حاصل الضرب للعائلة $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ ونرمز لها بالرمز $\prod_{i\in\Gamma} X_i$ أي أن :

$$\prod_{i\in\Gamma} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) : x_i \in X_i \forall i \in \Gamma\}$$

العنصر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ عبارة عن i من العناصر المرتبة بحيث انه عند المكان ذي الرتبة i يوجد عنصر من المجموعة X_i. ولبناء مثل هذا العنصر نختار من كل مجموعة X_i عنصرًا وحيداً فقط.

المجموعة Γ تسمى مجموعة الدليل وعناصرها مرتبة بطريقة ما وعلى سبيل المثال:

$$\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, i, j, k, \ldots\}$$

وإذا كانت العائلة $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ مكونة من عدد منتهي من المجموعات $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ فإن :

$$\prod_{i\in\Gamma} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \forall \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

تعريف (٩ . ١ . ٢) :

ليكن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ عنصر من مجموعة حاصل الضرب $\prod_{i\in\Gamma} X_i$ للمجموعات $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$. يسمى العنصر x_i بالمركبة i للعنصر x وتسمى المجموعة

X_i بالمركــبة i للمجموعة $\prod_{i\in\Gamma} X_i$. للاختصار يمكن أن نكتب $(x_i)_{i\in\Gamma}$ بدلا من العنصر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$.

تعريف (٩. ١. ٣) :

لــتكن $\prod_{i\in\Gamma} X_i$ مجموعة حاصل الضرب الديكارتي لعائلة المجموعات $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ ، X_j المركــبة ذات الرتبة j . يسمى الراسم $\Pr_j : \prod_{i\in\Gamma} X_i \to X_j$ المعرف بالصــورة : $\Pr_j(x) = x_j$ أي أن $(x_i)_{i\in\Gamma} \to x_j$ براسم الإسقاط على المركبة X_j أو راسم الإسقاط ذي الرتبة j .

تعريف (٩. ١. ٤) :

إذا كانــت A مجموعــة جزئيه من $\prod_{i\in\Gamma} X_i$ ، $\Pr_j : \prod_{i\in\Gamma} X_i \to X_j$ راسم الإســقاط فإن المجموعة $\Pr_j(A)$ تسمى مسقط المجموعة A على المركبة j وهي مجموعــه جزئيه من المركبة X_j أي أن $\Pr_j(A) \subseteq X_j$. ويجب إن نلاحظ أن $\Pr_j(\prod_{i\in\Gamma} X_i) = X_j$ أي أن رو اسم الإسقاط دائما شاملة أو غامره.

بديهية (٩. ١. ٥) :

إذا كانت $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ ، $\{Y_i\}_{i\in\Gamma}$ عائلتان من المجموعات بحيث أن $X_i \subseteq Y_i$ فإن :

$$(\prod_i X_i) \subseteq (\prod_i Y_i)$$

تعريف (٩. ١. ٦) :

إذا كانت A مجموعة جزئيه من مجموعة حاصل الضرب $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$. فإن A تسمى مجموعه جزئيه مضلعة إذا أمكن إيجاد عائلة من المجموعات الجزئية $Y_i \subseteq X_i$ بحيث أن :

$$A = \prod_{i\in\Gamma} Y_i$$

بديهية (٩. ١. ٧) :

إذا كانت A مجموعة جزئية من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $\prod_{i\in\Gamma} X_i$ فإن المجموعة $\prod_{i\in\Gamma} \Pr_j(A)$ هي أصغر مجموعه جزئيه مضلعة من $\{X_i\}_{i\in\Gamma}$ تحتوي A (أي أن $A \subseteq \Pr_j(A)$)، حيث $\Pr_j(A)$ مسقط المجموعة A على المركبة X_j.

ويجب أن نلاحظ انه إذا كانت A مجموعه جزئيه مضلعة من $\prod_i X_i$ فإن $A = \prod_{i\in\Gamma} \Pr_j(A)$.

والمثال التالي يوضح أنه إذا كانت A مجموعه جزئيه من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $\prod_i X_i$ فإنه ليس من الضروري أن تكون A مضلعة.

مثال (٩. ١. ٨) :

لتكن $X_1 = \{a,b,c\}$ ، $X_2 = \{x,y,z\}$. وإذا كانت $A = \{(a,x),(c,z)\}$ مجموعة جزئيه من $X_1 \times X_2$.

وليكن $\Pr_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$. حيث $\Pr_1(c,z) = c$ ، $\Pr_1(a,x) = a$

وليكن $\Pr_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ حيث

$$\Pr_2(a,x) = x \ , \ \Pr_2(c,z) = z$$

فإن $\Pr_1(A) = \{a,c\}$ ، $\Pr_2(A) = \{x,z\}$ وبالتالي فإن

$$\Pr_1(A) \times \Pr_2(A) = \{(a,x),(a,z),(c,x),(c,z)\} \neq A$$

أي أن A ليست مضلعة.

نظريه (٩. ١. ٩) :

إذا كانت $\prod_i A_i$ ، $\prod_i B_i$ مجموعتان جزئيتان مضلعتان من مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $\prod_i X_i$ فإن :

$$(\prod_{i\in\Gamma} A_i)\cap(\prod_{i\in\Gamma} B_i)=\prod_{i\in\Gamma}(A_i\cap B_i)$$

البرهان :

نجد أن

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in\Gamma} &\in(\prod_{i\in\Gamma} A_i)\cap(\prod_{i\in\Gamma} B_i)\\ &\Leftrightarrow (x_i)_{i\in\Gamma}\in(\prod_{i\in\Gamma} B_i),(x_i)_{i\in\Gamma}\in(\prod_{i\in\Gamma} A_i)\\ &\Leftrightarrow x_i\in B_i\forall i\in\Gamma,\ x_i\in A_i \Leftrightarrow x_i\in A_i\cap B_i\\ &\Leftrightarrow (x_i)_{i\in\Gamma}\in\prod_{i\in\Gamma}(A_i\cap B_i)\end{aligned}$$

في الحالة الخاصة

$$(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$$

الآن لنــــبني توبولوجـــي على مجموعة حاصل الضرب لعائلة منتهية من المجموعات ويرجع الفضل في بناء هذا التو بولوجي إلى العالم فريشيه في عام ١٩١٠.

نظريه (٩. ١. ١٠) :

بفرض أن $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{n}$ عائلة منتهية من الفضاءات التوبولوجيه، فإن العائلة

$$\mathcal{B}=\{U_1\times U_2\times\ldots\times U_n : U_i\in\tau_i, i=1,2,\ldots,n\}$$

تشكل أساس لتوبولوجي على مجموعة حاصل الضرب $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$

البرهان :

سوف نبين أن التجمع $\mathcal{B}$ يشكل أساساً لتوبولوجي على $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$.

ولسهولة البرهان نأخذ $n=2$.

واضح أن $X_1\in\tau_1, X_2\in\tau_2$ وبالتالي فإن $X=X_1\times X_2\in\tau$. نفرض أن $(U_1\times U_2),(V_1\times V_2)\in\beta$ فإنه من نظريه (٣. ٢. ٧) ينتج أن :

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)$$

وحيث أن $U_2 \cap V_2 \in \tau_2$ ، $U_1 \cap V_1 \in \tau_1$ فإن

$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \in \mathcal{B}$ وعليه توجد B حيث

$B = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \in \mathcal{B}$ ومن ذلك نجد أن

$$B = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2)$$

من ذلك نجد أن β أساس للتو بولوجي على $X_1 \times X_2$.

ملاحظة : المجموعة $U_1 \times U_2 \times ... U_n$ حيث $U_i \in \tau_i$ لكل $i = 1,2,...,n$ تسمى المجموعة الأساسية. وتقاطع مجموعتين أساسيتين هو مجموعة أساسية.

نظريه (٩. ١. ١١) :

إذا كان (X_2, τ_2) ، (X_1, τ_1) فضائيين توبولوجيين ، $\mathcal{B}_1$ أساس للتوبولوجي τ_1 ، $\mathcal{B}_2$ أساس للتو بولوجي τ_2 فإن العائلة :

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i \times \mathcal{B}_j : \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_j \in \mathcal{B}_2\}$$

تشكل أساس لتوبولوجي معرف على $X_1 \times X_2$.

البرهان :

نفـــرض أن G مجموعة مفتوحة في $X_1 \times X_2$ وأن $x = (x_1, x_2) \in G$.

