٩

الجُزءُ الأَوَّل

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

المؤلِّفون:

قيس شبانة «منسقاً»
أشجان جبر
أماني الأخضر
محمد غانم
هاشم أبو بكر
جهاد ابو جاسر
عماد جمعة

نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد
مدير عام المناهج الإنسانية	أ. علي مناصرة

الدائرة الفنية

الإشراف الإداري	أ. حازم عجاج
التصميم الفني	عبد الناصر أبوشوشة

التحكيم العلمي	د. نبيل الجندي
التحرير اللغوي	رائد شريدة
الرسومات	سالم نعيم
المتابعة للمحافظات الجنوبية	د. سمية النخالة

الطبعة التجريبية
٢٠١٧ م/ ١٤٣٨ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2969377 | هاتف +970-2-2969350

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم العالي

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

مقدمة

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوَّنَ هذا الكتاب من أربع وَحَداتٍ تعليمية، تناولت الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية والعمليات عليها، وبعض القواعد الأساسية في الأسس واللوغريتمات، أمّا الوَحْدَة الثانية،فتناولت العلاقات بأنواعها، وبعض أنواع الاقترانات؛ لتكون مقدمة للاقترانات بعموميّتها، وتناولت الوَحْدَة الثالثة الهندسة والقياس، حيث قدّمت المسافة بين نقطتين، ومعادلة الخط المستقيم، والقِطَع المتوسطة للمثلث، أمّا الوَحْدَة الرابعة (الإحصاء)، فتناولت مقاييس النزعة المركزية لجداول تَكرارية، والانحراف المعياري.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

وزارة التربية والتعليم العالي

المؤلفون

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

١-١ الأعداد الحقيقية ٤

١-٢ جمع الأعداد الحقيقيّة وطرحها ٧

١-٣ ضرب الأعداد الحقيقيّة وقسمتها ١٠

١-٤ القيمة المطلقة ١٥

١-٥ الأُسس وقوانينها (١) ١٨

١-٦ الأُسس وقوانينها (٢) ٢٣

١-٧ اللّوغاريتمات ٢٨

١-٨ تمارين عامّة ٣٤

الوحدة الثانية: العلاقات والاقترانات

٢-١ الضّرْب الدّيكارتِيّ ٣٨

٢-٢ العلاقة ٤١

٢-٣ خواصّ العلاقات ٤٥

٢-٤ الاقتران ٥٠

٢-٥ أنواع الاقترانات ٥٤

٢-٦ الاقتران الخطّيّ ٥٨

٢-٧ تركيب الاقترانات ٦٢

٢-٨ الاقتران النظير (العكسيّ) ٦٥

٢-٩ تمارينُ عامّة ٦٨

الوحدة الثالثة: الهندسة والقياس

٣-١ المسافة بين نقطتين ٧٢

٣-٢ إحداثيّات منتصف القطعة المستقية ٧٥

٣-٣ مَيل الخطّ المستقيم ٧٨

٣-٤ معادلة الخطّ المستقيم ٨٣

٣-٥ القطع المتوسّطة للمُثَلَّث ٨٨

٣-٦ تمارينُ عامّة ٩٢

الوحدة الرابعة: الإحصاء

٤-١ الجداول التكرارية ٩٦

٤-٢ التّمثيل البيانيّ للجداول التّكراريّة ذات الفئات ١٠٠

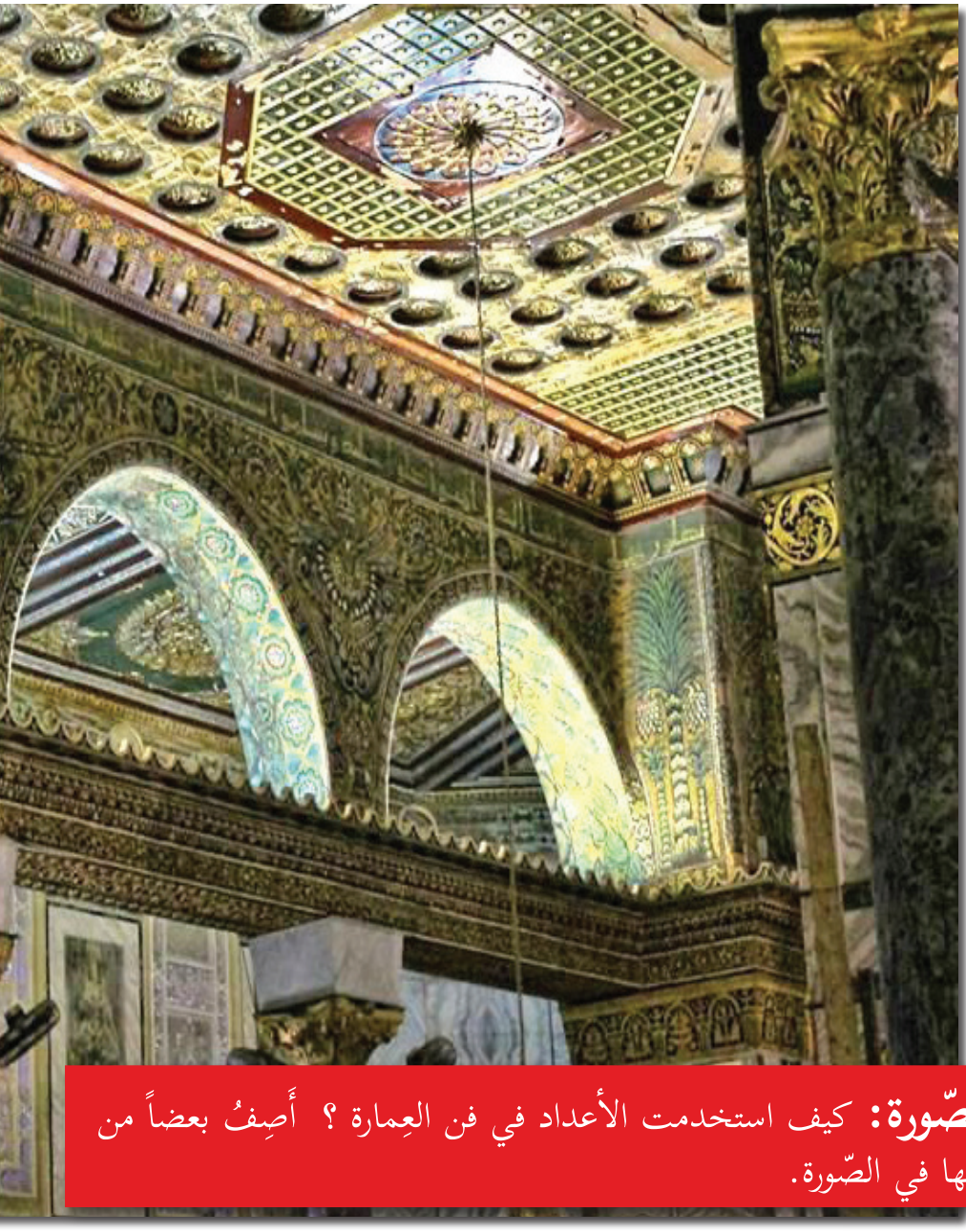
٤-٣ مقاييس النّزْعة المركزيّة للجداول التّكراريّة ١٠٦

٤-٤ الانحراف المعياريّ للجداول التّكراريّة ١١٢

٤-٥ تمارينُ عامّة ١١٤

الوحدة ١

الأعداد الحقيقيّة



أتأمَّلُ الصّورة: كيف استخدمت الأعداد في فن العِمارة ؟ أَصِفُ بعضاً من استخداماتها في الصّورة.

توسّعتِ استخداماتُ الأعداد، والعمليّات عليها؛ لتسهّل علينا أموراً كثيرة في حياتنا خاصة مع التطور العلمي والتكنولوجي، ونتطلّع في نهاية الوحدة إلى طلبة قادرين على توظيف الأعداد الحقيقيّة، والعمليّات عليها، والأُسس، واللّوغاريتمات في حلّ مسائل مرتبطة بالحياة والواقع.

يتوقع من الطلبة بعد دراسة الوحدة أن يحققوا الأهداف الآتية:

١. التَّعَرُّف إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

٢. إجراء عمليّات حسابية على الأعداد الحقيقيّة.

٣. التَّعَرُّف إلى خواصّ العمليّات الحسابية على الأعداد الحقيقيّة.

٤. التَّعَرُّف إلى بعض خواصّ القيمة المطلقة.

٥. التَّعَرُّف إلى الأُسس وقوانينها.

٦. التَّعَرُّف إلى اللّوغاريتمات وقوانينها.

٧. إجراء بعض العمليّات على الأُسس واللّوغاريتمات.

(١-١) الأعداد الحقيقيّة

نشاط (١): يصب نهر الأردن في البحر الميت، ومع ذلك يتناقص ارتفاع سطح مياه البحر الميت قرابة متر سنوياً؛ بفعل الانتهاكات الإسرائيليّة التي طالت مياه نهر الأردن.

عدد الأمتار التي يتناقصها البحر الميت

خلال سنة ونصف = $١\frac{١}{٢}$

هذا العدد ينتمي إلى مجموعة .....

عدد الأمتار التي يتناقصها خلال سنتين

و٤ أشهر= .....

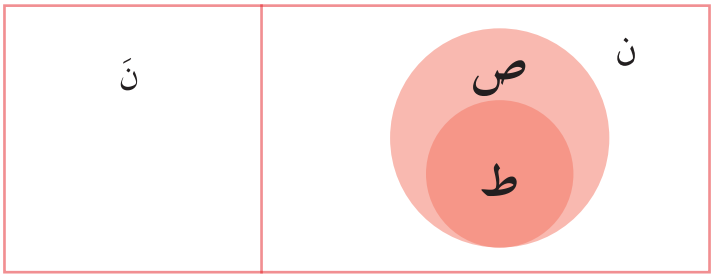
هذا العدد ينتمي إلى مجموعة ..... .

أتعلّم

مجموعة الأعداد النّاتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبيّة (ن)، ومجموعة الأعداد غير النسبيّة (نَ) تُسَمّى مجموعة الأعداد الحقيقيّة، ويُرمَز لها بالرمز ح، ونعبّر عنها بالرّموز

ح = ن ∪ نَ، وتُمَثِّلُ بأشكال ڤن كما يأتي:

الأعداد الحقيقيّة ح



حيث إنّ: ص: مجموعة الأعداد الصَّحيحة.

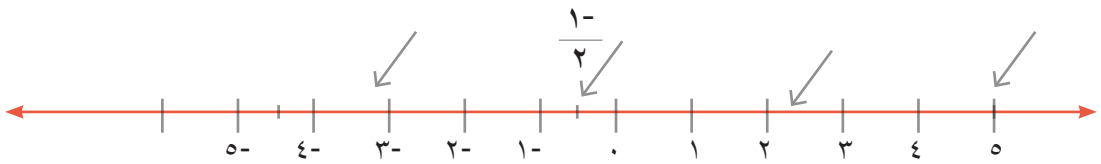
ط: مجموعة الأعداد الطبيعية.

نشاط تعاونيّ: أصنّف الأعداد الآتية، حَسَبَ مجموعات الأعداد التي تنتمي إليها:

العدد / المجموعة	ط	ص	ن	نَ	ح
-٦	✗	✓	✓	✗	✓
$١\frac{٥}{٩}$	✗	✗			
٠					
$٠,\overline{٢٣}$					
$٠,٦٨$					
$\sqrt{٢}$					
π					
$-\sqrt{٩}$					
$\frac{٢}{٥}$					
$\sqrt[٣]{٦٤}$					
$٠,١٥١١٥١١١٥ \longrightarrow$					

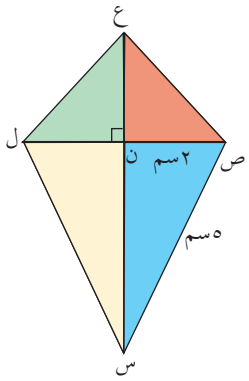
نشاط (٢): أُمَثِّلُ بشكل تقريبي الأعداد الحقيقيّة الآتية بنقاط على خطّ الأعداد:

$\frac{-١}{٢}$ ، ٥ ، $٢,\overline{٣}$ ، $-\pi$. وأُكْمِلُ ترتيبها تصاعدياً:



الترتيب التصاعدي لهذه الأعداد: _____ ، $\frac{-١}{٢}$ ، _____ ، _____ .

نشاط (٣): أَجِدُ طول $\overline{\text{ن س}}$ في الشَّكْل المجاور:



(ص س)^{٢}=(ص ن)^{٢} + (ن س)^{٢} (نظرية فيثاغورس)

(ن س)^{٢} = _____

ن س= _____

تمارينُ ومسائِل

١ أَكْتُبُ جميع مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلّ عدد حقيقيّ مما يأتي:

$٤,٥\overline{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٥٤}$ ، $-٠,٧$ ، $\sqrt{١٠٠}$ ، $\frac{-٥}{١٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، ٢,١٢١١٢١١١٢ ⟵ ، $\frac{٨}{٢٥}$

٢ أُمَثِّلُ بشكل تقريبي الأعداد الحقيقيّة الآتية بنقاط على خطّ الأعداد:

أ) $-٢,٤$ ب) $\sqrt{٥}$ جـ) $-\frac{١}{٦}$

٣ أقارنُ بين كلّ عددَيْنِ حقيقيّين فيما يأتي:

أ) ٥,٥ ، $\sqrt{٢٤}$ ب) $-\frac{٢}{٩}$ ، $-٠,٢$ جـ) $\sqrt[٣]{٦٤}$ ، $\frac{٦٠}{١٥}$

٤ أ) هل جميع الجذور التربيعيّة أعداد غير نسبيّة؟ أوضِّح بأمثلة عدديّة.

