كثيرات الحدود

1- كثيرات الحدود لمتغيّر حقيقيّ:

1-1- وحيدات الحدّ لمتغيّر حقيقيّ:

تعريف:

إذا كان a عددًا حقيقيًّا وكان n عددًا طبيعيًّا فإنّ الدالّة: التي ترفق بكلّ عدد حقيقيّ x العدد الحقيقيّ ax^n تسمّى دالّة وحيد الحدّ.

- العدد الحقيقيّ ax^n يدعى **وحيد الحدّ** للمتغيّر الحقيقيّ x.
- العدد الحقيقيّ a يسمّى **معامل** وحيد الحد ax^n.
- إذا كان $a\neq 0$ فإنّ العدد الطبيعيّ n يسمّى **درجة** وحيد الحدّ ax^n.
- إذا كان $a=0$ فإنّ وحيد الحدّ ax^n يسمّى **وحيد الحدّ المعدوم**.

  من الملاحظ أنّ درجة وحيد الحدّ المعدوم غير معيّنة.
- وحيدات الحدّ التي لها نفس الدرجة تسمّى **وحيدات الحدّ المتشابهة**.

أمثلة:

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}x^5$ هو وحيد حدّ درجته: 5 ومعامله: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) كلّ عدد حقيقيّ ثابت a هو وحيد حدّ درجته: 0 ومعامله: a.

3) $\frac{\sqrt{3}}{x}$ و $3\sqrt{x}$ ليسا وحيدي حدّ لأنّه لا يمكن كتابتهما على الشكل: ax^n مع n عدد طبيعيّ.

1-2- كثيرات الحدود لمتغيّر حقيقيّ:

تعريف:

كثير حدود للمتغيّر الحقيقيّ x هو مجموع وحيدات حدّ للمتغيّر الحقيقيّ x.

مثال:

$$P(x)=-\frac{1}{2}x^2+5x^7+2x^3+x^2-2x^7-9-3x+6$$

$P(x)$ هو كثير حدود للمتغيّر الحقيقيّ x. باستعمال قواعد الحساب في مجموعة الأعداد الحقيقيّة R يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$P(x)=3x^7+2x^3+\frac{1}{2}x^2-3x-3$$

هذه الكتابة تسمّى **الشكل المبسّط والمرتّب** لكثير الحدود $P(x)$.

- **الدالّة كثير الحدود:**

الدالّة f التي ترفق بكل عدد حقيقيّ x كثير الحدود $f(x)$ تسمّى **دالة كثير الحدود.**

- **كثير الحدود المعدوم:**

كثير الحدود المعدوم هو كثير حدود $f(x)$ يحقّق ما يلي:

$$\forall x\in R:\ f(x)=0$$

- **الكتابة العامّة لكثير حدود مبسّط غير معدوم:**

يمكن كتابة أيّ كثير $f(x)$ مبسّط ومرتّب وغير معدوم على الشكل العامّ التالي:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ حيث: $a_n\neq 0$.

- العدد الطبيعيّ n يسمّى **درجة كثير الحدود** $f(x)$.
- وحيدات الحدّ a_nx^n، $a_{n-1}x^{n-1}$، ... a_1x، a_0 تسمّى **حدود كثير الحدود** $f(x)$.
- الأعداد الحقيقيّة a_n، a_{n-1}، ... a_1، a_0 تسمّى **معاملات كثير الحدود** $f(x)$.

أمثلة:

1) كلّ كثير حدود من الدرجة الأولى يكتب على الشكل العامّ:

$ax+b$ حيث: $a\neq 0$.

2) كلّ كثير حدود من الدرجة الثانية يكتب على الشكل العامّ:

ax^2+bx+c حيث: $a\neq 0$.

3) كلّ كثير حدود من الدرجة الثالثة يكتب على الشكل العامّ:

ax^3+bx^2+cx+d حيث: $a\neq 0$.

- **درجتا مجموع وجداء كثيري حدود:**

– درجة مجموع كثيري حدود تكون دائمًا أصغر من أو تساوي درجة كثير الحدود الأكبر درجة.

– درجة جداء كثيري حدود تساوي مجموع درجتيهما.

1-3- تساوي كثيري حدود:

يتساوى كثيرا الحدود $f(x)$ و$g(x)$ إذا وفقط إذا كان: $\forall x\in R: f(x)=g(x)$.