حسب نظريه(٩. ١. ١٠) فإنه يوجد عنصر في الأساس $\mathcal{B}$ وليكن $U \times V$ حيث $U \in \tau_1$ ، $V \in \tau_2$ بحيث تكون $x = (x_1, x_2) \in U \times V \subseteq G$

وحيث أن $U \in \tau_1$ ، $V \in \tau_2$ ، $\mathcal{B}_1$ أساس للتو بولوجي τ_1 وكذلك $\mathcal{B}_2$ أســـاس للـــتو بولوجـــي τ_2 فإنـــه توجد $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ، $B_2 \in \mathcal{B}_2$ بحيث أن $x_2 \in B_1 \subseteq U$ ، $x_2 \in B_2 \subseteq V$. ومن ثم فإن

$$x = (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 \subseteq U \times V \subseteq G$$

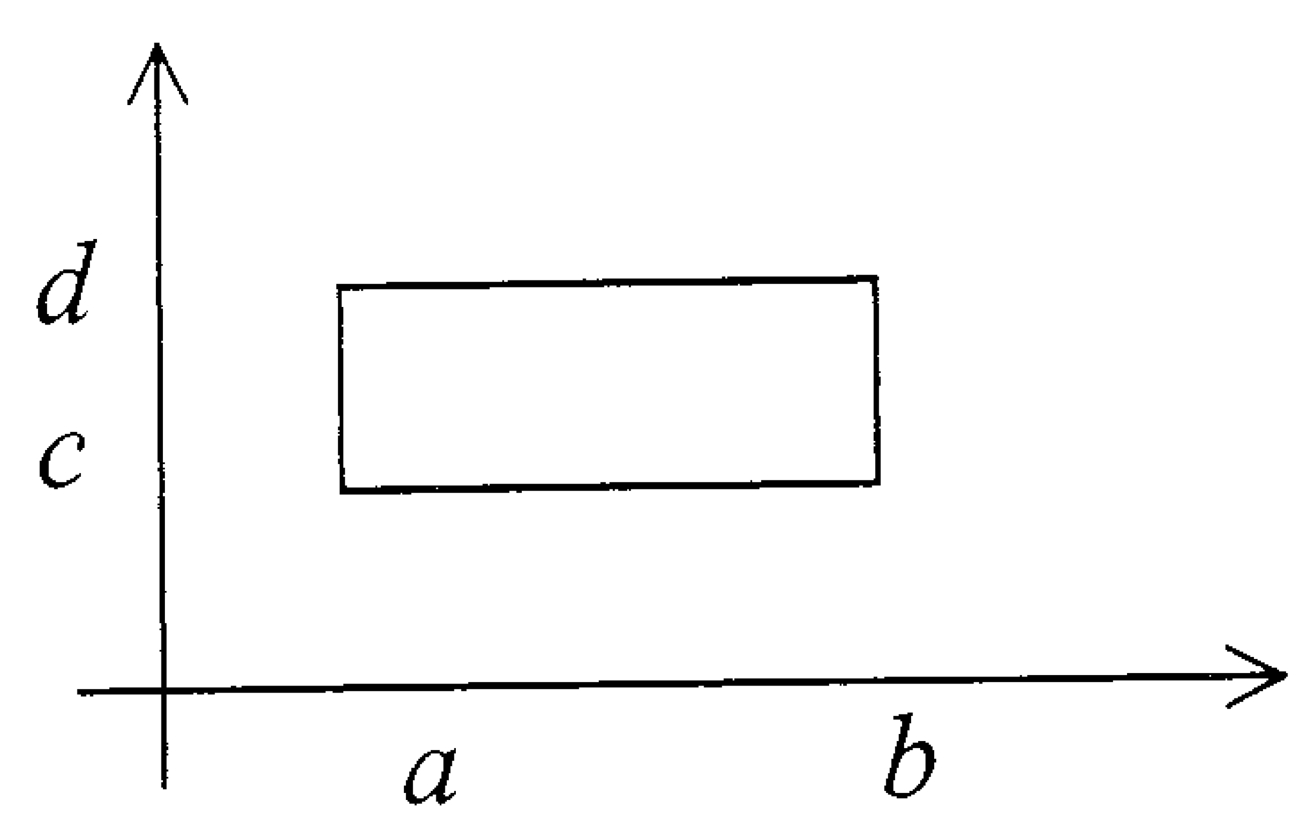
وهذا يؤدي إلى أن $\mathcal{B}$ تشكل أساس للتو بولوجي على $X_1 \times X_2$.

تعريف (٩. ١. ١٢) :

إذا كانت $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{n}$ عائلة من الفضاءات التوبولوجيه. يسمى التوبولوجي τ المعـــرف على المجموعة $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ والذي أساسه عائلة المجموعات الأساسية مـــن X بـــتوبولوجي حاصـــل الضرب أو التو بولوجي الضربي ونرمز له بالرمز $\tau = \prod_{i=1}^{n} \tau_i$ ويـســـمى الفضـــاء الـــتو بولوجي (X, τ) بفضاء حاصل الضرب للفضاءات التوبولوجيه $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{n}$.

مثال (٩. ١. ١٣) :

حيـــث أن عائلة الفترات المفتوحة في R تشكل أساس للتو بولوجي العادي على R فإن التجمع $\mathcal{B} = \{(a,b)\times(c,d) : a,b,c,d \in R\}$ يشـــكل أساس لتوبولوجي على $R^2 = R \times R$ والذي يسمى التوبولوجي العادي في المســـتوى الديكـــارتي R^2 حيـــث $(a,b)\times(c,d)$ هو المستطيل المفتوح في المستوى الديكارتي.



وعموما فضاء حاصل الضرب الديكارتي $R^n = R \times R \times .... \times R$ يسمى الفضاء التو بولوجي الحقيقي ذو البعد n حيث أساسه يتكون من كل المجموعات التي على الصورة $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ حيث U_i فترة مفتوحة في R ، $i = 1,2,...,n$.

سندرس الآن العلاقة بين فضاء حاصل الضرب الديكارتي ورو اسم الإسقاط.

تعريف (٩. ١. ١٤) :

بفرض أن $\Pr_j : X \to X_j$ راسم إسقاط أي أن

$$\Pr_j((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_j \ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

إذا كانت U_j مجموعة مفتوحة في X_j فإن المجموعة:

$$\Pr_j^{-1}(U_j) = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{j-1} \times U_j \times X_{j+1} \times \ldots \times X_n$$

تسمى المجموعة الأساسية المفتوحة.

لاحظ أن : $\Pr_j^{-1}(G)$ تتكون من كل النقاط $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $\Pr_j(x) \in G$.

نظريه (٩. ١. ١٥) :

بفرض أن $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^{n}$ عائلة من الفضاءات التوبولوجيه ، $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

فـإن التو بولوجي الضربي على X هو أصغر توبولوجي يجعل كل رو اسم الإسقاط $\Pr_j : X \to X_j$ متصلة.

البرهان:

بفــرض أن τ هــو توبولوجــي آخر معرف على X بحيث إن كل رو اسم الإســقاط $\Pr_j$ تكــون متصلة . بفرض أن كل من $U_1, U_2, \ldots, U_n$ مجموعة مفتوحة في $X_1, X_2, \ldots, X_n$ على الترتيب فإن

$$\Pr_j^{-1}(U_j) \in \tau, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

وحيث أن

$$\Pr_j^{-1}(U_1) \cap \Pr_2^{-1}(U_2) \cap \ldots \cap \Pr_n^{-1}(U_n) = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$$

فإن المجموعة الأساسية $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ تنتمي إلى τ أي أن τ يحتوي على

التو بولوجي الضربي.

من النظرية السابقة نستنتج أن التو بولوجي الضربي τ المعرف على $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$

هو التو بولوجي المولد بواسطة رو اسم الإسقاط. ويجب أن نلاحظ أن العائلة:

$$\mathcal{S} = \{\Pr_j^{-1}(G_j) : G_j \in \tau_j\}$$

تشكل أساس جزئي للتو بولوجي الضربي ويسمى الأساس الجزئي المعين أو (المحدد).

مثال (٩. ١. ١٦) :

نعتبر $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{x, y\}$ ،

$$\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\} \ , \ \tau_2 = \{Y, \phi, \{x\}\}$$

(١) أوجد الأساس الجزئي المعين $\mathcal{S}$ للتو بولوجي الضربي على $X \times Y$.

(٢) أوجد الأساس المعين $\mathcal{B}$ للتو بولوجي الضربي على $X \times Y$.