ب) هل جميع الجذور التكعيبيّة أعداد غير نسبيّة؟ أوضِّح بأمثلة عدديّة.

٥ يُسَمّى المستطيل مستطيلاً مثاليّاً إذا كان طوله يساوى طول قُطْر المربّع الذي طول ضِلْعه عرض هذا المستطيل، فإذا علمتَ أنّ عرض الإطار الخارجيّ للوحة فنيّة مستطيلة الشَّكْل ١م، أَجِدُ طول اللّوحة؛ لتكون مستطيلاً مثاليّاً.

١م

(١ -٢) جمع الأعداد الحقيقيّة وطرحها

نشاط (١): مبنى نقابة المهندسين – فرع الخليل- يتوسطه مكعّب يعلوه هرم زجاجيّ، طول ضِلْع قاعدة أحد أوجهه ٣ أمتار، وطول الحافّة الجانبيّة له $\frac{\sqrt{٣٣}}{٢}$ متراً.

محيط الوجه الجانبي للهرم = ٣ + _____ + _____

= _____ متراً .

العدد الذي يمثّل المحيط هو عدد _____

تعريف: لأيّ عددَيْنِ حقيقيّين أ ، ب: أ – ب = أ + (-ب)

نشاط (٢): أُكْمِلُ إيجاد $\sqrt{٤٥} + ٦\sqrt{٥} - \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٥}$.

(أُلاحظ أنّني أجمع الحدود المتشابهة بعد تبسيطها).

$= \sqrt{٣٥} + \sqrt{٦٥} - \sqrt{٢٥} - ٥$ (لماذا؟)

= _____

نشاط (٣): إذا سارَ عليٌّ مسافة ٢ كم من بيته إلى بيت زميله أحمد، ثُمَّ سارَ مسافةَ ثُلُثَي كيلو متراً إضافية حتّى وصل بيت عمته، ثُمَّ عادَ إلى بيته من الطّريق نفسه،

فإنَّ: المسافة التي قطعها عليّ في الذهاب = _____ + _____ = _____ كم.

المسافة التي قطعها عليّ في العودة = _____ + _____ = _____ كم.

ماذا تلاحظ؟

نشـاط (٤): يوضِّـح الجـدول الآتـي بعـض خـواصّ عمليّـة الجمـع علـى الأعـداد الحقيقيّة، فإذا كان أ ، ب، جـ أعداد حقيقيّة، أَكْتُبُ مثالاً عدديّاً يوضِّح كلّ خاصيّة مـن الخـواصّ المذكـورة أدنـاه:

خواصّ عمليّة الجمع على الأعداد الحقيقيّة		
الخاصيّة	بالرّموز	بمثال عدديّ
الانغلاق	أ + ب ∈ ح	٤ ∈ ح ، $\frac{١}{٣}$ ∈ ح ٤ + $\frac{١}{٣}$ = $٤\frac{١}{٣}$ ∈ ح
التبديليّة	أ + ب = ب + أ	
التجميعيّة	أ + ب + جـ = (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)	
العنصر المحايد	أ + ٠ = ٠ + أ = أ	
النّظير الجمعيّ	أ + - أ = - أ + أ = ٠	

نشاط (٥): أَجِدُ ناتج $\sqrt{١٠} - \sqrt{١٦} + \sqrt{٤٠}$ بأبسط صورة:

$\sqrt{١٠} - \sqrt{١٦} + \sqrt{٤٠}$ = $\sqrt{١٠}$ − _____ + _____

= _____

نشاط (٦): أَجِدُ قيمة س: س + $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٥٠}$

س + $\sqrt{٢}$ − $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٥٠}$ − $\sqrt{٢}$ (لماذا؟)

ومنها: س + ٠ = _____ (لماذا؟)

س = _____

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي، وأَكْتُبُه بأبسط صورة:

أ) $١,\overline{٩١} + (-٠,٢)$

ب) $\sqrt[٣]{١٢٥} - ١١$

جـ) $\sqrt{٣٦}\,(\sqrt{٣} + \sqrt{١٢})$

د) $(\sqrt{٧٥} + \sqrt{٦٣}) - \sqrt{٢٨}$

٢ أذكرُ الخاصيّة المستخدمة فيما يأتي:

أ) $\sqrt[٣]{٤} + ٠ = \sqrt[٣]{٤}$

ب) $\frac{٥١}{١٧} + (-٣) = ٠$

جـ) $ح \ni ٤ + \pi$

٣ **أُفكّر**: أوضِّح بأمثلة عدديّة ما يأتي:

أ) مجموعة الأعداد غير النسبيّة غير مغلقة على عمليّة الجمع.

ب) مجموعة الأعداد غير النسبيّة غير مغلقة على عمليّة الطرح.

جـ) مجموعة الأعداد الحقيقيّة مغلقة على عمليّة الطرح.

٤ تتأثر سرعة الصّوت بدرجة حرارة الجوّ، وتستخدم المعادلة $ع = ٢٠\sqrt{س + ٢٧٣}$ لإيجاد سرعة الصّوت (ع) متراً/ ثانية، بالاعتماد على درجة الحرارة السّلسيوسيّة (س). أَجِدُ سرعة الصّوت في الحالات الآتية، وأقارن بين السرعتين:

أ) ٣٧ ° سلسيوس

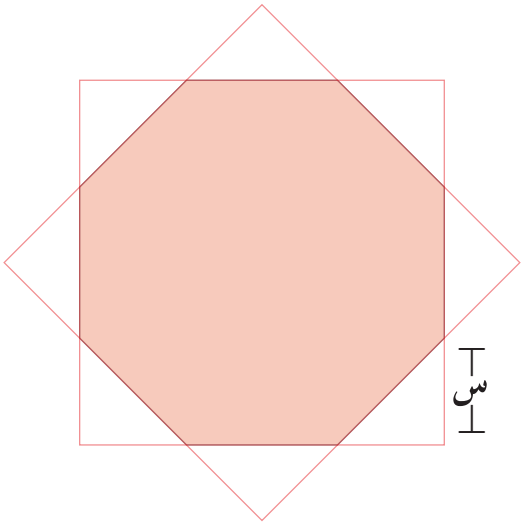
ب) -٥٠ ° سلسيوس

٥ أَحُلُّ المعادلتين الآتيتين:

أ) $\sqrt{س - ٨} = \sqrt{٢}$

ب) $-١ + س = ٢س - \pi$

نشاط (١): استُخْدِمت المربّعات المتطابقة والمثمّنات في تخطيط قاعدة مسجد قبة الصخرة، إذا كان طول ضِلْع المثمّن (ضِلْع مسجد قبة الصخرة المشرفة) يساوي تقريباً ٢١,٦ متراً، فإنَّ:



محيط قاعدة مسجد قبة الصخرة: _____

هل يمكن إيجاد س؟

نشاط (٢): أَجِدُ ناتج $\sqrt{٢٥٠٧} \times \sqrt{٩٠٧}$

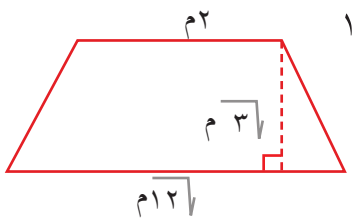
$\sqrt{٢٥٠٧} \times \sqrt{٩٠٧} = \sqrt{١٠٧٥} \times$ _____

= _____

نشاط (٣): أُكْمِلُ الجدول الآتي بكتابة اسم الخاصيّة، علماً أنّ أ، ب، جـ أعداد حقيقيّة:

خواصّ عمليّة الضّرْب على الأعداد الحقيقيّة		
الخاصيّة	بالرّموز	بمثال عدديّ
الانغلاق	أ × ب ∈ ح	٢ ∈ ح ، $\sqrt{٩}^{٣}$ ∈ ح $\sqrt{٩}^{٣}$ × ٢ ∈ ح
	أ × ب = ب × أ	$\sqrt{١٨}$ × ٤ = ٤ × $\sqrt{١٨}$
	أ × ب × جـ = (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)	٢ × $\frac{٣}{٤}$ × -٥ = (٢ × $\frac{٣}{٤}$) × -٥ = ٢ × ($\frac{٣}{٤}$ × -٥)
العنصر المحايد	أ × ١ = ١ × أ = أ	٢,٣ × ١ = ١ × ٢,٣ = ٢,٣
	$\frac{أ}{ب}$ × $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{ب}{ب}$ × $\frac{أ}{أ}$ = ١ أ ، ب ≠ ٠.	$\sqrt{٧}$ × $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ × $\sqrt{٧}$ = ١
	أ × (ب ± جـ) = (أ × ب) ± (أ × جـ)	($\sqrt{٧}$ + ٢) × $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ = ($\sqrt{٧}$ × $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$) + (٢ × $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$)

نشاط (٤): ما مِساحة شبه المنحرف في الشَّكْل المجاور؟١



مِساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣}$ × (٢ + $\sqrt{١٢}$) (لماذا؟)

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × (٢ + $\sqrt{١٢}$)

= ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢) + ($\sqrt{١٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) (خاصيّة _____)

= _____ متراً مربّعاً.

نشاط (٥): أُكْمِلُ لإيجاد النّاتج بأبسط صورة:

١) $\sqrt{١٨} \div \sqrt{٢} =$ _____ $= \sqrt{٢} \div$ _____ $= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ = _____

٢) $\sqrt{٢} \div \sqrt{١٨} =$ _____

هل $\sqrt{١٨} \div \sqrt{٢} = \sqrt{٢} \div \sqrt{١٨}$ ؟ _____

ماذا تلاحظ؟

أفكر وأناقش هل عمليّة القسمة عمليّة تجميعيّة على ح ؟ أوضّح بأمثلة عدديّة.

نشاط (٦): أُكْمِلُ ما يأتي:

١) $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٨} = \sqrt{٣٦} = ٦$

٢) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} =$ _____ = _____

٣) $(٨ - \sqrt{٥})(٨ + \sqrt{٥}) =$ _____ = _____

هل يوجد جذور صماء في النّاتج؟ _____

نشاط (٧): أوجدَتْ زينبُ وسميّةُ ناتج $\frac{١٨}{\sqrt{٣}\sqrt{٣}}$ ، فكان كما يأتي:

زينب	سميّة
$\frac{١٨}{\sqrt{٣}\sqrt{٣}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}}$	$\frac{١٨}{\sqrt{٣}\sqrt{٣}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}}$
$= \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}\sqrt{٦}}{٣} = \sqrt{٣}\sqrt{٢}$	

هل الإجابتان متساويتان؟ _____ ، ما الفرق بين الحلّين؟ _____

أَتَعَلَّمُ : عملية التخلّص من الجذور الصّمّاء في مقام عدد حقيقي يُسَمّى إنطاق المقام.

نشاط (٨): أُكْمِلُ كتابة المقدارين الآتيين بأبسط صورة:

١) $\frac{١٥}{\sqrt{٦}} = \frac{١٥}{\sqrt{٦}} \times \frac{\sqrt{٦}}{\square} =$ _____ .

٢) $\frac{١}{\sqrt{٧}-٢} = \frac{١}{\sqrt{٧}-٢} \times \frac{\sqrt{٧}+٢}{\sqrt{٧}+٢} =$ _____ .

ملاحظة: العددان $\sqrt{٧}+٢$ ، $\sqrt{٧}-٢$ عددان مترافقان.

نشاط (٩): أَجِدُ قيمة س في المعادلة $\sqrt{٣}$ س + ٥ = ٢س

$\sqrt{٣}$ س − ٢س = $\sqrt{٣}$ س + ٥ (لماذا؟)

_____ = _____ + ٥

س(٢ − $\sqrt{٣}$) = ٥

$$س = \frac{٥}{٢ - \sqrt{٣}}$$

س = _____

ومنها: س = ١٠ + ٥$\sqrt{٣}$

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي بأبسط صورة.

أ) $\sqrt{٢} - \sqrt{٨}$

ب) $\sqrt{٠,٠٤} - \times ١٢,٥$

جـ) $\sqrt{\frac{١٤٤}{٣٦}} \times \sqrt{\frac{١}{٣٦}}$

د) $\sqrt{٥٤}^{٣} \times \frac{٦}{١٥} \times ٢٠$

هـ) $\sqrt{٢}\,(\sqrt{٣} + \sqrt{٤٨})$

و) $(٢ - \sqrt{٣})(٢ + \sqrt{٣})$

٢ أَكْتُبُ المقادير الآتية بأبسط صورة:

أ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) $\frac{١ + \sqrt{٢}}{٤ + \sqrt{٢}}$

جـ) $\frac{\sqrt{٢} - \sqrt{١٤}}{\sqrt{٢} + \sqrt{١٤}}$

٣ ما اسم الخاصيّة المستخدمة فيما يأتي:

أ) $\pi \times ٢ \times ٧ = \pi \times ٧ \times ٢$

ب) $٣,٤^{-} \times ١ = ٣,٤^{-}$

جـ) $\sqrt{٩٠٠} \times \frac{١}{٣٠} = ١$

٤ أَحسِبُ ناتج $\sqrt{٣}\,٢\,(٣\sqrt{١٢} + \sqrt{٣}\,٢)$ بطريقتين مختلفتين.