2- تحليل كثير حدود:

إنّ تحليل كثير حدود هو كتابته على شكل جداء كثيرات حدود.

2-1- التحليل بواسطة عامل مشترك:

يمكن كتابة مجموع جداءات لها عامل مشترك على شكل جداء حسب القاعدة التالية:

$$a x + a y + a z = a(x + y + z)$$

مثال:

- $14x^2y^2+7xy=7xy(2xy+1)$

2-2- التحليل باستعمال المتطابقات الشهيرة:

فيما يلي بعض المتطابقات الشهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$

أمثلة:

- $f(x) = (2x-1)^2 - (3x-2)^2$
  $f(x) = (2x-1+3x-2)\cdot(2x-1-3x+2)$
  $f(x) = (5x-3)\cdot(-x+1)$
  $f(x) = -(5x-3)\cdot(x-1)$

- $g(x) = 9x^2 + 24x + 16$
  $g(x) = (3x+4)^2$

- $h(x) = x^{16} - 1$
  $h(x) = (x^8-1)\cdot(x^8+1)$
  $h(x) = (x^4-1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)$
  $h(x) = (x^2-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)$
  $h(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)$

3- جذور كثير حدود:

تعريف:
يكون العدد الحقيقيّ α جذرًا لكثير الحدود $f(x)$ إذا وفقط إذا كان: $f(\alpha)=0$.

مثلاً:

- العددان 1 و-1 هما جذران لكثير الحدود $f(x)=x^2-1$ لأنّ $f(1)=0$ و$f(-1)=0$.
- الأعداد 2، 3، 4 ليست جذورًا لكثير الحدود $f(x)=x^2-1$ لأنّ $f(2)\neq 0$ و$f(3)\neq 0$ و$f(4)\neq 0$.

3-1- الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية:

ليكن $f(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية لمجهول حقيقيّ x:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$f(x)=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$
$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$
$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right]$$
$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

إذن يمكن كتابة كثير الحدود من الدرجة الثانية ax^2+bx+c على الشكل $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right]$ الذي يسمّى **شكله النموذجيّ**.

3-2- حل معادلة من الدرجة الثانية:

لتكن المعادلة $ax^2+bx+c=0$، لدينا:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$
$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$
$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

لاحظ أنّ الطرف الأوّل لهذه المعادلة مربّع إذاً موجب؛ أمّا الطرف الثاني فهو كسر مقامه موجب تمامًا وإشارته إذاً هي إشارة بسطه الذي يسمّى **مميّز المعادلة** ويرمز له بالرمز Δ.

$$\Delta=b^2-4ac$$

إذن لحلّ المعادلة نميّز ثلاث حالات حسب إشارة Δ:

- **الحالة الأولى**: $\Delta<0$ المعادلة ليس لها حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة.
- **الحالة الثانية**: $\Delta=0$ المعادلة لها **حلّ مضاعف** هو $\frac{-b}{2a}$.
- **الحالة الثالثة**: $\Delta>0$ المعادلة تقبل حلّين متمايزين هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

3-3- إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية:

ليكن $f(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية. لدينا ثلاث حالات حسب إشارة Δ.

- **الحالة الأولى**: $\Delta<0$ كثير الحدود لا ينعدم وإشارته هي إشارة a مهما كان العدد الحقيقيّ x.
- **الحالة الثانية**: $\Delta=0$ كثير الحدود ينعدم من أجل $x=\frac{-b}{2a}$، وإشارته هي إشارة a من أجل كلّ عدد حقيقيّ يختلف عن $\frac{-b}{2a}$.
- **الحالة الثالثة**: $\Delta>0$ كثير الحدود له جذران هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$، وإشارة $f(x)$ هي إشارة الجداء $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$(x-x_1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-x_2)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-x_1)\cdot(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$	إشارة a	0	إشارة $-a$	0	إشارة a

4-3- مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية لمجهول حقيقيّ:

لتكن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ مع $\Delta\geq 0$:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

4- كثيرات الحدود لمتغيّرين حقيقيّين:

تعريف:

كثير حدود للمتغيّرين الحقيقيّين x وy هو مجموع وحيدات حدّ للمتغيّرين الحقيقيّين x، y.