الحل :

حيث أن $X \times Y = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$ فإن:

(١) $$\mathcal{S} = \{\Pr_x^{-1}(G), \Pr_y^{-1}(H) : G \in \tau_1, H \in \tau_2\}$$

$$\Pr_x^{-1}(X) = \Pr_y^{-1}(Y) = X \times Y$$

$$\Pr_x^{-1}(\phi) = \Pr_y^{-1}(\phi) = \phi$$

$$\Pr_x^{-1}(\{a\}) = \{(a,x),(a,y)\}$$

$$\Pr_x^{-1}(\{b,c\}) = \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

$$\Pr_y^{-1}(\{y\}) = \{(a,y),(b,y),(c,y)\}$$

$$\mathcal{S} = \{X \times Y, \{(a,x),(a,y)\}, \{(b,x), (b,y),(c,x),(c,y)\}, \{(a,y),(b,y),(c,y)\}$$

(٢) الأساس المعين $\mathcal{B}$ يتكون من كل التقاطعات المنتهية لعناصر $\mathcal{S}$

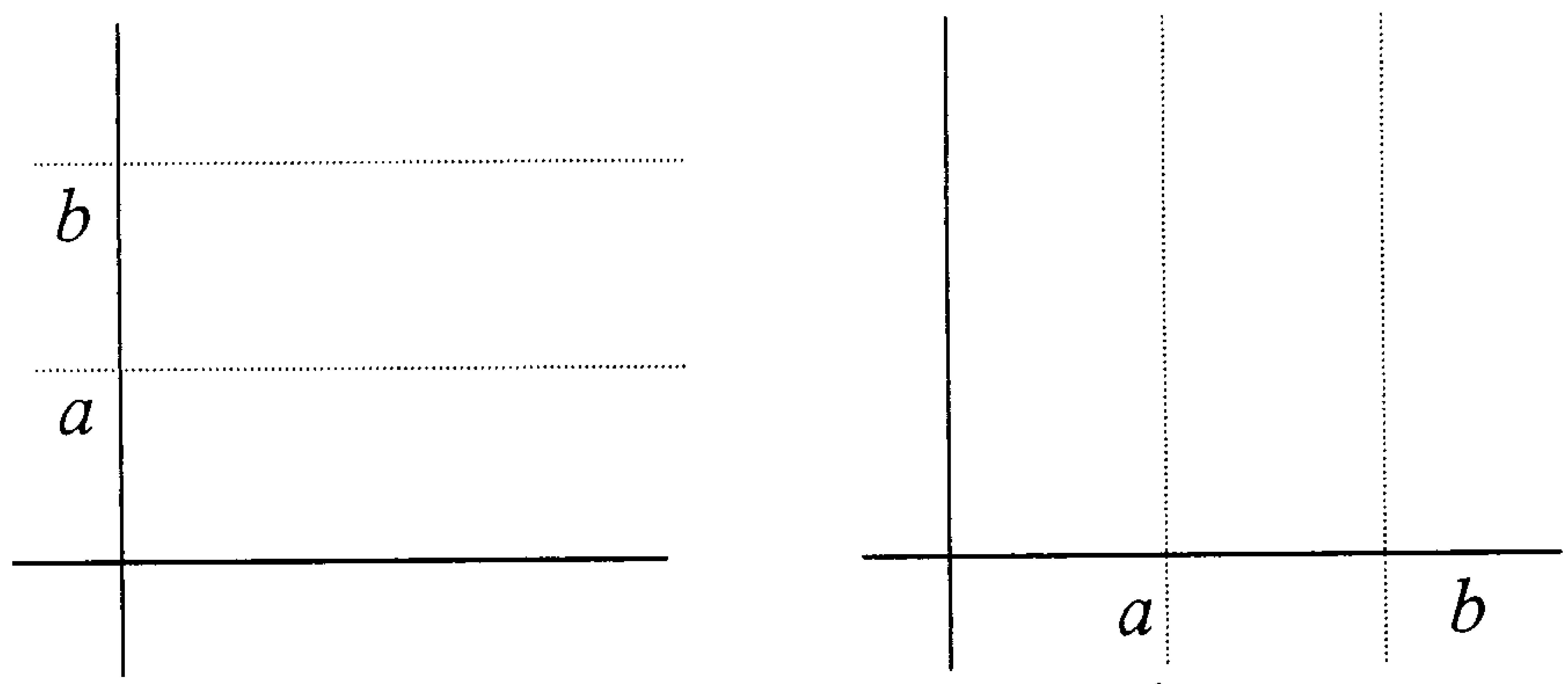
$$\mathcal{B} = \{X\times Y, \phi, \{(a,x),(a,y)\}, \{(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}, \{(a,y),(b,y),(c,y)\}, \{(a,y)\}, \{(b,y),(c,y)\}\}$$

مثال (٩. ١. ١٧) :

في المستوى الديكارتي $R^2 = R\times R$

$$\Pr_1 : R\times R \to R \ , \ \Pr_2 : R\times R \to R$$

الأساس الجزئي المعين $\mathcal{S} = \{\Pr_1^{-1}(a,b), \Pr_2^{-1}(a,b)\}$



$\pi_2^{-1}(a,b)$ $\pi_2^{-1}(a,b)$

ولذلـــك فـــإن التو بولوجي العادي على R^2 هو التو بولوجي المولد بواسطة رو اسم الإسقاط من R^2 إلي R.

نظريه (٩. ١. ١٨) :

الدالــة $f: Y \to X$ مــن الفضاء التو بولوجي Y إلي الفضاء الضربي $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ تكــون متصـــلة إذا وفقـــط إذا كـــان لكـــل راســـم إســـقاط $\Pr_i : X \to X_i$ فإن $\Pr_i of : Y \to X_i$ دالة متصلة.

البرهان :

من تعريف الفضاء الضربي كل رو اسم الإسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ متصلة .

لذلك إذا كانت $f : Y \to X$ دالة متصلة فإن $\Pr_i of : Y \to X_i$ دالة متصلة أيضا لأن تحصيل دالتين متصلتين هو دالة متصلة.

مـــن جانـــب آخر، نفرض أن $\Pr_i of : Y \to X_i$ دالة متصلة لكل i . المطلوب إثـــبات أن f دالـــه متصلة، لذلك نفرض أن G مجموعه مفتوحة في X_i حيث $G = P_{r_i}^{-1}(G_i)$ ،G_i مفتوحة في X_i وبما أن $\Pr_i \circ f$ دالة متصلة فإن

$$(\Pr_i of)^{-1}(G_i)) = f^{-1}(\Pr_i^{-1}(G_i)) = f^{-1}(G)$$

مجموعة مفتوحة في Y ، لأن العائلة :

$$S = \{\Pr_i^{-1}(G_i) : G \text{ is open in } X_i\}$$

أســـاس جـــزئي معـــين للـــتو بولوجـــي الضربي على X ، فإنه ينتج من ذلك أن $f^{-1}(\Pr_i^{-1}(G))$ مجموعه مفتوحة في Y لكل i وبالتالي فإن f داله متصلة .

بديهية (٩. ١. ١٩) :

بفـــرض أن B عنصـــر مـــن عناصـــر الأساس المعين للتوبولوجي الضربي على $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ فـــإن صورة B بواسطة راسم الإسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ تكون مجموعة مفتوحة.

البرهان :

بفرض أن B عنصر من عناصر الأساس المعين للتو بولوجي الضربي على X فإن

$$B = \prod\{X_i : i \neq j,\ldots, j_m\} \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times \ldots . \times G_{j_m}$$

حيث G_{j_k} مجموعه مفتوحة في X_{j_k} . لذلك فإنه لأي راسم إسقاط

$$\Pr_i : X \to X_i$$

$\Pr_i(B) = X_i$ إذا كانـــــت $i \neq j_1,\ldots j_n$ ، $\Pr_i(B) = G_i$ إذا كانـــــت $i = j_1,\ldots j_n$ وفي كلتا الحالتين فإن $\Pr_i(B)$ مجموعه مفتوحة.

نظريه (٩. ١. ٢٠) :

كــل راسم إسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ من الفضاء الضربي $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ إلي الفضاء X_i يكون مفتوح ومتصل.

البرهان :

حســب تعريف الفضاء الضربي فإن كل راسم إسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ يكون متصــل . ســوف نــبين فقط أن $\Pr_i$ يكون مفتوح . لذلك نفرض أن G مجموعة مفــتوحة في X فإنــه ينــتج من تعريف الأساس المعين للتوبولوجي الضربي أنه لكل $p \in G$ يوجد عنصر B من الأساس المعين بحيث أن $p \in B \subseteq G$ ولذلك فإنه لأي راسم إسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ تكون $\Pr_i(p) \in \Pr_i(B) \subseteq \Pr_i(G)$ ومن البديهية السابقة نجد أن $\Pr_i(G)$ مجموعه مفتوحة.

