الأعداد الطبيعيّة

الأعداد الطبيعيّة هي الأعداد التي نتعلّمها من الطبيعة، ونستعملها في عدّ الأشياء. فمثلاً إذا قلنا: اشترى محمّد ثلاثة أقلام وأربعة كتب وكرّاستين، نكون قد استعملنا الأعداد 3، 4، 2 في عدّ هذه الأشياء؛ نقول عندئذٍ أنّ كلاًّ من الأعداد: 2، 3، 4، هي أعداد طبيعيّة.

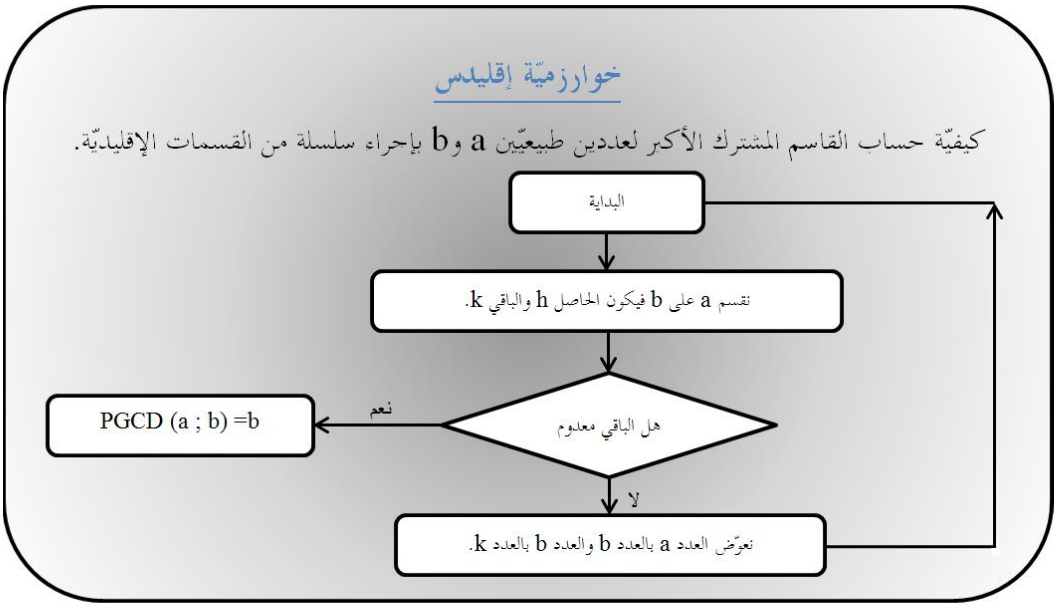
يمكن تمثيل مجموعة الأعداد الطبيعيّة كما يلي: $N=\{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$

قواسم ومضاعفات عدد طبيعيّ

- العدد الطبيعيّ a مضاعف للعدد الطبيعيّ b معناه: $a=nb$ حيث n عدد طبيعيّ.
- إذا كان a مضاعفًا للعدد b فإنّ كلّ مضاعف للعدد a هو مضاعف للعدد b.
- إذا كان العددان الطبيعيّان a، b مضاعفي العدد الطبيعيّ c فإنّ $a+b$ هو مضاعف للعدد c.
- إذا كان العددان الطبيعيّان a، b مضاعفي العدد الطبيعيّ c وكان $b\leq a$ فإنّ $a-b$ هو مضاعف للعدد c.
- a، b عددان طبيعيّان حيث b غير معدوم $(b\neq 0)$ b قاسم للعدد a معناه العدد a مضاعف للعدد b.

ملاحظات:

- العدد الطبيعيّ 0 ليس قاسمًا لأيّ عدد طبيعيّ.
- العدد الطبيعيّ 1 قاسم لكلّ عدد طبيعيّ.
- كلّ عدد طبيعيّ غير معدوم هو قاسم لنفسه.
- كلّ عدد طبيعيّ a غير معدوم ويختلف عن 1 يقبل على الأقل قاسمين هما 1 وa.
- a، b عددان طبيعيّان غير معدومين: إذا كان b قاسمًا للعدد a فإنّ $b\leq a$.



مثال على خوارزميّة إقليدس:

باستعمال خوارزميّة إقليدس، أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 174636000، 15912.

الحلّ:

a	174636000	15912	1800	1512	288
b	15912	1800	1512	288	$\boxed{72}$
k	1800	1512	288	72	0

PGCD(a;b)

قواعد قابليّة القسمة

يقبل عدد طبيعيّ القسمة على	إذا كان
2	رقم آحاده عنصرًا من المجموعة {0، 2، 6، 8}.
5	رقم آحاده عنصرًا من المجموعة {0، 5}.
10	رقم آحاده 0.
100	كلّ من رقمي آحاده وعشراته 0.
1000	كلّ من أرقام آحاده وعشراته ومئاته 0.
4	الرقم المؤلّف من رقمي الآحاد والعشرات يقبل القسمة على 4.
25	الرقم المؤلّف من رقمي الآحاد والعشرات يقبل القسمة على 25.
3	مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3.
9	مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

ملاحظات:

- باقي قسمة عدد طبيعيّ على 2 هو باقي قسمة آحاده على 2.
- باقي قسمة عدد طبيعيّ على 5 هو باقي قسمة رقم آحاده على 5.
- باقي قسمة عدد طبيعيّ على 10 هو رقم آحاده.
- باقي قسمة عدد طبيعيّ على 100 هو العدد المؤلّف من رقمي آحاد وعشرات هذا العدد.
- باقي قسمة عدد طبيعيّ على 4 هو باقي قسمة العدد المؤلّف من رقمي آحاد وعشرات هذا العدد على 4.
- باقي قسمة عدد طبيعيّ على 3 هو باقي قسمة مجموع أرقامه على3.