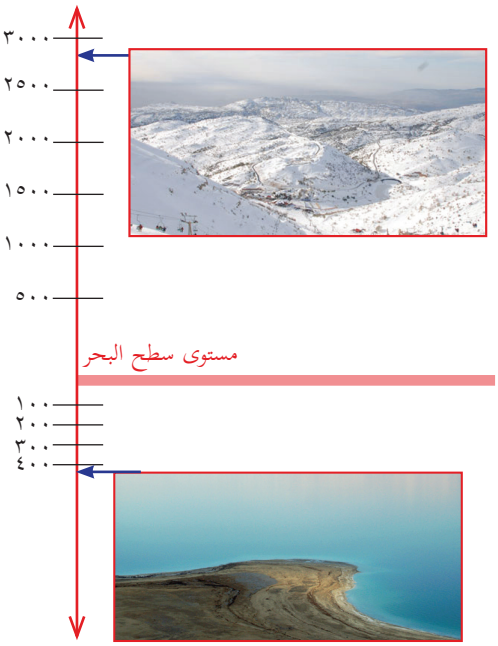
٥ أَحُلُّ المعادلتين الآتيتين:

أ) $\sqrt{٢}\,س - \sqrt{٢} = ٢$

ب) $\frac{١}{٢}\,س = س + ٠,٣ - ٣$

(١-٤) القيمة المطلقة

نشاط (١): جبل الشّيخ يقع في سوريا ولبنان، القسم الجنوبي الغربي منه تحت سيطرة الاحتلال الإسرائيليّ، ضمن هضبة الجولان السوريّة، وجزء منه مع سوريا ضمن مرتفعات الجولان الّتي تمّ تحريرها، أعلى قممه ترتفع ٢٨١٤م عن مستوى سطح البحر، ويقع البحر الميّت بين الأردن وفِلَسطين، وينخفض ٤٢٠م تقريباً عن مستوى سطح البحر.



أُعَبِّرُ عن ارتفاع جبل الشيخ بعدد حقيقيّ: _____

|٢٨١٤| = _____

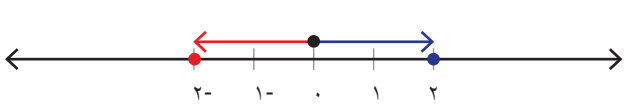
أُعَبِّرُ عن انخفاض البحر الميّت بعدد حقيقيّ: _____

|-٤٢٠| = _____

أتذكر

عدد الوَحَدات الّتي يبعدها العدد الحقيقيّ أ عن الصفر على خطّ الأعداد تُسَمّى القيمة المطلقة للعدد الحقيقيّ أ، ويُرْمَزُ لها بالرمز | أ |.

نشاط (٢): أُلاحظ التَّمثيل على خطّ الأعداد



|٢| = _____

|-٢| = _____

ومنها: |٢| = |-٢| = _____

تعريف: إذا كان أ ∈ ح فإنَّ $|أ| = \begin{cases} أ & ، أ \geq 0 \\ -أ & ، أ < 0 \end{cases}$

مِثال: أَجِدُ $|1 - \sqrt{2}|$ ؟

الحل:

$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ (لماذا؟)

نشاط (٣): أكمل ما يأتي:

١) $\sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = 3$

٢) $|-3| =$ _____

٣) $\sqrt{(7)^2} =$ _____

٤) $|7| =$ _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم: إذا كان س عدداً حقيقيّاً، فإنَّ $\sqrt{س^2} = |س|$

مِثال: أَجِدُ قيمة /قيم س الّتي تحقّق المعادلة $س^2 = 6$، باستخدام تعريف القيمة المطلقة:

الحل:

$س^2 = 6$

$\sqrt{س^2} = \sqrt{6}$

$|س| = \sqrt{6}$ (لماذا؟)

ومنها: $س = \pm \sqrt{6}$

هل هناك طريقة أُخرى لحلّ هذه المعادلة؟

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ قيمة ما يأتي:

أ) $|-٥|$ ب) $|٠|$

جـ) $|١,\overline{٦}|$ د) $|٤ - ٨٧|$

هـ) $|٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٢}|$ و) $|٢\frac{\pi}{٢}|$

٢ أيهما أكبر $-\frac{١}{٤}|أ|$ أم $\frac{١}{٤}|-أ|$، حيثُ أ عدد حقيقيّ؟ ولماذا؟

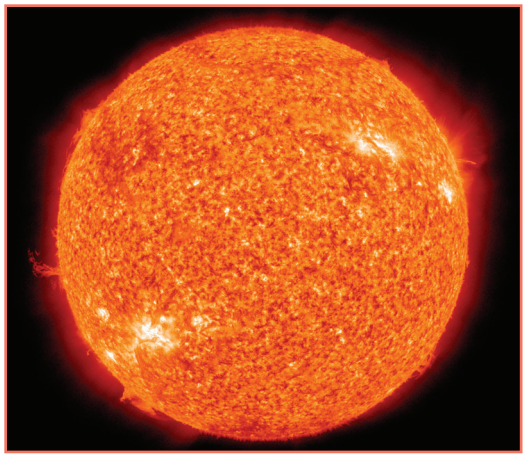
٣ أَجِدُ قيم س الّتي تحقّق كلّاً من المعادلات الآتية باستخدام تعريف القيمة المطلقة:

أ) $س^{٢} = ٣$ ب) $(س+٧)^{٢} = ٢٠$

٤ أعطِ أمثلة عدديّة تبين خطأ العبارة: « إذا كان أ ، ب عددَيْنِ حقيقيّين وكان $|أ| > |ب|$، فإنَّ $أ > ب$ ».

(١-٥) الأُسس وقوانينها (١)

نشاط (١): تمتازُ فِلَسطين بأنّ معظمَ أيّام السّنة مشمسة، وتسعى الحكومة الفِلَسطينيّة لترشيد استهلاك الكهرباء، واستغلال الطّاقة الشّمسيّة، وتشجّع المواطنين على استخدام الخلايا الشّمسيّة لتوليد الكهرباء، فكمية الطّاقة الّتي تُطلِقها الشّمس تُفْقَد معظمُها في طريقها إلى الأرض، ومع ذلك يصل الأرض في الثّانية الواحدة ما قيمته ٢٢٠٠٠٠٠٠٠٠ (٢٢ بليون) كيلو واط/ ساعة من الطّاقة.



يمكن كتابة العدد ٢٢٠٠٠٠٠٠٠٠ على الصّورة ٢٢ × ١٠^٩، باستخدام الأُسس، فالجزء ١٠^٩ مكتوب باستخدام الأُسس، حيث يُسَمّى العدد ١٠ الأساس، والعدد ٩ الأُسّ، باستخدام الأُسس، أَكْتُبُ العدد ٢٢٠٠٠٠٠٠٠٠ بطريقة أُخرى: _____

نشاط (٢): أُحَلِّلُ الأعداد ٦٤ ، ٥٠٠ إلى عواملها الأولية:

٦٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ( )^٦

٥٠٠ = _____

= _____

تعريف: إذا كان أ عدداً حقيقيّاً، فإنّ أ^ن = أ × أ × أ × ... × أ (ن مرة)، حيث أ هي الأساس، ن الأُسّ.

نشاط (٣): أ) أَكْتُبُ ما يأتي باستخدام الأُسس:

١) ٨ × ٨ × ٨ × ٨ = ٨^٤

٢) ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ = _____

٣) -٧ × -٧ × -٧ × -٧ = _____

نشاط (٤): أَجِدُ قيمة:

١. أ) $٣^{٤} \times ٣^{٢} = ٨١ \times ٩$

$= _____$

ب) $٣^{٦} = _____$

$= _____$

٢. أ) $٤^{٢} \times ٤^{٣} = ١٦ \times ٦٤ = _____$

ب) $٤^{٥} = _____$

$= _____$

ما العلاقة بين $٣^{٤} \times ٣^{٢}$ ، $٣^{٦}$ ؟ _____

ما العلاقة بين $٤^{٢} \times ٤^{٣}$ ، $٤^{٥}$ ؟ _____

أَتَعَلَّمُ : إذا كان $أ$ عدداً حقيقيّاً، وكان م ، ن عددَيْنِ صحيحَيْنِ موجبَيْن،
فإنَّ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$.

نشاط (٥): أَجِدُ قيمة ما يأتي:

١) $\frac{٧^{٣}}{٧^{١}} = \frac{٧ \times ٧ \times \cancel{٧}}{\cancel{٧}} = ٤٩$ ، $٧^{٢} = _____$

٢) $٢^{٥} \div ٢^{٢} = _____$ ، $٢^{٣} = _____$

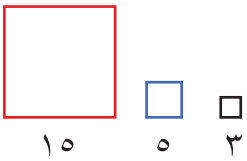
ماذا تلاحظ؟

أتعلّم : إذا كان أ عدداً حقيقيّاً، وكان م ، ن عددَيْنِ صحيحيْنِ موجبَيْنِ،

فإنّ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ ، حيثُ أ ≠ ٠.

نشاط (٦): ١) أجِدُ $(٣ \times ٢)^{٤}$ = _____ ، $٣^{٤} \times ٢^{٤}$ = _____

٢) ما العَلاقة بين مِساحة مربّع طول ضِلْعه ١٥ وحدة، وبين حاصل ضرب مِساحَتَي مربّعيْن، طول ضِلْع الأول ٣ وحدات، وطول ضِلْع الثّاني ٥ وحدات؟



مِساحة المربّع الكبير= _____

مِساحة المربّع الأزرق= _____

مِساحة المربّع الأسود= _____

حاصل ضرب مِساحَتَي المربّعين الأسود والأزرق = _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم : إذا كان أ ، ب عددَيْنِ حقيقيَّيْن، وكان ن عدداً صحيحاً موجباً،

فإنّ $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

نشاط (٧): أوجدَ حسام وعمرو ناتج $\left(\frac{٦}{٢}\right)^{٣}$ ، فكان كما يأتي:

حسام	عمرو
$\left(\frac{٦}{٢}\right)^{٣} = ٣^{٣} = ٢٧$	$\frac{٦^{٣}}{٢^{٣}} = \frac{٦ \times ٦ \times ٦}{٢ \times ٢ \times ٢}$
	$= ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$

ماذا تلاحظ ؟

أَتَعَلَّمُ : إذا كان أ ، ب عددَيْنِ حقيقيّيْن، وكان ن عدداً صحيحاً موجباً،

فإنَّ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ ، حيث ب ≠ ٠.

نشاط (٨): أُكْمِلُ كتابة ما يأتي بأبسط صورة:

أ) $(-٣)^{٢} + ١٥ \times ٤ = ٩ + ٦٠$

$= _____$

ب) $\frac{(٢ \times ٣)^{٣}}{(٣ \times ٤)^{٢}} = _____$

جـ) $\left(\frac{\sqrt{٥٠}}{٥}\right)^{٣} - ٥ = _____$

د) $(٢ - \sqrt{٥٠})^{٨} (٢ + \sqrt{٥٠})^{٨} = _____$

تعريف: إذا كان أ عدداً حقيقيّاً، حيث أ ≠ ٠ ، فإنَّ $أ^{٠} = ١$.

نشاط (٩): أَجِدُ $\frac{٢^{٣}}{٢^{٣}}$ بطريقتين:

الطريقة الأولى: $\frac{٢^{٣}}{٢^{٣}} = ١$ (لماذا؟)

الطريقة الثانية: $\frac{٢^{٣}}{٢^{٣}} = _____$

$= ٢^{٠}$

ومنها $٢^{٠} = _____$

تمارينُ ومسائِل

١ العدد جوجُل (Googol): هو العدد الذي يُكْتَب على صورة ١ وعلى يمينه ١٠٠ صفر، أَكْتُبُ هذا العدد باستخدام الأُسس.

٢ أَكْتُبُ ما يأتي على صورة أسٍّ واحد:

أ) $٦^{١٠} \times ٦^{٨}$

ب) $(-٣,١)^{٤} \times (-٣,١)^{٩}$

جـ) $\frac{(٧٦)^{١١}}{(٧٦)^{٥}}$

٣ أَجِدُ ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

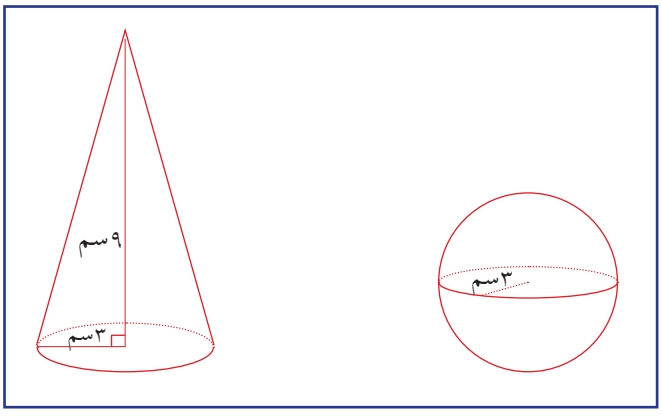
أ) $(\sqrt{٣} \times \sqrt{٢٧})^{٣}$

ب) $٢(٨ \times ٨) + ٨^{٠}$

جـ) $(-٧)^{٤} - (\sqrt{٣})^{٤}$

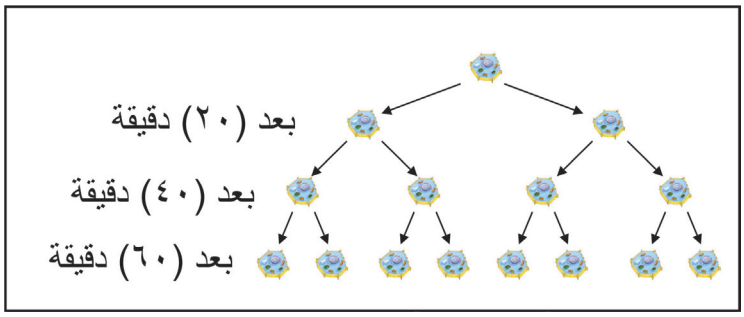
د) $\left(\frac{\sqrt{٨}}{٣}\right)^{٣}$

٤ أَجِدُ الفرق بين حجم مخروط، نصف قُطْرِ قاعدته ٣ سم، وارتفاعه ٩ سم، وحجم كرة، نصف قطرها ٣سم (أَعتبرُ أنَّ $\pi = ٣,١٤$). علماً بأن حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}$ نق^{٣} π



(٦-١) الأُسس وقوانينها (٢)

نشاط(١): تحذّر وزارة الصّحّة الفِلَسطينيّة من انتشار الأمراض البكتيريّة، مثل مرض الحمّى المالطيّة؛ كونه مرضاً بكتيريّاً من الأمراض المشتركة بين الحيوان والإنسان، فهو يصيب الإنسان بعد انتقال الجرثومة له من الحيوان، فتناوُل الحليب ومشتقّاته دونَ غليه جيداً قد يؤدي إلى إصابة الإنسان بهذا المرض.