أو بصــورة أخــرى ، لكل $\Pr_i(p)$ تنتمي إلى $\Pr_j(G)$ وهي مجموعه مفتوحة محتواة في $\Pr_j(G)$ وهو المطلوب .

نتيجة (٩. ١. ٢١) :

التوبولوجى الضرب هو أضعف توبولوجي على المجموعة $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ تكون من أجلها رو اسم الإسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ متصلة .

والآن لندرس بعض من الخواص التوبولوجية في فضاء حاصل الضرب.

نظريه (٩. ١. ٢٢) :

إذا كانت $A = \prod_i A_i$ مجموعة جزئية مضلعة في الفضاء الضربي $\prod X_i$ فإن

$(i)\quad \overline{A} = \prod_i \overline{A_i}$

(ii) A مغلقه $\Leftrightarrow A_i$ مغلقه $\forall i$

(i) نفرض أن $x=(x_i)_i \in \overline{A}$ وحيث أن $\Pr_i : X \to X_i$ دالة متصلة فإنه ينتج من نظريه(٤. ١. ١١) أن

$$x_i = \Pr_i(x) \in \Pr_i(\overline{A}) \subseteq \overline{\Pr_i(A)} = \overline{A_i} \; .$$

ومن ذلك نستنتج أن $x \in \prod\limits_i \overline{A_i}$ أي أن $\overline{A} \subseteq \prod\limits_i \overline{A_i}$

ولإثبات أن $\prod\limits_i \overline{A_i} \subseteq \overline{A}$ نفرض أن $x \notin \overline{A}$ وهذا يؤدي إلى أنه توجد مجموعة مفتوحة تحتوي x ولا تتقاطع مع A أي توجد مجموعه أساسية $G=\prod\limits_i G_i$ تحتوي x ولا تتقاطع مع A (أي أن $A \cap G = \phi$) وهذا يعني أنه توجد مركبه G_i للمجموعة G بحيث أن $A_i \cap G_i = \phi$ وبالتالي فإن $x_i \notin \overline{A_i}$ أي أن $x \notin \prod\limits_i \overline{A_i}$ وهو المطلوب.

من (ii) ، (i) نستنتج أن : $A_i = \overline{A_i} \Leftrightarrow \prod\limits_i A_i = \prod\limits_i \overline{A_i} \Leftrightarrow A = \overline{A}$

<u>نظريه (٩. ١. ٢٣) :</u>

بفرض أن (X_i, τ_i) فضاء$-T_2$ لكل i ، فإن $(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i, \prod\limits_{i=1}^{n} \tau_i)$ يكون أيضاً فضاء$-T_2$.

<u>البرهان :</u>

نفرض أن $p=(a_i)_{i=1}^n \in \prod X_i = X$ ، $q=(b_i)_{i=1}^n$ حيث $p \neq q$ ، فإنه توجد j_0 حيث أن $a_{j_0} \neq b_{j_0}$ أي أن p, q يجب أن تختلف عند مركبة واحدة على الأقل وهي j_0. وحيث أن X_{j_0} فضاء$-T_2$ فإنه توجد مجموعتان مفتوحتان G, H في X_{j_0} بحيث يكون

$$G \cap H = \phi \; , \; b_{j_0} \in H \; , \; a_{j_0} \in G$$

من تعريف فضاء حاصل الضرب فإن راسم الإسقاط $\Pr_{j_0} : X \to X_{j_0}$ يكون متصـــل وعليه فإن $\Pr_{j_0}^{-1}(H)$ ، $\Pr_{j_0}^{-1}(G)$ مجموعات مفتوحة في X وتحقق

$$\Pr_{j_0}^{-1}(G) \cap \Pr_{j_0}^{-1}(H) = \Pr_{j_0}^{-1}(G \cap H) = \phi$$ حيث

$p \in \Pr_{j_0}^{-1}(G)$ ، $q \in \Pr_{j_0}^{-1}(H)$. أي أن X فضاء$-T_2$.

نظريه (٩. ١. ٢٤) :

متتابعة النقاط $p_1, p_2, \ldots$ في الفضاء الضربي $X = \prod_i X_i$ تتقارب إلى النقطة $q \in X$ إذا وفقـــط إذا كـــان لكل راسم إسقاط $\Pr_i : X \to X_i$ فإن المتتابعة $\Pr_i(p_1)\ ,\ \Pr_i(p_2)\ ,\ \ldots$ تتقارب إلى النقطة $\Pr_i(q)$ في الفضاء X_i.

البرهان :

أولا : نفـــرض أن $p_n \to q$. حيـــث أن كـــل رواســـم الإسقاط متصلة فإن $\Pr_i(p_n) \to \Pr_i(q)$.

ثانيا : بفرض أن $\Pr_i(p_n) \to \Pr_i(q)$ لكل راسم إسقاط $\Pr_i$.

لكي نثبت أن $p_n \to q$ يكفي أن نثبت أنه إذا كانت B عنصر من عناصر الأساس المعين للتوبولوجي الضربي $X = \prod X_i$ فإن B تحتوي q أي أن

$$\exists\ n_0 \in N \ such\ that\ n > n_o \ \Rightarrow p_n \in B$$

من تعريف الأساس المعين فإن

$$B = \Pr_{j_1}^{-1}(G_{j_1}) \cap \Pr_{j_2}^{-1}(G_{j_2}) \cap \ldots . \cap \Pr_{n}^{-1}(G_{j_m})$$

حيث G_{j_k} مجموعه مفتوحة في الفضاء X_{j_k}. لكن $q \in B$ فإن

$$\Pr_{j_k}(q) \in \Pr_{j_k}(B)$$

ومن الفرض $\Pr_{j_1}(p_n) \to \Pr_{j_1}(q)$ وبالتالي لكل $i = 1,2,\ \ldots\ ,m$ فإن

$$\exists\, n_i \in N \;,\; n > n_i \;\Rightarrow \Pr_{j_1}(p_n) \in G_{j_1} \;\Rightarrow p_n \in \Pr_{j_1}^{-1}(G_{j_1})$$

وبأخذ $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$

$$\Pr_{j_1}^{-1}(G_{j_1}) \cap \Pr_{j_2}^{-1}(G_{j_2}) \cap \ldots \cap \Pr_n^{-1}(G_{j_m}) = B$$

$n > n_o \Rightarrow P_n \in B$ وبذلك تكون $p_n \to q$.

بديهية (٩. ١. ٢٥) :

بفرض أن Y فضاء توبولوجي ، $\mathcal{B}$ أساس للفضاء Y. إذا كان أي غطاء مفتوح للمجموعة Y من عناصر $\mathcal{B}$ يحتوي على غطاء جزئي مفتوح فإن Y فضاء محكم .

البرهان :

بفرض أن $g = \{U_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y . لكل $y \in Y$ ، نختار $V_y \in \beta$ بحيث أن $y \in V_y \subseteq U_i$. العائلة $\{V_y : y \in Y\}$ غطاء مفتوح للمجموعة Y بواسطة عناصر $\mathcal{B}$. من الفرض يوجد غطاء جزئي منتهى $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ أي أن $Y = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \ldots \cup V_{y_n}$

وحيث أن $V_{y_i} \subseteq U_i$ لكل i ، فإننا نحصل على عدد منتهى من المجموعات $U_1, U_2, \ldots, U_n$ والتي تكون غطاء للمجموعة Y ، ومن ثم فان Y محكم.

نظريه (٩. ١. ٢٦) :

إذا كانت الفضاءات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ محكمه ، فإن $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ فضاء محكم أيضاً.

البرهان :

يكفي أن نثبت النظرية عندما $n = 2$ ولذلك نعتبر $X = X_1 \times X_2$. نفرض أن $g = \{U \times V : U \in \tau_1 \text{ and } V \in \tau_2\}$

غطاء مفتوح للمجموعة X حيث U,V مجموعات مضلعة. من بديهية(٩. ١. ٢٥)، يكفي أن نبين أن g يحتوي على غطاء جزئي منتهى . لذلك نفرض أن $x \in X_2$ وبالتالي فإن الشريحة $X_1 \times \{x\}$ تكون محكمه .وبالتالي فإنه يوجد عدد منتهى من المجموعات $(U_m \times V_m)$, ... , $(U_1 \times V_1)$ ، والتي تغطي $X_1 \times \{x\}$ نفرض أن $x \in V_j$ لكل $1 \le j \le m$ فإن $V(x) = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_m$ مجموعة مفتوحة في X_2 تحتوي x ، كذلك $\mathrm{Pr}_2^{-1}(V(x))$ تغطى بعدد منتهى من عناصر g وهي $U_j \times V_j$ حيث $1 \le j \le m$. العائلة $\{V(x) : x \in X_2\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X_2 وحيث أن X_2 فضاء محكم ، فإنه توجد $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X_n$ بحيث أن

$$X_2 = V(x_1) \cup V(x_2) \cup \ldots \cup V(x_n)$$

ومن ذلك نجد أن $X = \mathrm{Pr}_2^{-1}(V(x_1)) \cup \ldots \cup \mathrm{Pr}_2^{-1}(V(x_n))$

وحيث أن كل مجموعة $\mathrm{Pr}_2^{-1}(V(x_j))$ مغطاة بعدد منتهى من عناصر g فإن g تحتوي على غطاء جزئي منتهى.