الأعداد الأوّليّة

- نقول عن عدد طبيعيّ أنّه أوّليّ إذا وفقط إذا كان عدد قواسمه اثنان.
- إذا كان a عددًا طبيعيًّا غير أوّليّ، فإنّ أصغر قاسم له يختلف عن 1 هو عدد أوّليّ.

البحث عن أوّليّة عدد:

لمعرفة أوّليّة عدد طبيعيّ n نتّبع ما يلي:

1) نبحث في قابليّة قسمة العدد n على الأعداد الأوّليّة الأولى الأصغر منه.
2) نتوقّف عن هذا البحث عندما نجد حاصلاً أصغر من القاسم أو يساويه.
3) إذا كان الباقي في كلّ مرّة غير معدوم فالعدد n أوّليّ.

مثال:

هل العدد 139 أوّليّ؟

الحلّ:

العدد 139 لا يقبل القسمة على كلّ من 2، 3، 5 حسب قواعد قابليّة القسمة، ولا يقبل القسمة على 7 لأنّ $139=(7\times19)+6$، وأيضًا لا يقبل القسمة على 11 ولا على 13، لأنّ: $139=(11\times12)+7=(13\times10)+9$.

في القسمة الأخيرة وجدنا الحاصل أغر من القاسم والباقي غير معدوم، إذن نتوقّف، ونستنتج أنّ العدد 139 أوّليّ.

الأعداد الأوّليّة الأصغر من 100:

مجموعة الأعداد الأوّليّة الأصغر من 100 هي: {2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 31، 37، 41، 43، 47، 53، 59، 61، 67، 71، 73، 79، 83، 89، 97}.

الأعداد الأوّليّة فيما بينها:

a وb عددان طبيعيّان: نقول أنّ العددين a وb أوّليّان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $PGCD(a; b)=1$.

التحليل إلى جداء عوامل أوّليّة:

- هل 36 عدد أوّليّ؟ لا. لأنّ $36=2\times18$.
- هل 18 عدد أوّليّ؟ لا. لأنّ $18= 2\times9$.
- هل 9 عدد أوّليّ؟ لا. لأنّ $9=3\times3$.
- نكتب: $36=2\times2\times3\times3$، أو: $36=2^2\times3^2$. نقول أنّ الكتابة: ($2^2\times3^2$) هي تحليل العدد الطبيعيّ 36 إلى جداء عوامل أوّليّة.

ويمكن تقديم هذا التحليل عمليًّا كما يلي:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

أي: $36=2^2\times3^2$

مثال آخر: لتحليل العدد 90 إلى جداء عوامل أوّلية يمكننا أن نكتب:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

أي: $90=2\times3^2\times5$

المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر

1) لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر (PPCM) لعددين طبيعيّين غير معدومين أو لعدّة أعداد طبيعيّة غير معدومة نتّبع ما يلي:
   - نحلّل كلاًّ من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أوّليّة.
   - نحسب جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة على أن نأخذ كلّ عامل مرّة واحدة وبأكبر قوّة.
2) لإيجاد القاسم المشترك الأكبر (PGCD) لعددين طبيعيّين غير معدومين أو لعدّة أعداد طبيعيّة غير معدومة نتّبع ما يلي:

- نحلّل كلاًّ من هذه الأعداد إلى جداء عوامل أوّليّة.
- نحسب جداء العوامل المشتركة على أن نأخذ كلّ عامل مرّة واحدة وبأصغر قوّة.

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر (PPCM) والقاسم المشترك الأكبر (PGCD) للأعداد الطبيعيّة التالية: 108، 648، 69984.

الحلّ:

$108 = 2^2 \times 3^3$

$648 = 2^3 \times 3^4$

$69984 = 2^5 \times 3^7$

$\Rightarrow PPCM(108;648;69984) = 2^5 \times 3^7 = 69984$

$\Rightarrow PGCD(108;648;69984) = 2^2 \times 3^3 = 108$

توحيد مقامات الكسور

لتوحيد مقامات الكسور $\frac{a}{b}$، $\frac{c}{d}$، $\frac{e}{f}$ نتّبع الطريقة التالية:

- نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر (PPCM) للمقامات b، d، f.
- نحسب الأعداد x، y، z حيث: $x = \frac{PPCM(b;d;f)}{b}$ و $y = \frac{PPCM(b;d;f)}{d}$ و $z = \frac{PPCM(b;d;f)}{f}$.
- يصبح لدينا: $\frac{a}{b} = \frac{ax}{PPCM(b;d;f)}$ و $\frac{c}{d} = \frac{cy}{PPCM(b;d;f)}$ و $\frac{e}{f} = \frac{fz}{PPCM(b;d;f)}$.

مثال: وحّد مقامات الكسور: $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{30}$.

الحلّ: نعلم أنّ: PPCM(2; 3; 30)=30 وأنّ: 1×30=3×10=2×15=30، إذن: $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ و $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{30} = \frac{1}{30}$.

اختزال الكسور

لاختزال الكسر $\frac{a}{b}$ نتّبع الطريقة التالية:

- نبحث عن القاسم المشترك الأكبر (PGCD) لكلّ من البسط (a) والمقام (b).
- نقسم كلاًّ من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما للحصول على كسر غير قابل للاختزال.

مثال: اختزل الكسر: $\frac{15}{90}$.

الحلّ: نعلم أنّ: PGCD(15; 90)=15 وأنّ: 6×15=90، إذن: $\frac{1}{6} = \frac{15}{90}$.