(مخطط يُظْهِرُ كيفيّة تضاعُف أحدى خلايا البكتيريا)

أُكْمِلُ الجدول الآتي:

الزّمن (ساعة)	٠	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$	١	$١\frac{١}{٣}$	$١\frac{٢}{٣}$	٢
الانقسام	٠	١	٢	٣	٤	٥	___
عدد خلايا البكتيريا	١	٢	٤	٨	١٦	___	___
عدد خلايا البكتيريا (باستخدام الأُسس)	$٢^{٠}$	$٢^{١}$	$٢^{٢}$	$\square_{٢}$	___	___	___

عدد خلايا البكتيريا بعد الانقسام الثّاني = ٤ = $\square_{٢}$

عدد خلايا البكتيريا بعد ٢ ساعة = ____ = $\square_{٢}$ ، أُلاحظُ أنّه يمكن التّعبير عن عدد البكتيريا بعد الانقسام ٨، باستخدام الأُسس على الصّورة: $٢^{\square}$.

أناقش العلاقة بين عدد البكتيريا بعد ساعتين $٢^{٦}$، وعددها بعد ساعة $٢^{٣}$.

نشاط (٢): كَلّفَ المعلمُ محموداً وصُهيباً إيجاد قيم المقدارين $\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right)^{٣}$ ، $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$:

محمود	صهيب
$\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right)^{٣} = \left(\frac{١}{٤}\right)^{٣} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}$	$\left(\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right)^{٣} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$
$= \frac{١}{٦٤}$	$= \frac{١}{٦٤}$

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم : إذا كان أ عدداً حقيقيّاً، أ ≠ ٠ ، وكان م، ن عددَيْنِ صحيحَيْن،

فإنَّ $(أ^{ن})^{م} = أ^{ن \times م}$

نشاط (٣): أَجِدُ ناتج ما يأتي:

١) $(٢^{٣})^{٢} = (٢)^{٦} =$ _____

٢) $((\sqrt{٢})^{٢})^{٣} =$ _____

نشاط (٤): أُكْمِلُ النَّمط في كلٍّ ممّا يأتي:

١) $١٠^{٣}$ ، $١٠^{٢}$ ، $١٠^{١}$ ، $١٠^{٠}$ ، $١٠^{-١}$ ، $١٠^{-٢}$ ، ....

٢) ١٠٠٠، ١٠٠ ، ١٠ ، ١ ، $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{١}{١٠٠}$ ، ...

ماذا تلاحظ؟، وما قيمة $١٠^{-١}$ ، $١٠^{-٢}$ ، $١٠^{-٣}$ ؟

أتعلّم : إذا كان أ عدداً حقيقيّاً، أ ≠ ٠، وكان ن عدداً صحيحاً موجباً،

فإنَّ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$.

نشاط (٥): أ) أُكْمِلُ إيجاد $(٣)^{-٢}$ = _____

ب) إذا كان ل = $\sqrt{٢}$ ، م = ٣، أَجِدُ:

$\frac{ل^{-٥}}{م^{-٢}} = \frac{م^{٢}}{ل^{٥}}$ = _____

نشاط (٦): أيٌّ من الجمل الآتية صحيحة، وأيُّها خاطئة، مع التّوضيح؟

(١) $٨^{-١} = (-٨)^{١}$: خاطئة؛ لأنّ $\frac{١}{٨}$ لا يساوي -٨.

(٢) $٢^{١} \times ٢^{-١} = ٢^{٠}$: _____

(٣) $(-٢)^{-١} = ٢$: _____

أتعلّم: إذا كان أ عدداً حقيقيّاً موجباً، وكان $أ^{س} = أ^{ص}$، فإنّ س = ص، أ ≠ ١

نشاط (٧): أَحُلُّ المعادلات الآتية:

١) $٢^{س} = ٥١٢$

$٢^{س} = ٢^{٩}$ (لماذا ؟)

بما أنّ الأساسات متساوية، فإنّ الأُسس متساوية.

ومنها: س = _____

٢) $\frac{٣^{س}}{٩^{-س}} = (س)^{٠} \times ٨١$ حيث س≠٠.

$٣^{س} \times$ __ = ٨١

= _____

= _____

أَتَعَلَّم : قوانين الأُسس السّابقة صحيحة للقوى الكسرية.

نشاط (٨): ١) أَجِدُ $٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٥^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}$

$= _____$

٢) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥ \times ٥} = _____$.

٣) $٥^{\frac{٣}{٢}} \times ٥^{\frac{٣}{٢}} = ٥^{\square} = ٥^{٣} = _____$

٤) $\sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٥ \times ٥} = _____$.

ماذا تلاحظ؟

أَتَعَلَّم : إذا كان $أ$ عدداً حقيقيّاً موجباً، وكان م ، $ن$ عددَيْنِ صحيحيْنِ موجبيْن،
فإنَّ $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ ، $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$ ، يُسَمّى $ن$ دليل الجذر.

نشاط (٩): أَجِدُ ناتج ما يأتي:

١) $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = _____$

٢) $(٦٤)^{\frac{١}{٦}} = _____$

الصّورة العلميّة لكتابة الأعداد:

عندما نتعامل مع أعداد كبيرة جداً، أو أعداد صغيرة جداً، وخصوصاً في العلوم، فإنَّه يمكن كتابتها بطريقة تسهّل علينا إجراء عمليات حسابية على هذه الأعداد، وذلك بكتابتها بالصّورة العلميّة.

يبلغ حجم الأرض تقريباً ٢٥٩٠٠٠٠٠٠٠٠ ميلاً مكعّباً، فيكون حجم الأرض $٢,٥٩ \times ١٠^{١١}$ ميلاً مكعّباً *، وهذه الصّورة تُسَمّى الصّورة العلميّة.

* الميل: ١٦٠٩,٣ متراً

أتعلّم : يكون العدد أ × ١٠ ^ ب على الصّورة العلميّة، إذا كان أ عدداً حقيقيّاً أكبر من أو يساوي ١، وأقلّ من ١٠، ب عدد صحيح.

نشاط (١٠):

١) تنمو أظافر الانسان بمعدل ٠,٠١٢٣ سم تقريباً كل يوم. أَكْتُبُ هذا العدد على الصّورة العلميّة:

٠,١٢٣ = ١,٢٣ × ١٠ □ .

٢) يبعد القمر عن الأرض ٣٨٠٠٠٠ كيلو متراً تقريباً. أَكْتُبُ بعد القمر عن الأرض بالصّورة العلميّة:

٣٨٠٠٠٠ = _____ .

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ ما يأتي بأبسط صورة:

أ) $\frac{(١٢٣)^{٦}}{(١٢٣)^{٥}}$

ب) $٥^{-١}$

جـ) $(٣^{-٢})^{-٣}$

د) $(-١٢٨)^{\frac{١}{٧}}$

هـ) $((١ - \sqrt{٣})^{٢})^{٢}$

و) $(٩^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

٢ أَكْتُبُ المقادير الآتية بأبسط صورة:

أ) $(٣ س^{٢} ص^{٣})^{٤}$

ب) $\frac{(٣م^{٤})^{٢}}{م^{٥}}$

٣ أَكْتُبُ بالصّورة العلميّة:

أ) قطر القمر البالغ ٣٤٧٦٠٠٠م تقريباً.

ب) $١٠^{-٣٩} - ١٠^{٣٧}$

٤ أَجِدُ قيمة س فيما يأتي:

أ) $٣^{س} = ٨١$

ب) $\frac{٥^{س^{٢}}}{٥^{س}} = ١٢٥$

(١ - ٧) اللّوغاريتمات

نشاط (١): أعلنت مؤسّسة القدس للثقافة والتراث أنّ وزارة السياحة والآثار الفِلَسطينيّة تمكّنت من الكشف عن أحد أقدم القبور الأثريّة في بيت لحم، وتبيّن أنّ القبر المُكتشف يعود إلى العصر البرونزيّ المبكر (٢٢٠٠ - ١٩٠٠) قبل الميلاد. وقد تبيّن أنّه يمكن استخدام اللّوغاريتمات في الكشف عن هذه الآثار.

باستخدام العلاقة ص = ١٠^س، أُكْمِلُ الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣	٧	١٠
ص			١٠٠			

١) لكل زيادة وحدة في س، أَصِفُ الزّيادة المناظرة في ص.

٢) أَصِفُ الزّيادة في ص، إذا كانت س تتزايد:

أ) بمقدار ١,٥ ب) بمقدار ٣,٥ **(يمكن استخدام الآلة الحاسبة)**

أيُّهما أسهل، إيجاد قيم ص عندما تكون س أعداداً صحيحة أم أعداداً عشرية؟

تعريف: إذا كان ص = أ^س ، حيث ص، أ ∈ ح^+ ، أ ≠ ١، نسمي س لوغاريتم العدد ص للأساس أ، ويُعَبَّر عنه رياضيّاً: لو_أ (ص) = س (الصّورة اللّوغاريتميّة)، ويُقرأ لوغاريتم ص للأساس أ يساوي س. المثال الآتي يوضّح العلاقة بين الصّورة الأُسّيَّة، والصّورة اللّوغاريتميّة:

نشاط (٢): أُكْمِلُ الجدول الآتي بما يناسبه:

الصّورة الأُسّيَّة	٢^٣ = ٨		٣^-٤ = ١/٨١	٩^٠ = ١
الصّورة اللّوغاريتميّة		لو_١٠ (١٠٠٠٠) = ٤		لو_٩ ١ = ٠

نشاط (٣): أحول الآتي من الصّورة الأُسِّيَّة إلى الصّورة اللّوغاريتميّة:

أ) $٣^{١} = ٣$ ب) $٢^{١} = ٢$ جـ) $٣^{٠} = ١$

د) $٥^{٠} = ١$ هـ) $٣^{٤} = ٨١$ و) $٢^{٥} = ٣٢$

أ) لو$_{٣}$ (٣) = ١ ب) لو$_{٣}$ (٢) = _____ جـ) لو$_{٣}$ (١) = صفر

د) لو$_{٣}$(١) = _____ هـ) لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ د) لو$_{٣}$ ٣٢ = _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم: لو$_{م}$ (م) = ١، لو$_{م}$ (١) = صفر، لو$_{م}$ م^{س} = س

نشاط (٤): أَجِدُ قيمة اللّوغاريتمات الآتية:

١) لو$_{٣}$ ($٢^{٦}$) = ٦.

٢) لو$_{٣}$ ($\sqrt{٧}$) = _____.

٣) لو$_{٣}$ ($\frac{١}{٩}$) = _____.

نشاط (٥): بالاستعانة بالجدول الآتي، أُكْمِلُ ما يأتي:

س	٢	٤	٨	١٦	٣٢
لو$_{٢}$ (س)	١	٢	٣	٤	٥
لو$_{٤}$(س)	$\frac{١}{٢}$	١	$\frac{٣}{٢}$	٢	$\frac{٥}{٢}$

(١) لو$_{٢}$ (٢ × ٤) = لو$_{٢}$ (٨) = ٣ ، لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٤) = ١ + ٢ = ٣

(٢) لو$_{٢}$ (٢ × ٨) = _____ ، لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٨) = _____

(٣) لو$_{٤}$ (٢ × ٤) = _____ ، لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٤) = _____

(٤) لو$_{٤}$ (٢ × ٨) = _____ ، لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٨) = _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم : إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان ٩ عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو٩ (س × ص) = لو٩ (س) + لو٩ (ص).

نشاط (٦): بالاستعانة بالجدول الآتي، أُكْمِلُ ما يأتي:

س	٣	٩	٢٧	٨١	٢٤٣
لو٩ (س)	١	٢	٣	٤	٥

(١) لو٩ $(\frac{٨١}{٢٧})$ = لو٩ (٣) = ١ ، لو٩ (٨١) − لو٩ (٢٧) = ٤ − ٣ = ١

(٢) لو٩ $(\frac{٢٤٣}{٩})$ = _____ ، لو٩ (٢٤٣) − لو٩ (٩) = _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم : إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان ٩ عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو٩ $(\frac{س}{ص})$ = لو٩ (س) − لو٩ (ص)

نشاط (٧): قام كل من عمر وندى بإيجاد قيمة كلٍّ من: لو٩(٣×٣) ، لو٩$(٣)^{٢}$ ،كالآتي:

ندى	عمر
لو٩ (٣ × ٣) = لو٩(٣) + لو٩(٣)	لو٩$(٣)^{٢}$ = ٢ لو٩ ٣
= ١ + ١ = ٢	= ٢ × ١ = ٢

ماذا تلاحظ؟

أتعلّم : إذا كان ص عدداً حقيقيّاً موجباً، فإنَّ: لو٩ $(ص)^{م}$ = م لو٩ (ص)، بحيث م ∋ ح★.