نظريه (٩. ١. ٢٧) : (**Tychonoff Theorem**)

إذا كانـــت $X = \prod_i X_i$ عائلـــة من الفضاءات التوبولوجية ، فإن X تكون محكمة إذا وفقط إذا كانت جميع المركبات X_i محكمة .

نظريه (٩. ١. ٢٨) :

ضرب الفضاءات المترابطة يكون فضاء مترابط .

البرهان :

بفرض أن X_i فضاءات مترابطة.

(١) إذا كانت $\Gamma = 1,2$ منتهية

نفرض أن $p=(x_1,y_1),q=(x_2,y_2)$ نقطتين في فضاء حاصل الضرب $X_1\times X_2$. حيث أن $\{x_1\}\times X_2\cong X_2$، فإن $\{x_1\}\times X_2$ مجموعة مترابطة، كذلك $X_1\times\{y_2\}$ مجموعة مترابطة. وحيث أن

$$\{x_1\}\times X_2\cap X_1\times\{y_2\}=\{(x_1,y_2)\}\neq\phi$$ فإن

$(\{x_1\}\times X_2)\cup(X_1\times\{y_2\})$ مجموعة مترابطة لأن النقطتين p,q تنتميان إلي نفس المركبة. وحيث أن p,q اختيارية فإن $X_1\times X_2$ له مركبة واحدة وبالتالي فإن $X_1\times X_2$ فضاء مترابط.

(٢) إذا كانت Γ غير منتهية.

نفرض أن $p=(a_i)_{i\in\Gamma}\in X$ ، $E\subset X$ مركبة p. سوف نبين أن كل نقطة $x=(x_i)_{i\in\Gamma}\in X$ تحقق أن $x\in\overline{E}$ وبالتالي فإن $x\in E$ لأن E مغلقة.

بفرض أن $G=\Pi\{X_i : i\neq i_1,i_2,...i_m\}\times G_{i_1}\times...\times G_{i_m}$

مجموعة أساسية حيث $x\in G$. الآن المجموعة

$$H=\Pi\{\{a_i\}:i\neq i_1,i_2,...i_m\}\times X_{i_1}\times...\times X_{i_m}$$
$$\cong X_{i_1}\times...\times X_{i_m}$$

وبالتالي فإن H مترابطة. بالإضافة ألي ذلك حيث أن $p\in H$، فإن $H\subseteq E$ (لأن E مركبه p). لكن $G\cap H\neq\phi$ من ذلك نجد أن G تحتوى على الأقل نقطه من E، أي أن $x\in\overline{E}=E$. ومن ثم فإن X لها مركبه واحدة فهي مترابطة.

نظرية (٩. ١. ٢٩) :

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي فإن (X,τ) فضاء$-T_2$ إذا وفقط إذا كان لكل $x\in X$ المجموعة $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ مجموعة مغلقة في فضاء حاصل الضرب $X\times X$.

البرهان :

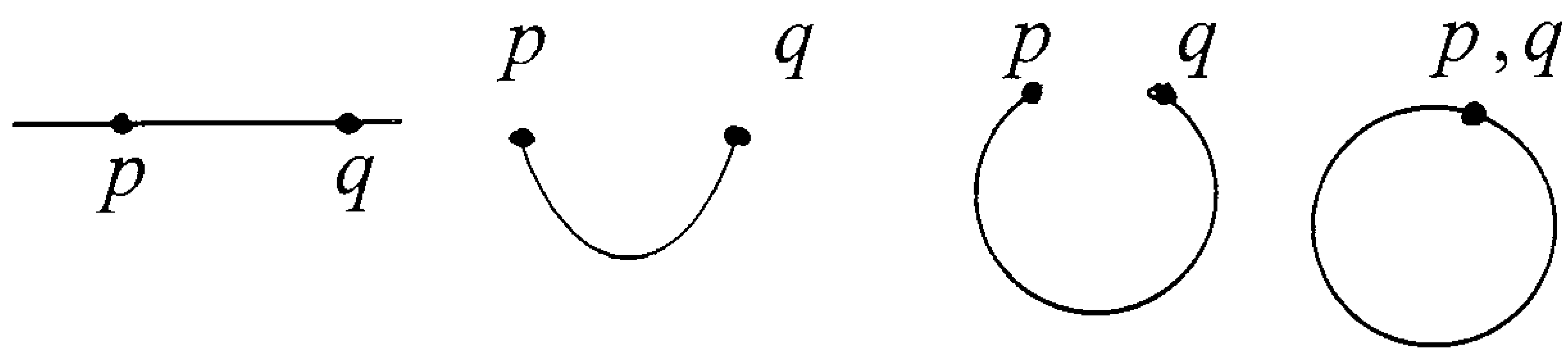
أولا : نفرض أن (X,τ) فضاء-T_2 ونبرهن على أن Δ مجموعة مغلقة في الفضاء $X \times X$. نفرض $(x,y)\in\Delta^c$. إذاً $(x,y)\notin\Delta$ وعليه فإن $x \neq y$.
وبالتالي توجد مجموعتان مفتوحتان $U,V\in\tau$ بحيث أن $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\phi$.
ولكن $U\times V$ مجموعة مفتوحة في فضاء حاصل الضرب $X\times X$ حيث $(x,y)\in U\times V$, $(U\times V)\cap\Delta=\phi$ ومنها نجد أن :
$(x,y)\in U\times V\subseteq\Delta^c$. وعليه فإن $\Delta^c=\cup\{U\times V:(x,y)\in\Delta^c\}$.
إذا Δ^c مجموعة مفتوحة وهو المطلوب.

ثانيا : نفرض أن Δ مجموعة مغلقة ، $(x,y)\notin\Delta$ وحيث أن Δ^c مجموعة مفتوحة تحتوي (x,y) في فضاء حاصل الضرب $X\times X$ وبالتالي توجد مجموعة $U\times V$ من أساس توبولوجي حاصل الضرب بحيث يكون : $(x,y)\in U\times V\subseteq\Delta^c$ من ذلك نحصل على : $x\in U$, $y\in V$,$(U\times V)\cap\Delta=\phi$ أي أن $U\cap V=\phi$
ومن ثم فإن (X,τ) فضاء-T_2.

بند (٢) : **فضاء القسمة** : **(Quotient Space)**

من المعلوم انه إذا كانت ~ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة غير الخالية X فإن هذه العلاقة تجزئي X إلى مجموعات جزئيه (فصول تكافؤ) غير متقاطعة مثنى مثنى ، والعكس إذا كانت المجموعة P تجزيئاً للمجموعة X فإن P تعين علاقة تكافؤ على X تكون فصول تكافؤها مطابقة لعناصر التجزيء P وهذه العلاقة تعرف إذا اعتبرنا أي عنصرين من عناصر التجزيء P يكونا متكافئين إذا كان يقعان في فصل واحد.

دعـــنا الآن نســـوق لك المثال التالي، بفرض أن X قطعه مستقيم ، p,q هما نقطتي الــبداية والــنهاية لــلمجموعة X ، نعرف علاأقه تكافؤ على X بحيث أن p,q نقطتين متكافئتين بينما النقاط الباقية من X كلأ منها تكافئ نفسها.



المجموعـــة $Y = X/\sim$ تســـمى مجموعة القسمة وتتألف من فصل التكافؤ $\{p,q\}$ ومـــن جميع الفصول $\{x\}$ حيث $x \neq a,b$، وبالتالي فإن المجموعة Y نحصل عليها من المجموعة X وذلك بان تنطبق النقطتان p,q على بعضهما والنقاط الباقية تظل كمـــا هـــي، ومـــن ثم نحصل على الدائرة من قطعه المستقيم بان تنطبق نقطتي البداية والنهاية لهذه القطعة.

عائلـــه فصـــول التكافؤ $X/\sim$ تسمى مجموعة القسمة مقياس علاقة التكافؤ $\sim$. يوجد راسم إسقاط طبيعي $\pi : X \to X/\sim$ بحيث أن $\pi(x)$ هو فصل التكافؤ الممـــثل بالعنصر x أي أن : $\pi(x)=[x]$ وبالتالي فإن π هو الراسم الذي يدخل كل عنصر x في فصل التكافؤ $[x]$ (راجع بند(٤) الباب الأول).

والآن إذا كـــان X فضـــاء توبولوجـــى ، ما هو التوبولوجى المعرف على المجموعة $X/\sim$؟ . في الحقـــيقة نستعين بالتوبولوجى τ المعرف على المجموعة X في إعطاء توبولوجـــى على المجموعة $X/\sim$ بحيث يكون الراسم $\pi : X \to X/\sim$ متصل. هذا يقودنا إلى تعريف فضاء القسمة.

<u>تعريف (٩. ٢. ١) :</u>

بفـــرض أن (X,τ) فضـــاء توبولوجي ، $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة X، $\pi : X \to X/\sim$ راسم إسقاط طبيعي . يسمى أقوى توبولوجى على مجموعة

القسمة $X/\sim$ يجعل الراسم π متصل بتوبولوجى القسمة **(Quotient topology)** ويرمز له بالرمز $\tau/\sim$ ويسمى الزوج $(X/\sim,\tau/\sim)$ فضاء القسمة **(Quotient space)**.

من هذا التعريف يتضح لنا إن عائله المجموعات المفتوحة Q في فضاء القسمة التي صورها العكسية بواسطة π تكون على الصورة:

$$Q=\{U\subseteq X/\sim:\pi^{-1}(U)\in\tau\}$$

والآن نبرهن على أن العائلة Q تطابق توبولوجى القسمة $\tau/\sim$ المعرف على المجموعة $X/\sim$.

نظريه(٩. ٢. ٢):

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي ، $\sim$ علاقة تكافؤ على المجموعة X ، $(X/\sim,\tau/\sim)$ فضاء القسمة فإن $Q=\tau/\sim$.

البرهان :

من السهل إثبات أن Q تشكل توبولوجى على مجموعة القسمه $X/\sim$.

ومن تعريف Q نستنتج إن الراسم π متصل. لإثبات أن Q هو أقوى توبولوجى يجعل π متصل، نفرض أن τ^* هو توبولوجى أخر على المجموعة $X/\sim$ يجعل الراسم π متصل. إذا كانت $U\in\tau^*$ فإن $\pi^{-1}(U)\in\tau$ لأن π متصل ، ومن تعريف Q نجد أن $U\in Q$ وهذا يؤدى إلى أن $\tau^*\subseteq Q$ ومن ثم فإن Q هو أقوى توبولوجى على المجموعة $X/\sim$ وبذلك نكون قد أثبتنا أن $Q=\tau/\sim$.

نتيجة (٩. ٢. ٣) :

المجموعة الجزئية U تكون مفتوحة في فضاء القسمة $(X/\sim,\tau/\sim)$ إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية $\pi^{-1}(U)$ مفتوحة في الفضاء (X,τ). كذلك المجموعة الجزئية F تكون مغلقه في فضاء القسمة $(X/\sim,\ \tau/\sim)$ إذا وفقط إذا

كانت الصورة العكسية $\pi^{-1}(F)$ مغلقه في الفضاء (X,τ).

نظريه (٩. ٢. ٤) :

بفرض أن X فضاء توبولوجي ، $\sim$ علاقة تكافؤ على X، $\pi : X \to X/\sim$ راسم إسقاط ، فإن الدالة $f : X/\sim \to Y$ من فضاء القسمة إلى الفضاء Y تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت $f \circ \pi$ دالة متصلة.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f \circ \pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& X/\sim \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

البرهان :

حيث أن محصله دالتين متصلتين هي دالة متصلة، فإذا كانت f دالة متصلة فإن $f \circ \pi$ متصـــلة أيضـــا. والعكس، نفرض أن $f \circ \pi$ دالة متصلة وان U مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي Y، لكن $(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$ أي أن $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في X. وحيث أن π راسم متصل فإن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي $X/\sim$ وهذا يعنى أن f دالة متصلة.

ملاحظة (٩. ٢. ٥) :

ممـــا ســـبق نســـتنتج انه إذا كانت $X/\sim$ مجموعة القسمة حيث $\sim$ علاقة تكافؤ معـــرفة على الفضاء التوبولوجي X فإن عناصر المجموعة $X/\sim$ هي فصول التكافؤ وكل فصل هو عبارة عن مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X ولكنه عنصر واحد في فضاء القسمة.

نظريه(٩. ٢ .٦):

بفـــرض أن $f : X \to Y$ دالـــة متصـــلة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y ، إذا كانت $\sim$ علاقة تكافؤ على X بحيث تكون f دالة ثابتة على كل فصل تكافؤ. فإنه توجد دالة $g : X/\sim \to Y$ بحيث أن $f = g \circ \pi$

البرهان :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

نعرف الدالة $g : X/\sim \to Y$ بالصورة : $g([x]) = f(x)$

وبذلـــك تكـــون الدالة g معرفة بحيث أن $f = g \circ \pi$ ومن نظريه (٩. ٢ . ٤) تكون g دالة متصلة.

نظريه(٩. ٢ .٧)

إذا كان كل من X, Y فضاء محكم وفضاء $-T_2$ ، $f : X \to Y$ دالة شاملة ومتصلة. نعرف علاقة التكافؤ $\sim$ على X بالصورة :

$$p \sim q \Leftrightarrow f(p) = f(q)$$

فإن $X/\sim \cong Y$.

البرهان :

حيث أن $X/\sim$ هو صورة الفضاء المحكم X بواسطة راسم الإسقاط الطبيعي المتصل $\pi : X \to X/\sim$ ، فإن $X/\sim$ فضاء محكم. بفرض أن $g : X/\sim \to Y$. دالة متصلة تحقق : $g \circ \pi = f$.

$$g \circ \pi = f$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

مـــن ذلـــك نجد أن g دالة أحادية ومتصلة ومن ثم فإن g دالة توبولوجية ، وعليه يكون $X/\sim \cong Y$.

كتطبيق على هذه النظرية نسوق لك المثال التالي:

<u>مثال(٩. ٢. ٨):</u>

نعتبر الفضاء الجزئي $Y = [0,1]$ من الفضاء العادي R . نعرف علاقة التكافؤ $\sim$ بالصورة : العنصرين $0,1$ متكافئين وأي عنصر مختلف عن $0,1$ يكافئ نفسه.

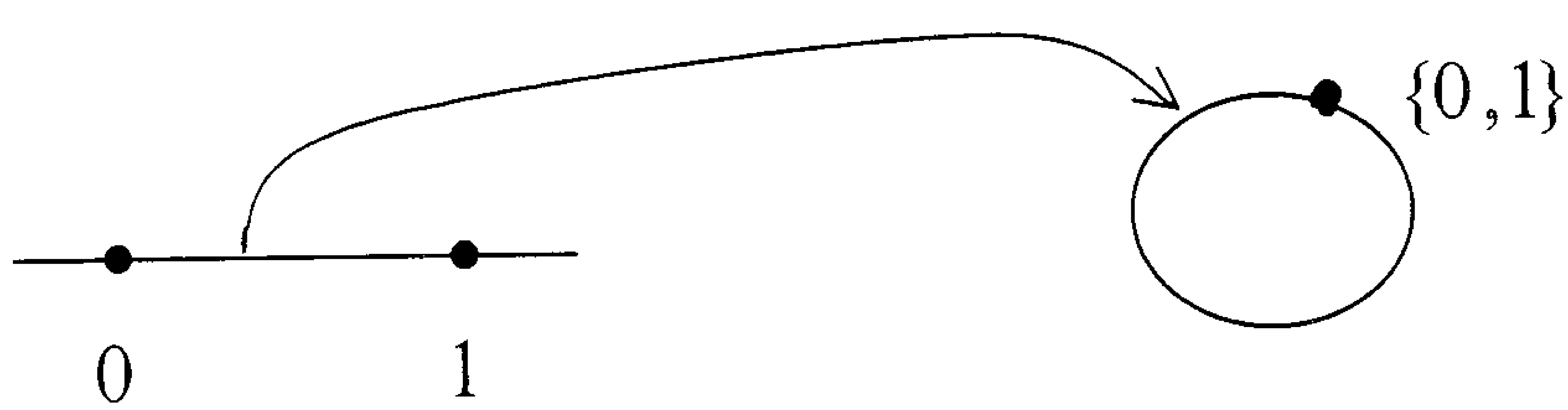
أي أن : $0 \sim 1\ ;\ x \sim x\ ,\ \forall x \neq 0,1$

من ذلك نجد أن $Y = [0,1]/\sim$ و تتكون من فصول التكافؤ $\{0,1\}$ وكل الفصول الـــتي عـــلى الصورة $\{x\}$ حيث $0 < x < 1$ أي أن فضاء القسمة الناتج تنطبق فيه النقطتان $0,1$ وتبقى النقاط الأخرى كما هي

والآن نعتبر الدالة : $f:[0,1] \to S = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$

المعرفة بالصورة : $f(t) = e^{2\pi i t}$ حيث $0 \le t \le 1$

وطبقا لنظرية (٩. ٢. ٧) فإن S تولد دالة توبولوجية من Y إلي S أي أن $S \cong Y$ ومن ثم فإن فضاء القسمة يطابق دائرة ويكون لدينا دالة متصلة من $[0,1]$ إلى الدائرة S.