نشاط (٨): أكتب كل ممّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

١) (لوم (٨) − لوم (ص)) = لوم (٨ / ص)

٢) (لوم (٤) + لوم (س)) − (٣ لوم (٢)) = لوم (٤س) − لو _____

= _____

نشاط (٩): إذا كان لوم (٧) = ٢,٨١ ، أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١) لوم (٢٨) ٢) لوم $(٧)^{٣}$ ٣) لوم $(٣,٥)^{٢}$

١) لوم (٢٨) = لوم (٤×٧) = لوم (٤) + لوم (٧) = ٢ + ٢,٨١ = ٤,٨١

٢) لوم $(٧)^{٣}$ = ___ × لوم (٧) = ٣ × _____ = ٨,٤٣

٣) لوم $(٣,٥)^{٢}$ = لوم ( )^{٢} = _____

= __ × (لوم ( ) − لوم ( )) = _____

نشاط (١٠) أُكْمِلُ حلّ المعادلة الآتية:

أ) $٢^{س} = ٦٤$

الطّريقة الأُسِّيَّة	الطّريقة اللّوغاريتميّة
$٢^{س} = ٦٤$	لوم (٦٤) = س
_____ = _____	لوم $(٢)^{٦}$ = _____
ومنها: س= ٦	٦لوم (٢) = س
	٦ × ١ = س، ومنها: س = ٦

ماذا تلاحظ؟

مِثال: أحل المعادلة: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = ٢

الحل: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٢}$ $\frac{س+٢}{س-١}$ = ٢

$$\frac{س+٢}{س-١} = ٢^{٢}$$

س + ٢ = ٤(س − ١)

س = ٤س − ٤ − ٢ ، ومنها: س = ٢

نشاط (١١): حُلَّ المعادلة: لو$_{١٠}$ (س) + لو$_{١٠}$ (٣) = ٢

لو$_{١٠}$ ( ) = ٢

_____ = $١٠^{٢}$

_____ = ١٠٠

س = $\frac{١٠٠}{٣}$

نشاط (١٢): طلبت معلّمة الرياضيّات من رؤى وربى إيجاد قيمة لو$_{\frac{١}{٧}}$ (٤٩) ، أيّ منهما إجابتها صحيحة، وأذكرُ السَّبب.

رؤى	ربى
لو$_{\frac{١}{٧}}$ (٤٩) = ص	لو$_{\frac{١}{٧}}$ (٤٩) = ص
$(\frac{١}{٧})^{ص}$ = ٤٩	$(\frac{١}{٧})^{ص}$ = ٤٩
$(٧^{-١})^{ص}$ = $٧^{٢}$	$(٧^{-١})^{ص}$ = $٧^{٢}$
$٧^{-ص}$ = $٧^{٢}$	$٧^{-ص}$ = $٧^{٢}$
٢ ص = −١	ص = −٢
ص = $-\frac{١}{٢}$	

تمارينُ ومسائِل

١ أحسبُ قيمة كل من:

أ لو٢ (٦٤)　　ب لو٣ (٨١)

٢ أُحوّلُ من الصّورة الأُسّيّة إلى اللّوغاريتميّة:

أ ٢^٤ = ١٦　　ب ١٠^-١ = ٠,١

٣ أُحوّلُ من الصّورة اللّوغاريتميّة إلى الصّورة الأُسّيّة:

أ لو١ ١ = ٠　　ب لو١٠ (٠,٠٠١) = -٣

٤ إذا كان لو٢ (٧) = ٢,٨١ ، لو٢ (٥) = ٢,٣٢ ، أَجِدُ قيمة ما يأتي:

أ لو٢ (٣٥)　　ب لو٢ (٧/١٠)

٥ أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ لو٢ √٣٢ + لو٢ √٢　　ب لو٣ (٨١) − لو٣ (٩)　　جـ لو٥ (٥^٢)^٣

٦ أَكْتُبُ ما يأتي بصورة لوغاريتم لمقدار واحد:

أ ٣ لو٥ (س + ٦) − (١/٣) لو٥ (٥ − س).

ب ٧لو٣ (أ) + لو٣ (ب) − ٢لو٣ (٨جـ).

٧ أَجِدُ مفكوك كلِّ لوغاريتم ممّا يأتي، حيث س، ص عددان حقيقيّان موجبان:

أ لو٣ (س/ص)^٥　　ب لو٣ (٣س^٢)

٨ أَحُلُّ المعادلاتِ الآتية:

أ لو٢ (٧س) = لو٢ (س^٢ + ١٢)　　ب لو١٠ (٥س^٢ − ٣) − لو١٠ (س^٢ + ١) = ٠

٩ لقياس مدى احتفاظ الطلبة بالمعلومات، يتم اختبارهم بعد وقت من تعلُّمها، ويمكن تقدير علامة الطالب في اختبار للرياضيّات بعد انتهاء الفصل الدراسيّ باستخدام العلاقة :

ص = س − ٦لو٢ (ت + ١)، حيث ت عدد الأشهر الّتي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسيّ، س علامة الطالب في نهاية الفصل الدراسي، إذا حصل إبراهيم على العلامة ٨٥، أجد:

أ علامة إبراهيم في نهاية الفصل الدراسيّ

ب علامة إبراهيم بعد مضيّ ٣ أشهر

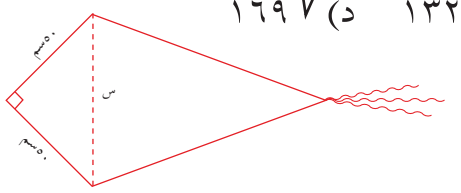
تمارين عامّة

١ أضعُ دائرة حول رمز الإجابة الصَّحيحة:

١ ما العدد الحقيقيّ الذي يقع بين العددَيْنِ ١١ ، ١٢ ؟

أ) $١ + \sqrt{٩٩}$ ب) $١ + \sqrt{١٢١}$ جـ) $\sqrt{١٣٢}$ د) $\sqrt{١٦٩}$

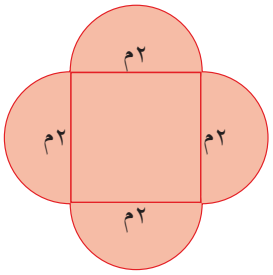
٢ ما قيمة س في الشكل المجاور ؟



أ) $٥٠\sqrt{٢}$ سم. ب) ٢٥٠ سم.

جـ) $١٠\sqrt{٢}$ سم. د) ١٠ سم.

٣ ما القيمة الّتي تُمَثِّلُ مِساحة الشَّكْل المجاور بالمترات المربّعة؟



أ) $٤(\pi ٤) + ٤$ ب) $\pi ٤ + ٤$

جـ) $\pi ٨$ د) $\pi ٢ + ٤$

٤ ما العدد المكافئ للصورة العلمية $١٠ \times ١,٣^{-٥}$ ملم التي تمثل طول الخلية؟

أ) ١٣٠٠٠٠ ملم. ب) ١٣ ملم.

جـ) ٠,٠١٣ ملم. د) ٠,٠٠٠٠١٣ ملم.

٥ ما قيمة $(س + ١)^{٠}$ ، حيث س عدد حقيقيّ، $س \neq -١$:

أ) ١ ب) س جـ) -١ د) صِفْر.

٦ ما قيمة لو$_{٥}$ ١٢٥؟

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ١ د) -٥

٢ أُحدّدُ أيّ الأعداد الحقيقيّة الآتية نسبيّ، وأيُّها غير نسبيّ؟

أ) ٢,٠٣٠٤٠٥ ب) $\sqrt{٣٦}$ جـ) $\sqrt{٢٤}$ د) $٧,٦٣٦٦٣\overline{٦٣}$

٣ أَجِدُ ناتج ما يأتي:

أ) $|-٨,٣|$ ب) $|\frac{٣}{٧}| - |٧|$ جـ) $|٥ - \sqrt{٥}|$ د) $|١٥ - ٢\sqrt{١١}|$

٤ أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

أ) $\sqrt{١٢} + ٢\sqrt{٣} + \sqrt{١٠٠}$ ب) $(٨ - \sqrt{٥})^{٤} (٨ - \sqrt{٥})^{-٤}$

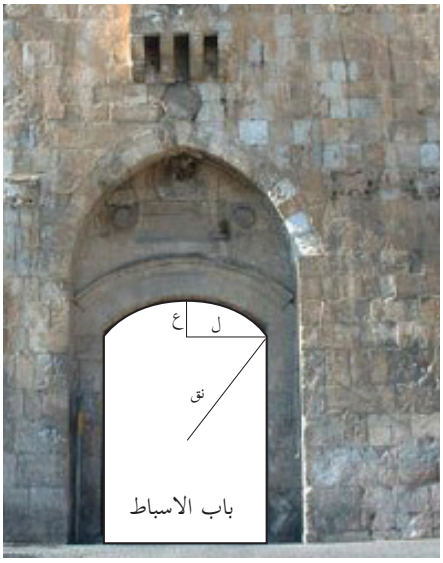
جـ) $(٤ \times ٣)^{-٢}$ د) $\frac{٩^{٩} \times ٩^{-٥}}{٩^{٧}}$

هـ) لو$_{٣}$ ٩ + لو$_{٣}$ ٢٤ ـ ٣لو$_{٣}$ ٢ و) لو$_{٤}$ $\sqrt[٣]{٦٤}$

٥ يمكن إيجاد نصف قطر(نق) الدائرة التي تحوي قوس بوابة كبيرة بالأقدام، بالاعتماد على القاعدة:

$$\text{نق} = \frac{\text{ل}^٢ + \text{ع}^٢}{٢\text{ع}}$$

أَجِدُ نق إذا علمت أن ل = ٥,٧ أقدام ، ع = ١,٦ قدماً



٦ أَجِدُ قيمة س فيما يأتي:

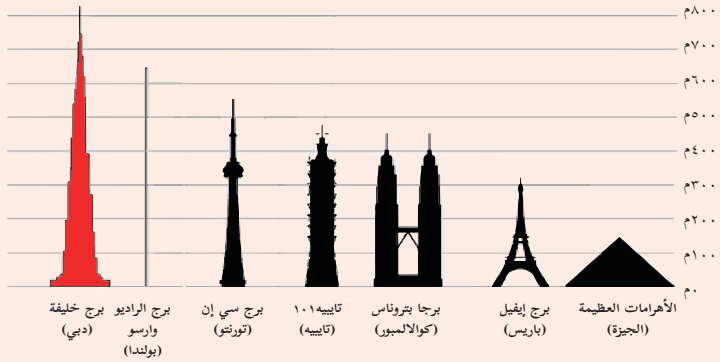
أ) $\sqrt{٥}$ س – $\sqrt{٥}$ - ٥ = ٠

ب) (س – ٢)^٢ = ١٤

جـ) لو$_{١٠}$ $\sqrt{١٠}^{٥}$ = $\frac{\text{س}}{٢}$

مشروع الوحدة:

المعادلة ف = ١,٢٣ $\sqrt{\text{ع}}$ تُمَثِّلُ المسافة (ف) بالميل* الّتي يمكن رؤيتها من قمّة بناء، ارتفاعه (ع) قدماً.



أحدّد المسافة ف الّتي يمكن رؤيتها من قمّة كلّ مَعْلَم؟

أَكْتُبُ المسافات (بالميل، وبالكيلو متر).

أرسمُ مخطّطاً تقريبيّاً لبرجٍ أحلمُ أن يُبنى في محافظتي، وأُحدّد مِساحة قاعدته، وارتفاعه، وعدد طوابقه، ثُمَّ أَجِدُ المسافةَ ف الّتي يمكن رؤيتها من قمة هذا البرج.

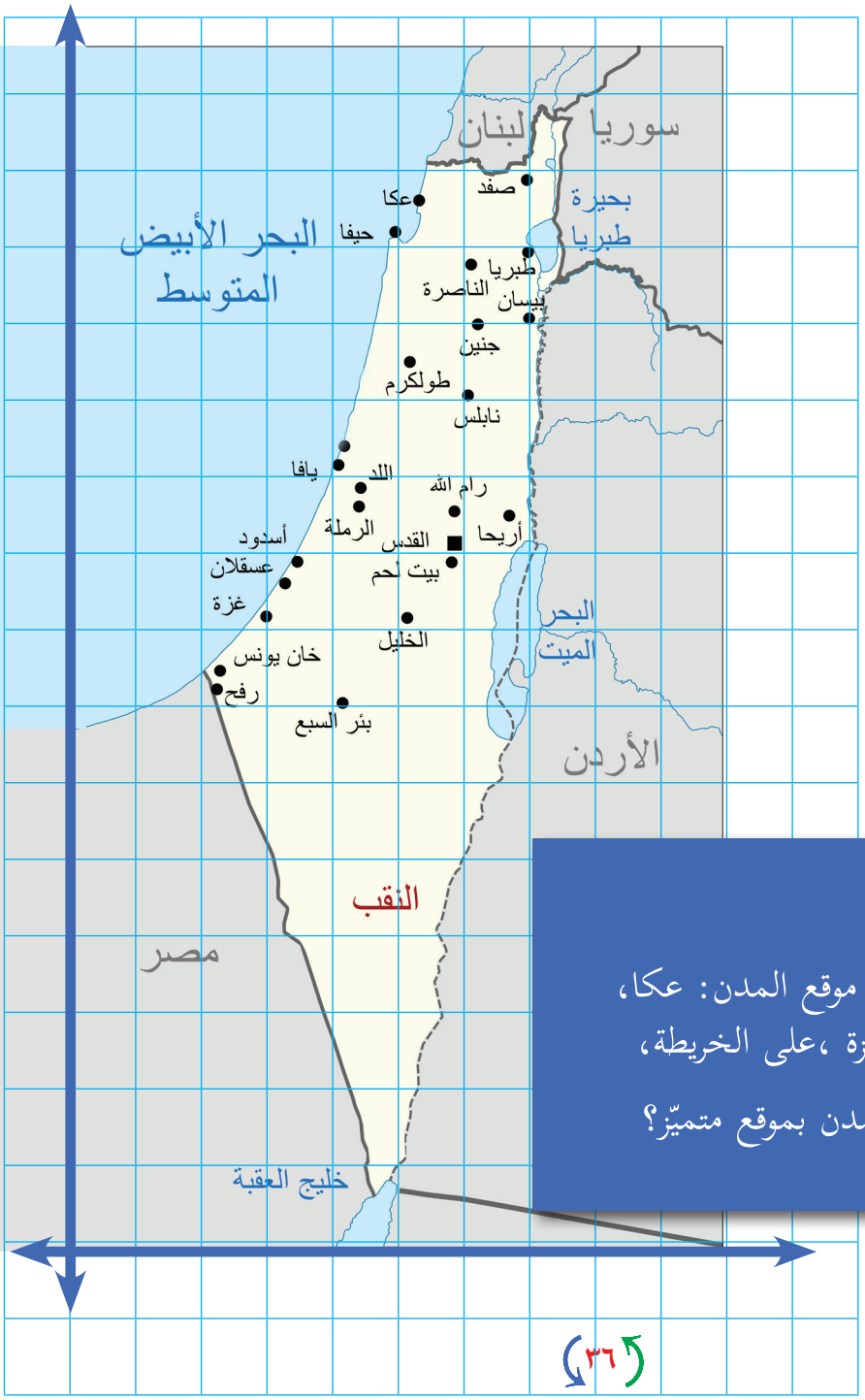
روابط وبرامج مقترحة

www.Nlvm.com
Microsoft mathematics

* ١كم = ٠,٦٢ ميل. ** ١م= ٣,٢٨ قدم

الوحدة ٢

العلاقات والاقترانات



أتأمَّلُ الصّورة:

كيف تستطيع وصف موقع المدن: عكا، وحيفا، وعسقلان، وغزة ،على الخريطة،

وهل تشترك هذه المدن بموقع متميّز؟

العلاقات والاقترانات هي مولدات للأعداد الّتي بدورها تنمّي التفكير النّقدي لطلبة قادرين على ربطها وتوظيفها في حلّ مسائلَ مرتبطةٍ بالحياة والواقع.

يُتَوَقَّعُ من الطلبة بعد الانتهاء من دراسة الوَحْدة، أن يحققوا الأهداف الآتية:

(١) إيجاد حاصل الضّرْب الدّيكارتِيّ لمجموعتَيْنِ رياضيّتَيْن.

(٢) التَّعَرُّف إلى مفهوم العلاقة الرياضيّة.

(٣) تمثيل علاقة رياضيّة بـ (مخطط سهميّ، المستوى الدّيكارتِيّ، ...).

(٤) التَّعَرُّف إلى خواصّ العلاقات: انعكاس، تماثل، تعدّي، تكافؤ.

(٥) التَّعَرُّف إلى مفهوم الاقتران.

(٦) إيجاد المجال، والمجال المقابل، والمدى لاقتران مُعطى.

(٧) التَّعَرُّف إلى أنواع الاقترانات.

(٨) إيجاد قاعدة تركيب اقترانَيْن.

(٩) إيجاد اقتران النظير (العكسي) لاقتران مُعطى.

(٢ - ١) الضّرْب الدّيكارتِيّ

نشاط (١): تشتهر بعض المدن الفِلَسطينيّة بصناعة الملابس، ويُنْتِجُ أحد المصانع تشكيلة من القمصان الّتي تتميز بألوان وقياسات مختلفة، أحد التصاميم الّتي يُنْتِجُها المصنع (٣٨، أحمر)، كما في الجدول الآتي:

القياس / اللّون	أحمر	أخضر	أصفر
٣٨	(٣٨، أحمر)	(٣٨، أخضر)	(،)
٤٠			
٤٢			

— أُكْمِلُ الجدول.

— هل الأزواج المرتّبة في الجدول تُمَثِّلُ كلّ التّصاميم؟

نشاط (٢): لتكن أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }، ب = { ٧ ، ٨ }، مجموعة جميع الأزواج المرتّبة الّتي مسقطها الأوّل ينتمي للمجموعة أ، ومسقطها الثّاني ينتمي للمجموعة ب، هي: {(٢ ، ٧) ، (٢ ، ٨) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}.

تعريف (١): لتكن أ، ب مجموعتَيْن غير خاليتين، فحاصل الضّرْب الدّيكارتِيّ للمجموعتَيْنِ أ ، ب الّذي يُرْمَزُ له بالرَّمز أ × ب، هو: مجموعة جميع الأزواج المرتّبة (س ، ص)، حيث س تنتمي للمجموعة أ، ص تنتمي للمجموعة ب،

وبالرّموز أ × ب = {(س ، ص): س ∈ أ، ص ∈ ب}

نشاط (٣): إذا كانت أ = { ١ ، ٢ ، ٣ }، ب = {٦ ، ٨}

فإنَّ أ × ب= {(١ ، ٦) ، (١ ، ٨) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٨)}.

ب × أ = {(٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}

هل أ × ب = ب × أ ؟ أفسّرُ إجابتي.

نشاط (٤): إذا كانت أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }، ب = { ٤ ، ٥ }، أُكْمِلُ:

أ × أ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}.

أ × ب = { }.

أ × (ب ∪ أ) = { }.

عدد عناصر أ × أ =

عدد عناصر أ×ب =

أتعلّم : عدد عناصر المجموعة أ × ب = عدد عناصر المجموعة أ × عدد عناصر المجموعة ب .

تعريف (٢) لتكن (س ، ص) = (ع ، ل)، فإنَّ س = ع ، ص = ل، والعكس صحيح.

نشاط (٥): إذا علمتَ أنَّ (س – ١ ، ٧) = (٩ ، ص – ١)، أَجِدُ قيمة س، ص:

س – ١ = ٩

ومنها: س = ١٠

٧ = _____

ص = _____

نشاط (٦):

إذا علمتَ أنّ (س^{٢} ، ٧) = (٤٩ ، ص + ٨)، أَجِدُ قيمة س، ص:

س^{٢} = ٤٩

س = ± $\sqrt{}$ ٤٩

= ± _____

_____ = ص + ٨

ص = _____

تمارينُ ومسائِل

١ إذا كانت أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٣ ، ٥}، أضعُ إشارة (✓) أمام العبارة الصَّحيحة، وإشارة (×) أمام العبارة الخاطئة في كلٍّ ممّا يأتي:

أ (٢ ، ٣) ∈ أ × ب _____

ب (٦ ، ٤) ∈ أ × ب _____

جـ (٤ ، ٤) ∈ أ × أ _____

د (٣ ، ٢) ∈ ب × أ _____

٢ إذا كانت أ = {١ ، ٢ ، ٣}، ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ، جـ = {-٣ ، ٤}، أَجِدُ:

أ أ × ب .

ب أ × جـ .

جـ (أ × ب) ∪ (أ × جـ).

د أ × (ب ∪ جـ).

٣ إذا كانت أ = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} ، ب = {س : س عدد طبيعي محصور بين ٤ ، ٢٣، ويقبل القسمة على ٥ دون باقٍ}، ما عدد عناصر حاصل الضّرْب الدّيكارتيّ لـ أ × ب؟

٤ أَجِدُ قيم س، ص الحقيقيّة الّتي تحقّق:

أ (س + ٣ ، ص − $\frac{١}{٢}$) = (٧ ، $\frac{٣}{٢}$).

ب (س ، ص^{٢}) = (٢س − ٢، ١).

(٢ – ٢) العلاقة

نشاط (١): تعاني بعض القرى الفِلَسطينيّة من شُحٍّ في الطّاقة الكهربائيّة، فقامت إحدى البلديّات برصد عدد المصابيح المضاءة، والطّاقة المستهلكة في أحد المنازل لمدّة ستّة أيّام؛ لأغراض دراسة الاستهلاك في الطّاقة الكهربائيّة، فكانت النتائج كما في الجدول الآتي:

عدد المصابيح (س)	٨	٦	٥	٤	٣	٢
الطّاقة المستهلكة (ص) بالكيلو واط/ ساعة	٦	٥	$٤\frac{١}{٢}$	$٣\frac{١}{٤}$	٢	$١\frac{٦}{١٠}$

يمكن التّعبير عن عدد المصابيح والطّاقة المستهلكة بأزواج مرتّبة:

{(٨ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}

تُسمّى هذه الأزواج المرتّبة علاقة بين عدد المصابيح المضاءة وكمية الطّاقة المستهلكة.

إذا كان عدد المصابيح المضاءة يساوي ٥، فما مقدار الطّاقة المستهلكة؟

أتعلّم : العَلاقة: هي أيّ مجموعة من الأزواج المرتّبة.

تُسَمّى مجموعة كلِّ المساقط الأولى للأزواج المرتّبة في العلاقة مجالَ العلاقة.

تُسَمّى مجموعة كلِّ المساقط الثّانية للأزواج المرتّبة في العلاقة مدى العلاقة.

نشاط (٢): لتكن العلاقة ع = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ١٠)}

المجال = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، المدى = { }

ألاحظُ أنَّ المسقط الثّاني يساوي ضعفَي المسقط الأوّل.

نشاط (٣): إذا كانت أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ب = { ١ ، ٢ } ، فإنَّ:

أ × ب = {(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (،) ، (،) ، (،)} ، أُكْمِلُ كتابة الأزواج المرتبة:

أ × أ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}

ع$_{١}$ = {(٢ ، ١) ، (٤ ، ١) ، (٦ ، ١)} ، ع$_{٢}$ = {(٢ ، ١) ، (٢، ٢) ، (٤ ، ١)}

ع$_{٣}$ = {(٢ ، ٢) ، (٤، ٤) ، (٤ ، ٦)}

أُلاحظُ أنَّ: ع$_{١}$ ⊆ أ × ب ، ع$_{٢}$ ___ أ × ب ، ع$_{٣}$ ⊆ ___

تعريف (٢): أيّ مجموعة جزئية من أ × ب تُسَمّى علاقة من المجموعة أ إلى المجموعة ب: (ع ⊆ أ × ب).

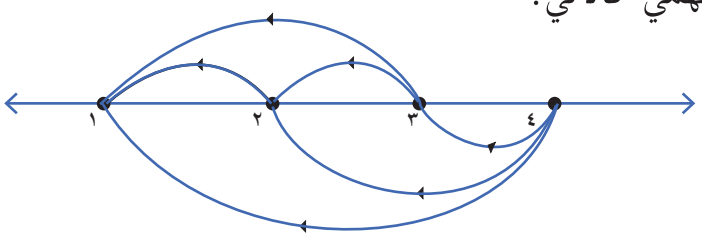
ملاحظة: إذا كانت أ = ب، فإنَّ العلاقة تُسَمّى علاقة على أ. ويمكن تمثيل العلاقة بعدّة طرق.

نشاط (٤):

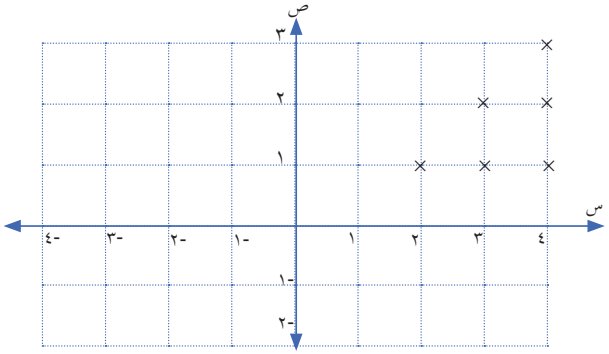
لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }، وكانت العلاقة ع معرّفة على أ كما يلي:

ع = {(س ، ص) ∈ أ × أ : س < ص } ، ع = {(٢ ، ١) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}

يمكن تمثيل العلاقة ع بمخطط سهميّ كالآتي:



كما يمكن تمثيلها بيانيّاً في المستوى الدّيكارتِيّ كما يأتي:

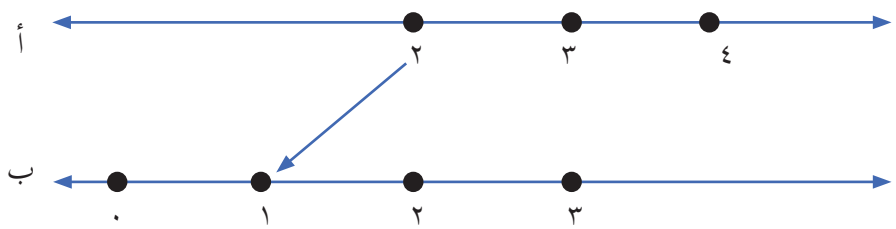


نشاط (٥): لتكن أ = {٢ ، ٣ ، ٤ } ، ب = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، وكانت العلاقة ع معرّفة من أ إلى ب: ع = {(س ، ص) ∈ أ × ب: س – ص = ١ }