والآن سوف ندرس بعض خواص فضاء القسمة.

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي وأن $\sim$ علاقة تكافؤ على X ، $X/\sim$ هي مجموعة القسمة . فصل التكافؤ الممثل بالعنصر a لعلاقة التكافؤ $\sim$ هو المجموعة :

$$[a]=\{b\in X : a\sim b\}$$

وإذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجى (X,τ) فإن:

$$[A]=\{b\in X : \exists a\in A, a\sim b\}=\cup\{[a] : a\in A\}$$

نظريه(٩. ٢. ٩):

بفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي، $(X/\sim,\tau/\sim)$ فضاء القسمة، فإن العبارات الآتية متكافئة:

(١) الراسم الطبيعي $\pi : X\to X/\sim$ مفتوح ،

(٢) إذا كانت المجموعة A مفتوحة في الفضاء (X,τ)، فإن المجموعة $[A]$ مفتوحة،

(٣) $[A^0]\subseteq([A])^0 \ , \ \forall A\subseteq X$

البرهان :

(١)$\Leftarrow$(٢) :

بفرض أن الراسم π مفتوح ، A مجموعة مفتوحة في X فإن $\pi(A)$ مجموعة مفتوحة في فضاء القسمة. حيث أن π راسم متصل، فإن $\pi^{-1}(\pi(A))$ مجموعة مفتوحة في X . والآن سوف نبين أن $[A]=\pi^{-1}(\pi(A))$

بفرض أن

$$x\in[A]\Leftrightarrow \exists a\in A : x\sim a \Leftrightarrow \exists a\in A : [x]=[a]$$

وهذا يؤدى إلى أن

$$\pi(a)=\pi(x)\in\pi(A)\Leftrightarrow x\in\pi^{-1}(\pi(A))$$

من ثم فإن $[A]=\pi^{-1}(\pi(A))$ وعليه تكون $[A]$ مجموعة مفتوحة.

(٢) $\Leftarrow$ (٣) :

إذا كانت A مجموعة مفتوحة في X فإن المجموعة $[A^o]$ تكون مجموعة مفتوحة ذلك باستخدام (٢). ومن جانب أخر ، حيث أن $A^o \subseteq A$ فإن $[A^o] \subseteq [A]$ وبذلك نحصل على $[A^o] = [A^o]^o \subseteq [A]^o$.

(٣) $\Leftarrow$ (١) :

بفرض أن U مجموعة مفتوحة في X ومن (٣) نحصل على أن $[U] = [U^o] \subseteq [U]^o$ وهذا يعنى أن المجموعة $[U]$ مفتوحة، ولكن نعلم أن $U \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)) = [U]$ وهذا يعنى أن $\pi(U) \subseteq \pi([U])$ حيث $\pi(U)$ مجموعة مفتوحة في فضاء القسمة $X/\sim$ ، ومن ثم فإن الراسم π مفتوح.

نظريه(٩. ٢. ١٠) :

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجى ، $(X/\sim, \tau/\sim)$ فضاء القسمة فإن العبارات الآتية متكافئة :

(١) الراسم $\pi : X \to X/\sim$ مغلق

(٢) إذا كانت المجموعة F مغلقة فإن المجموعة $[F]$ مغلقة.

(٣) $\overline{[A]} \subseteq [\overline{A}]$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان : يشابه برهان نظريه (٩. ٢. ٩).

نظريه(٩. ٢. ١١):

إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجى ، P تجزيئاً للفضاء X ، فإن فضاء القسمة $(X/P, \tau/P)$ يكون فضاء T_1- إذا وفقط إذا كانت عناصر P مغلقة في X.

البرهان :

حيث أن أي تجزئي P للمجموعة X يعرف علاقة تكافؤ بحيث يكون كل عنصر من P يطابق فصل التكافؤ، ومن تعريف فضاء القسمة X/P ينتج أن نقاط

فضاء القسمة تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت عناصر P مغلقة في X .

النظرية التالية توضح متى يكون فضاء القسمة فضاء- T_2 (هاوسدورف).

نظريه(٩. ٢. ١٢):

ليكن (X,τ) فضاء توبولوجى وأن $\sim$ علاقة تكافؤ على X فإن:

(١) إذا كان فضاء القسمة $(X/\sim,\tau/\sim)$ فضاء- T_2 فإن المجموعة $U=\{(x,y):x\sim y\}$ مغلقة في الفضاء الضربى $X\times X$.

(٢) إذا كانت المجموعة U مغلقة في الفضاء الضربى $X\times X$ وكان الراسم $\pi:X\to X/\sim$ مفتوح فإن فضاء القسمة $X/\sim$ يكون فضاء $-T_2$.

البرهان :

(١) حيث أن الراسم $\pi:X\to X/\sim$ متصل ، فإن الراسم $\pi\times\pi:X\times X\to X/\sim\times X/\sim$ متصل أيضا والمجموعة القطرية $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ مغلقة في الفضاء الضربى $X/\sim\times X/\sim$. (راجع نظرية(٩. ١. ٢٩) وبالتالي تكون المجموعة $(\pi,\pi)^{-1}(\Delta)=U$ مغلقة في الفضاء الضربى $X\times X$.

(٢) بفرض أن U مجموعة مغلقة في الفضاء $X\times X$ وأن $\pi:X\to X/\sim$ راسم مفتوح.

ولإثبات أن فضاء القسمة هو فضاء- T_2 ، نفرض أن $\pi(x),\pi(y)$ نقطتين مختلفتين في فضاء القسمة. من (١) نجد أن $(x,y)\notin U$ أو أن المجموعة $U^c=X\times X-U$ مفتوحة وتحتوى العنصر (x,y) في فضاء حاصل الضرب $X\times X$. من تعريف فضاء الضرب توجد مجموعة أساسية $H\times V$ بحيث يكون $(x,y)\in H\times V\subseteq X\times X-U$. وهذا يؤدى إلي أن $(H\times V)\cap U=\phi$ ومعنى ذلك أن أي نقطة من المجموعة U ، لا يمكن أن

تكافئ أي نقطة من المجموعة H ومن ذلك نستنتج أن $\pi(H) \cap \pi(V) = \phi$ وحيث أن الراسم π مفتوح فإن $\pi(H), \pi(V)$ مجموعتين مفتوحتين وغير متقاطعتين حيث $\pi(x) \in H, \pi(y) \in V$ وهذا يعنى أن فضاء القسمة هو فضاء T_2.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو إذا كان الفضاء (X, τ) هو فضاء $-T_i$ حيث $i = 0,1,2$ هل فضاء القسمة $(X/\sim, \tau/\sim)$ يكون فضاء$-T_i$ أيضاً ؟

في الحقيقة أنة ليس من الضروري أن يكون فضاء القسمة لفضاء$-T_i$ هو فضاء$-T_i$ كذلك والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال(٩. ٢. ١٣):

ليكن $(R, \mathcal{U})$ هو الفضاء العادي، δ علاقة تكافؤ معرفة على R بالصورة:

$$(x, y) \in \delta \Leftrightarrow x - y \in Q \quad , \forall\ x, y \in Q$$

حيث Q مجموعة الأعداد القياسية. فإن فصل التكافؤ $[x]$ الممثل بالعنصر x يكون على الصورة:

$$[x] = \{y \in R : (y, x) \in \delta\} = \{y \in R : y - x \in Q\}$$

$$\therefore\ [x] = \{y \in R : y - x = r \in Q\} = \{x + r : r \in Q\}$$

أي أن

$$[0] = Q,\ [1] = 1 + Q,\ \ldots [-2] = -2 + Q$$

ومن ثم فإن مجموعة فصول التكافؤ:

$$R/_{\delta} = \{[x] = x + Q : \forall x \in R\}$$

لنرى الآن وصف لتوبولوجى القسمة $\tau/_{\delta}$:

لتكن F مجموعة مغلقة في فضاء القسمة فإن $\pi^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في R وذلك لأن الراسم الطبيعي $\pi : R \to R/_{\delta}$ متصل ومن ذلك نحصل على

$\pi^{-1}(F)=\overline{\pi^{-1}(F)}$ وحيث أن Q كثيفة في R فإن $x+Q$ كثيفة في R.