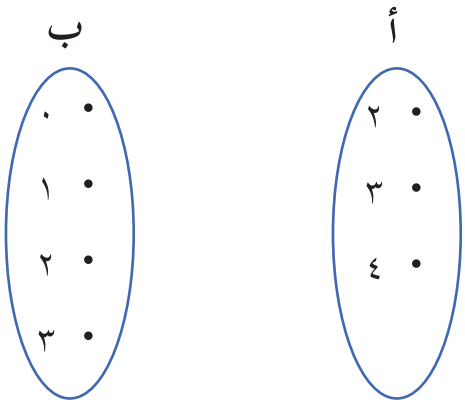
ع = {(٢ ، ١) ، (،) ، (،) ، (،)}

يمكن تمثيل العلاقة ع بالمخطّطات السهميّة:

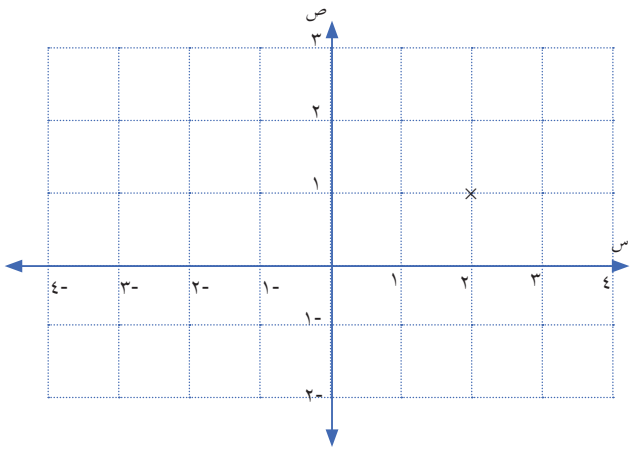
أُضيفُ الأسهم على الشَّكْل:



أُضيفُ الأسهم على الشَّكْل:



أُمَثِّلُ العلاقة بالمستوى الدّيكارتيّ:



تمارينُ ومسائِل

١ أقدّر الزّمن بالدّقائق الّتي أقضيها في دراسة الموادّ الدراسيّة في اليوم، والمبيّنة في الجدول، ثُمَّ أَكْتُبُ العلاقة ع على شكل أزواج مرتّبة، والّتي مسقطها الأوّل المادّة الدراسيّة والمسقط الثّاني الزّمن بالدّقائق، ثُمَّ أَكْتُبُ مجال هذه العلاقة ومداها.

المادّة الدراسيّة	رياضيّات	لغة عربيّة	لغة إنجليزيّة	العلوم والحياة	تربية إسلاميّة
الزّمن بالدّقائق					

٢ أ = { -١، ٠ ، ٢ }، ب = { ١ ، ٢ ، ٣}، أيّ المجموعات الآتية تُمَثِّلُ علاقة من أ إلى ب:

أ ع١ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٢)} .

ب ع٢ = {(١ ، ٠) ، (١ ، -١) ، (٣، ٢)} .

٣ أَجِدُ المجال والمدى للعلاقة الآتية:

ع = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، -٦) ، (٦ ، ٦)}

٤ لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}، وكانت العلاقة ع معرّفة على أ، بحيث:

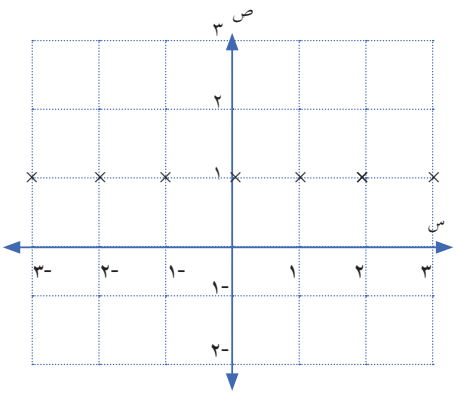
ع = {(س، ص) ∈ أ × أ: س = ص + ٣}، أَكْتُبُ ع على شكل مجموعة من الأزواج المرتّبة.

٥ لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣} ، ب = {٢ ، ٣، ٤ ، ٦، ٩}، وكانت العلاقة ع من أ إلى ب، بحيث ع = {(س ، ص) ∈ أ × ب: المسقط الأوّل يساوي $\frac{١}{٣}$ المسقط الثّاني} ، أَجِدُ:

أ العلاقة ع على شكل مجموعة من الأزواج المرتّبة .

ب أُمَثِّلُ العلاقة ع بمخطط سهميّ.

٦ مُثِّلَتِ العلاقة ع بيانيّاً في المستوى الدّيكارتِيّ، كما في الشَّكْل، أَجِدُ من الشَّكْل مجال ومدى العلاقة ع.



(٢ – ٣) خواصّ العلاقات

نشاط (١): بسبب ما يتعرّض له شعبنا من إصابات على يد الاحتلال الصّهيونيّ، تطوّرت عند المجتمع الفِلَسطينيّ ثقافة التَّبرُّع بالدّم بشكل ملحوظ، ومن المعلوم أنّ فصائل الدّم هي: O , AB , B , A ، وكلّ إنسان يحمل إحدى هذه الفصائل، ويمكن لشخصٍ ما التَّبرُّع بالدّم لشخص آخر، وَفْقَ العلاقة الآتية: (فصيلة دم المتبرَّع له، فصيلة دم المتبرِّع):

{(A ، A) ، (A ، AB) ، (B ، B) ، (B ، AB) ، (AB ، AB) ، (O ، A) ، (O ، B) ، (O ، AB) ، (O ، O)}

- لا يمكن لحامل فصيلة دم AB التَّبرُّع بالدّم لشخص فصيلة دمه O
- يمكن لحامل فصيلة دم B التَّبرُّع بالدّم لشخصٍ فصيلة دمه _____

نشاط (٢)[**]: إذا كانت أ = {١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ } ، وكانت العلاقة ع ، بحيث:

ع = { (س ، ص) ∈ أ × أ : س ⩾ ص }

العلاقة ع = {(١٥ ، ١٥)،(١٥ ، ٢٠) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،)}

(١٥ ، ١٥) ∈ ع

(٢٠ ، ٢٠) __ ع

(٢٥ ، ٢٥) __ ع

تعريف (١): علاقة الانعكاس:

تُسَمّى العلاقة ع علاقة انعكاس على أ، إذا كان (س ، س) ∈ ع لكل س ∈ أ .

[**] سنتناول في هذا الدرس العلاقات على مجموعة واحدة.

نشاط (٣): إذا كانت أ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

ع$_{١}$ = {(١ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٧)}

ع$_{١}$ ليست علاقة انعكاس؛ لأنّ (٥ ، ٥) لا ينتمي للعلاقة ع

ع$_{٢}$ = {(١ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٧) }

ع$_{٢}$ = _____

نشاط (٤): لتكن أ = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ع علاقة معرّفة على أ، حيث:

ع ={(س ، ص) ∋ أ × أ: س + ص = ٦}

ع = {(٣ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (،) ، (،) ، (،)}

(١ ، ٥) ∋ ع

(٥ ، ١) ___ ع

(٢ ، ٤) ___ ع

(٤ ، ٢) ___ ع

ماذا تلاحظ؟

تعريف(٢): علاقة التّماثُل :

العلاقة ع على أ تُسَمّى علاقة تماثل، إذا كان (س ، ص) ∋ ع ، فإنَّ (ص ، س) ∋ ع .

نشاط (٥): إذا كانت أ = {-١ ، -٢ ، ٣ ، ٥}

ع$_{١}$ = {(-١ ، -١) ، (-١ ، ٣) ، (٣ ، -١) ، (-٢ ، -٢) ، (٣ ، ٣) ، (-٢ ، ٥) ، (٥ ، -٢) ، (٥ ، ٥)}

ع$_{١}$ علاقة تماثل لانه إذا كان (س ، ص) ∋ ع$_{١}$ فإنَّ (ص ، س) ∋ ع$_{١}$

حيث (-١ ، ٣) ∋ ع$_{١}$ كذلك (٣ ، -١) ∋ ع$_{١}$ ، (-٢ ، ٥) ∋ ع$_{١}$ كذلك (٢ ، -٥) ∋ ع$_{١}$

ع$_{٢}$ = {(-١ ، -١) ، (٣ ، ٣)،(٥ ، -١) ، (٥ ، ٥)}

ع$_{٢}$ = _____

نشاط تعاونيّ: يقسّمُ المعلم الطلبة إلى مجموعات؛ لنعرفَ أيّ الطلبة الأطول فيها، ولنقارن بين الطلبة الثلاث على شكل مجموعات. فمثلاً: محمد، خالد، عبد الله، نقول: محمد أطول من خالد، ونُعَبِّرُ عنها: (محمد، خالد)، ونقارن هكذا: (محمد، خالد)، (خالد، عبد الله)، ومنها (محمد، عبد الله)؛ أي أنّ محمد أطول من عبد الله.

(مها ١٥٥سم، وأمل ١٦٢سم، ومريم ١٦٠سم):

(أمل، مريم)، (مريم، ــــــ)، ومنها: (ــــــــــ، ــــــــــ)

نُكرِّرُ اللُّعبة مع طلبة آخرين.

تعريف(٣): علاقة التعدّي:

العلاقة ع على المجموعة أ تُسَمّى علاقة تعدّي إذا كان:

(س ، ص) ∈ ع ، (ص ، ل) ∈ ع ، فإنَّ (س ، ل) ∈ ع ، حيث س، ص، ل ∈ أ.

نشاط (٦): لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨ }

$ع_١ = \{(س ، ص) \in أ \times أ : س \times ص = ٨\}$

$ع_١ = \{(١ ، ٨) ، (٨، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢)\}$ ، أُلاحظُ أنّ:

(١ ، ٨) ∈ $ع_١$ ، (٨ ، ١) ∈ $ع_١$ ، لكن (١ ، ١) لا تنتمي لـ $ع_١$ ، إذن $ع_١$ ليست علاقة تعدّي.

$ع_٢ = \{(س ، ص) \in أ \times أ : س < ص\}$

$ع_٢ = \{(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١، ٨) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢، ٨) ، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٨) ، (٤ ، ٨) \}$ ، أُلاحظُ، وأُكْمِلُ:

(١ ، ٢) ∈ $ع_٢$ ، (٢ ، ٣) ∈ $ع_٢$ وكذلك (١ ، ٣) ∈ $ع_٢$

(١ ، ٢) ∈ $ع_٢$ ، (٢ ، ٤) ∈ $ع_٢$ وكذلك (،) ∈ $ع_٢$

(١ ، ٣) ∈ ع$_{٢}$ ، (٣ ، ٤) ∈ ع$_{٢}$ وكذلك (،) ∈ ع$_{٢}$

(٢ ، ٣) ∈ ع$_{٢}$ ، (٣ ، ٤) ∈ ع$_{٢}$ وكذلك (،) ∈ ع$_{٢}$

أي انه (س ، ص) ∈ ع$_{٢}$ ، (ص ، ل) ∈ ع$_{٢}$ فإنَّ (س ، ل) ∈ ع$_{٢}$ ، اذن ع$_{٢}$ علاقة تعدّي.

تعريف (٤): العلاقة ع على المجموعة أ تُسَمّى علاقة تكافؤ على أ ، إذا كانت ع علاقة: انعكاس، وتماثل، وتعدّي على المجموعة أ .

نشاط (٧): إذا كانت أ = {١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ }، وكانت العلاقة ع معرّفة على أ ، بحيث:

ع = {(١ ، ١)،(١ ، $\frac{١}{٢}$)،($\frac{١}{٢}$ ، ١) ، ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) ، ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤}$)}

ع علاقة انعكاس على أ ؛ لأنّ: كلّ عنصر في المجموعة أ ارتبط بنفسه في العلاقة ع.

ع علاقة تماثل على أ؛ لأنّ: ...

ع علاقة تعدّي على أ؛ لأنّ: ...

ع علاقة تكافؤ على أ ؛ لأن: ...

ملاحظة: إذا كانت أ = {١، ٢، ٣} ، فإنَّ:

ع$_{١}$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)} هي علاقة تكافؤ تحتوي على أقل عدد من العناصر.

ع$_{٢}$ = أ × أ هي علاقة تكافؤ تحتوي على أكبر عدد من العناصر.

تمارينُ ومسائِل

١ أيُّ العلاقات الآتية علاقة انعكاس، وأيُّها ليست علاقة انعكاس، مع ذكر السبب:

أ إذا كانت أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، وكانت ع علاقة معرّفة على أ ، حيث:

ع = {(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤)} .

ب ع = {(س ، ص) ∈ ح × ح: س ⩾ ص} . (ح مجموعة الأعداد الحقيقيّة).

٢ أيّ العلاقات الآتية علاقة تماثل، وأيّها ليست علاقة تماثل، مع ذكر السبب:

أ إذا كانت أ = { -١ ، ٠ ، ١ } ، وكانت ع علاقة معرّفة على أ ، حيث:

ع = {(-١ ، -١) ، (١ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٠ ، ١)} .

ب ع = {(س ، ص) ∈ ص × ص : س^{٢} + ص^{٢} = ١} . (ص مجموعة الأعداد الصَّحيحة).

٣ إذا كانت أ = {١ ، ٢ ، ٣} ، وكانت ع علاقة على أ ، بحيث:

ع = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

أُبَيِّنُ فيما إذا كانت العلاقة ع علاقة تعدّي على أ ، أم لا؟ أوضِّح إجابتي.