وبالتالي فإن المجموعة $\pi^{-1}(F)$ تكون كثيفة في R أيضا أي أن :

$$\pi^{-1}(F)=\overline{\pi^{-1}(F)}=R$$

وهذا يعنى أن فضاء القسمة يحتوى فقط على المجموعتين المغلقتين R/δ، ϕ أي أن

$\tau/\delta=\{R/\delta,\phi\}$ ومــن ثم فــان τ/δ يتطابق مع التوبولوجى الغير منفصل.

لاحــظ أن الفضاء R هو فضاء $-T_i$ حيث $i=0,1,2$ ولكن فضاء القسمة لا يكون كذلك (لأن τ/δ هو التوبولوجى الغير منفصل).

نظريه(٩. ٢. ١٤) :

إذا كان الفضاء التوبولوجي (X,τ) فضاء محكم (مترابط) فإن فضاء القسمة $(X/\sim,\tau/\sim)$ يكــــون محكــــم (مــــترابط) أيضًــــا.

البرهان :

واضح من كون أن الراسم الطبيعي $\pi:X\to X/\sim$ متصل وشامل وباستخدام نتيجة (٧. ٤. ٢) ونتيجة (٨. ٢. ٢٥) وينتج المطلوب.

بند(٣) : الزمرة التوبولوجية : Topological Groups

من أهم المفاهيم التي تتبع الفضاء الضربى هو التوبولوجى الجبري Algebraic Topology ، وكحالة خاصة سوف نعرض في هذا البند وبصورة مختصرة مفهوم الزمرة التوبولوجية.

تعريف(٩. ٣. ١):

النظام $(G,\bullet,\tau)$ يسمى زمرة توبولوجية إذا وفقط إذا توفرت الشروط الآتية:

(١) النظام $(G,\bullet)$ زمرة.

(٢) (G,τ) فضاء توبولوجى.

(٣) الدالة $f : G \times G \to G$ من فضاء حاصل ضرب $G \times G$ إلي الفضاء G حيث $f(x,y) = x \bullet y^{-1}$ لكل $(x,y) \in G \times G$ دالة متصلة.

مثال(٩. ٣. ٢) :

ليكن $(R,\mathcal{U})$ الفضاء العادي فإن :

(١) $(R,+)$ زمرة

(٢) الدالة $f : R^2 \to R$ حيث $f(x,y) = x + y^{-1} = x - y$ هي دالة متصلة .

بالتالي النظام $(R,+,\mathcal{U})$ زمرة توبولوجية.

مثال(٩. ٣. ٣) :

بين أن أي زمرة G مع التوبولوجى المنفصل أو الغير منفصل تكون زمرة توبولوجية.

نظرية(٩. ٣. ٤) :

النظام $(G,\bullet,\tau)$ زمرة توبولوجية إذا وفقط إذا كانت G زمرة ، (G,τ) فضاء توبولوجي والدوال $f : G \times G \to G, f(x,y) = xy$ ، $I : G \to G, I(x) = x^{-1}$ متصلة.

نظرية(٩. ٣. ٥):

أي زمرة جزئية من زمرة توبولوجية هي زمرة توبولوجية.

نظرية(٩. ٣. ٦):

لتكن $(G,\bullet,\tau)$ زمرة توبولوجية ، N زمرة جزئية عمودية **Normal subgroup** فإن $(G/N,\bullet,\tau/N)$ زمرة توبولوجية حيث τ/N هو توبولوجى القسمة.

تمارين عامة على الباب التاسع

(١) بفرض أن $\{(X_i,\tau_i): i\in N\}$ عائلة من الفضاءات التوبولوجية ، $X=\Pi X_i$. بين أن المجموعة الجزئية من X التى على الصورة $\Pi\{G_i: i\in N\}$ حيث G_i مجموعة مفتوحة في X_i تشكل أساس للتوبولوجى τ المعرف علي X.

(٢) بفرض أن τ^* هو التوبولوجى على R^2 المولد بواسطة المستطيلات نصف المفتوحة $[a,b)\times\{c,d)=\{(x,y): a\le x<b\ ,c\le y<d\}$ ، τ هو توبولوجى النهاية السفلي المولد بالفترات نصف المفتوحة $[a,b)$. بين أن (R,τ^*) هو ضرب الفضاءات (R^2,τ).

(٣) بين أن ضرب فضاءات- T_1 هو فضاء- T_1.

(٤) بين أن ضرب فضاءات منتظمة هو فضاء منتظم.

(٥) بين أن ضرب فضاءات قابلة للعد وتحقق مسلمة العد الثانية هو فضاء يحقق مسلمة العد الثانية.

(٧) بفرض أن A_i مجموعة جزئية اختيارية من X_i . بين أن توبولوجى الضرب على ΠA_i يطابق التوبولوجى النسبي على ΠA_i حيث ΠA_i مجموعة جزئية من ΠX_i.

(٨) أعط مثال لتوبولوجى على مجموعة حاصل الضرب $X=\Pi X_i$ أضعف من توبولوجى حاصل الضرب.

(٩) بفرض أن دالة معرفة $f: X\to Y$ ، $F: X\to X\times X$ بالصورة $F(x)=(x,f(x))$ بين أن f متصلة إذا وفقط إذا كانت F دالة توبولوجية من X إلى $F(X)$.

(١) ليكن X فضاء توبولوجى ، $X\times X$ فضاء حاصل الضرب ولتكن

$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ برهن أن $X\approx\Delta$.

(١١) إذا كان (X,τ) فضاء توبولوجي ، ρ علاقة تكافؤ على X معرفة بالصورة: $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}\ \Leftrightarrow\ x\,\rho\,y$. بين أن الراسم الطبيعي $\pi:X\to X/\rho$ هو راسم مفتوح ومغلق في نفس الوقت.

(١٢) لتكن $(G,\bullet,\tau)$ زمرة توبولوجية ، $H\subseteq G$ زمرة جزئية من G.

(أ) بين أن $(H,\bullet,\tau_H)$ زمرة توبولوجية.

(ب) برهن أن لصاقة أي زمرة جزئية تكون زمرة جزئية.

(ج) برهن أن لصاقة أي زمرة جزئية عمودية تكون زمرة جزئية عمودية.

(١٣) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون فضاء حاصل الضرب ΠX_j هو فضاء$-T_i$ حيث $i=0,1,2$ هو أن تكون كل مركبة X_j فضاء$-T_i$ أيضاً.

(١٤) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون فضاء حاصل الضرب ΠX_i فضاء منتظم هو أن تكون كل مركبة X_i فضاء منتظم أيضاً.

(١٥) بين أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون فضاء حاصل الضرب ΠX_i مترابط (محكم) هو أن تكون كل مركبة X_i مترابطة (محكمة).

المراجع

REFERENCES

المراجع
REFERENCES

[1] Bartle R. G. , Sherbert D. R. , Introduction to Real Analysis , second edition , John Wiley & Sons INC. 1992.
[2] Bourbaki , Topologie generale , Act. Sci. Indust. (1940-1953).
[3] Čech E. , Topological Spaces , Interscience- Wiely , London , New York , 1966.
[4] Csàszàr A. , General Topology , A Kademiai Kiado , Budapest , 1987.
[5] Goshi , D. , Introduction to General Topology , Wiley Eastern Limited , New Delhi , 1986.
[7] Kelly , J., General Topology , Van Nostrand , Princeton New Tersey , 1955.
[8] Lipschutz , S. Theory and problems of General topology , Schum's Series , McGraw-Hill Int. 1965.
[9] Munkres , J. , Topology : Afirst course , prentic0Hall , N. , Y. , 1975.
[10] Naimpally S. N. , Warrack , B. D. , Proximity Spaces , Combridge Univ. Press , New York , 1970.
[11] Sierpinski , W. , General topology , Toronto , 1952
[12] Simmons , G. , F. , Introduction to topology and Modern Analysis , McGraw-Hill Int. 1963.
[13] Willeard S. , General Topology , Reading M A , 1970.