٤ لتكن أ = {-٢ ، -١ ، ١ ، ٣} ، فأيٌّ من العلاقات الآتية علاقة تكافؤ على أ ، مع ذكر السبب؟

ع$_{١}$ = {(-٢ ، -٢) ، (-٢ ، -١) ، (-١ ، -٢) ، (-١ ، -١) ، (١ ، ١) ، (٣ ، ٣)}

ع$_{٢}$ = {(-١ ، -١) ، (١ ، ٣) ، (-٢ ، ٣)}

ع$_{٣}$ = أ × أ

٥ أُبَيِّنُ فيما إذا كانت ع = {(س ، ص) ∈ ط* × ط*: س أحد عوامل ص} علاقة انعكاس، أو تماثل، أو تعدّي على ط*، أم لا، مع ذكر السبب؟

٦ أُفَكِّر:

إذا كانت أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، فهل العلاقة ع = {(٢ ، ٤)} علاقة تعدّي على أ ، أم لا؟

٧ لتكن س= {أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ} هي مجموعة أضلاع المربّع أ ب جـ د ، فهل علاقة التّوازي على المجموعة س تشكّل علاقة تكافؤ أم لا، مع ذكر السبب؟

(٢ – ٤) الاقتران

نشاط (١): تقوم وزارة الدّاخلية الفِلَسطينيّة بتنظيم سِجِلّات المواطنين، بحيث يحمل كلّ مواطن ما يدلِّل على شخصيّته، مثل تاريخ الولادة ومكانها...، وسوف نأخذ من السِجِلّات الاسم، وتاريخ الميلاد، وفي هذه الحالة يكون الاسم هو المدخلات (المجال)، وتاريخ الميلاد هو المخرجات ( ).

- أَكْتُبُ اسمي: _____ أَكْتُبُ تاريخ ميلادي: _____
- أَكْتُبُ اسم زميلي: _____ أَكْتُبُ تاريخ ميلاده: _____
- هل لكلّ طالب تاريخُ ميلاد؟
- هل يوجد طالب له أكثر من تاريخ ميلاد؟

تعريف (١): الاقتران ق هو علاقة من أ إلى ب ، بحيث يرتبط كلّ عنصر من عناصر أ بعنصر واحد فقط من عناصر ب .

إذا كان الاقتران ق من أ إلى ب (ق: أ ⟵ ب) .

تُسَمّى المجموعة أ مجال الاقتران ق.

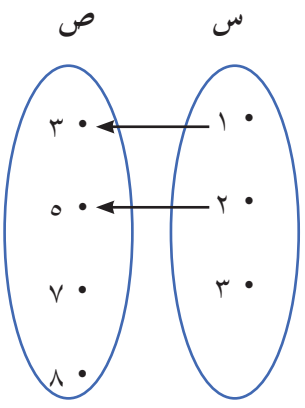
تُسَمّى المجموعة ب المجال المقابل للاقتران ق.

تُسَمّى صُوَر العناصر المدى؛ أي أنّ (المدى ⊆ المجال المقابل).

إذا كان (س ، ص) ∈ ق ، فإنّنا نكتب: ق(س) = ص ، وتُسَمّى ص صورة العنصر س.

نشاط (٢):

أُلاحظ العلاقات الممثّلة في الأشكال الآتية:

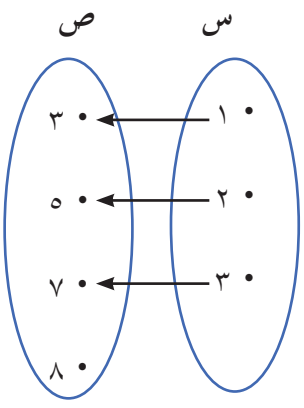


شكل(١)

صورة ١ هي ٣

صورة ٢ هي ٥

العنصر ٣ ليس له صورة

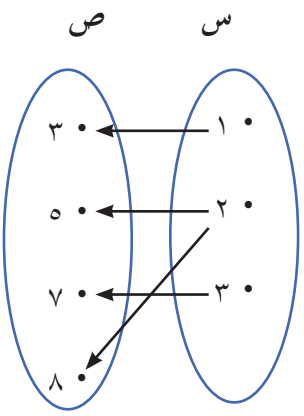


شكل(٢)

صورة ١ هي ٣

صورة ٢ هي ٥

صورة ٣ هي ٧



شكل(٣)

صورة ١ هي ٣

العنصر ٢ له صورتان ٥ وَ ٨

صورة ٣ هي ٧

العلاقة في الشَّكْل (١) ليست اقتراناً.

العلاقة في الشَّكْل (٢) _____ .

العلاقة في الشَّكْل (٣) _____ .

نشاط (٣):

إذا كانت أ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }، ب = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ،
وكان الاقتران ق من أ إلى ب (ق : أ ← ب) ، بحيث:

ق : س ← ٢س (يمكن أن تُكْتَبَ ق(س) = ٢س ، وتُسَمّى قاعدة الاقتران).

ق(٠) = ٢ × ٠ = ٠

ق(١) = ٢ × ١ = ٢

ق(٢) = _____

ق(٣) = _____

الاقتران ق = {(٠ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (،) ، (،)}

المجال = { }

المجال المقابل = { }

المدى = { }

نشاط (٤): إذا كانت ص مجموعة الأعداد الصَّحيحة، وكان الاقتران ق: ص ⟵ ص، بحيث:

ق(س) = ٢س + ١

ق(-٢) = ٢ × -٢ + ١ = -٣

ق(-١) = _____

ق(٠) = _____

ق(١) = _____

إذا كان الزّوج المرتّب (س ، ١١) يحقّق قاعدة الاقتران ق ، فما قيمة س؟

(س ، ١١) تعني أن ق(س) = ١١

ق(س) = ٢س + ١

١١ = ٢س + ١

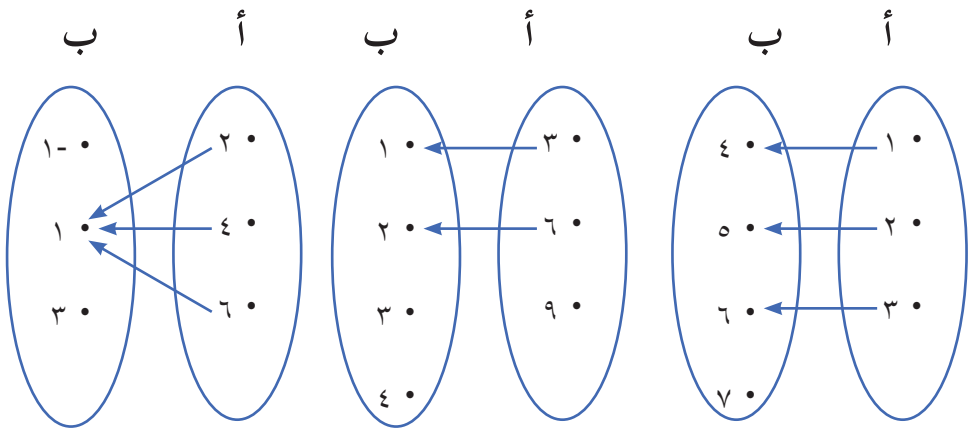
س = ٥

أُفَكِّر وأُناقش

هل كلُّ علاقةٍ اقتران؟

تمارينُ ومسائِل

١ أيّ العلاقات الآتية تُعَدُّ اقتراناً، وأيُّها لا يُعَدُّ اقتراناً؟، وإذا كانت اقتراناً، أَكْتُبُ: المجال، والمجال المقابل، والمدى لها.



٢ إذا كان ق = {(٢ ، ١) ، (٥ ، ١) ، (٣ ، ٣)} ، أَجِدُ: ق(٣) ، ق(٥) ، ق(٢) .

٣ إذا كان ق: ح ⟵ ح ، وكان ق(س) = أس − ٦ ، أَجِدُ قيمة أ ، حيث ق(٢) = صفر.

٤ إذا كانت أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ب = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، وكان الاقتران ق: أ ⟵ ب ، بحيث ق(س) = س − ١، أَجِدُ عناصر المدى.

٥ إذا كانت ح مجموعة الأعداد الحقيقيّة، وكان الاقتران ق:ح ⟵ ح ، بحيث ق(س) = س^{٢} . أَجِدُ:

أ ق(-٢) ، ق(٥) ، ق($\frac{١}{٢}$) ، ق($\sqrt{٣}$) .

ب إذا كان ق(أ) = ٣٦ ، فما قيمة/قيم أ؟

٦ إذا كانت أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، وكانت ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} ، وكان الاقتران ق: أ ⟵ ب ، بحيث: ق(س) = ٢ س ، إذا كانت س عدداً زوجيّاً .

و ق(س) = س + ٢ ، إذا كانت س عدداً فرديّاً. أَجِدُ:

ق(١) ، ق(٢) ، ق(٣) ، ق(٤) ، ق(٥).

٧ يُنْتِجُ مصنعٌ للثّلّاجات (س) ثلّاجة يوميّاً، ثمن الثلّاجة الواحدة (٦٠٠) دينار، ويدفع المصنع مصاريف عامّة أُخرى، بمقدار (٢٠٠٠٠) دينار يوميّاً، فاذا أنتج المصنع في يوم واحد(٣٠٠) ثلّاجة،

- أَجِدُ أرباح المصنع في ذلك اليوم.
- أَكْتُبُ قاعدة الاقتران الّتي تُمَثِّلُ أرباح المصنع في اليوم الواحد.

(٢ – ٥) أنواع الاقترانات

نشاط تعاونيّ: تنظّم وزارة الدّاخليّة الفِلَسطينيّة سِجِلّات المواطنين، بحيث يحمل كلّ مواطن رَقْماً يُسَمّى رَقْم البطاقة الشخصيّة (رَقْم الهُوِيَّة)، أَكْتُبُ وأفرادَ مجموعتي الاسمَ الرُّباعيَّ لكلِّ فردٍ فيها، وَرَقْم البطاقةِ الشخصيّة، وأعرضُها على شكل مجموعة.

لا يوجد مواطن له أكثر من بطاقة شخصيّة، السبب: _____ .

هل مجموعة الأزواج المرتّبة تُمَثِّلُ اقتراناً أم لا؟

هل يوجد مواطنان لهما رَقْم البطاقة الشخصيّة نفسه؟

نشاط (١): إذا كانت أ = {٠ ، ١ ، ٢} ، ب = {١ ، ٢ ، ٥}، وكان الاقتران:

ق: أ ⟵ ب، بحيث ق(س) = س^{٢} + ١

ق(٠) = (٠)^{٢} + ١ = ١

ق(١) = _____ =

ق(٢) = _____ =

المدى = { }

المجال المقابل _____ المدى . (يساوي، لا يساوي)

تعريف (١): يُسَمّى الاقتران ق: أ ⟵ ب اقتراناً شاملاً، إذا كان مداه = مجاله المقابل.

نشاط (٢): إذا كانت ط مجموعة الأعداد الطبيعية، وكان الاقتران ق: ط ⟵ ط، بحيث: ق(س) = ٣س

ق(٠) = ٣ × ٠ = ٠ ، ق(١) = _____ = _____ ، ق(٢) = _____ = _____ ،

ق(٩) = _____ = _____، ق(١٠) = _____ = _____

المدى = { ٠ ، ، ، ، ، ..... }

هل ق اقتران شامل؟ أفسر إجابتي.

نشاط (٣): مُثِّلَ الاقتران ق ، هـ كالآتي:

ق = {(-٧ ، $\frac{١}{٢}$) ، (-٢ ، ١) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ٥)}

هـ = {(-٥ ، -١) ، (-٤ ، ٠) ، (-٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

في الاقتران ق	في الاقتران هـ
ق(-٧) = $\frac{١}{٢}$	هـ(-٥) = -١
ق(-٢) = ١	هـ(-٤) = ٠
ق(٠) = ____	هـ(-٢) = ____
ق(١) = ____	هـ(١) = ____
هل يوجَدُ عنصران في مجال الاقتران ق لهما الصّورة نفسها في المدى؟	هـ(٢) = ____
	هل يوجَدُ عنصران في مجال الاقتران هـ لهما الصّورة نفسها في المدى؟

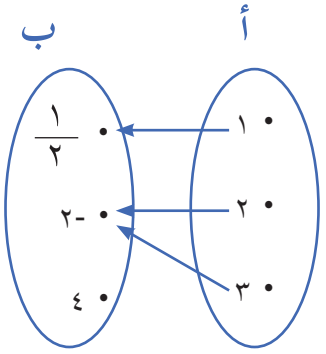
تعريف (٢):

يُسَمّى الاقتران ق: أ ⟵ ب اقتراناً واحداً لواحد، إذا كان كل عنصر في المدى صورة لعنصر واحد فقط في المجال؛ أي أنّه لكلّ $س_١$ ، $س_٢$ في المجال، إذا كان $س_١ \neq س_٢$ ، فإنَّ:

ق($س_١$) ≠ ق($س_٢$).

وإذا كان ق($س_١$) = ق($س_٢$) و $س_١ \neq س_٢$ ، فإنَّ ق ليس واحداً لواحد.

نشاط (٤): لديك الاقتران ق: أ ⟵ ب الآتي:



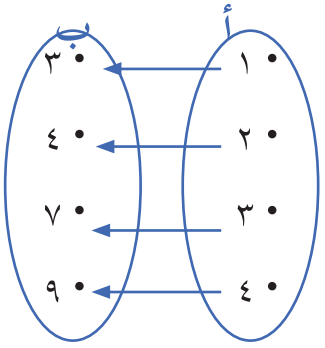
ق(١) = $\frac{١}{٢}$

ق(٢) = ____

ق(٣) = ____

هل ق اقتران واحد لواحد؟ أذكر السبب.

نشاط (٥): لديك الاقتران ق: أ ⟵ ب الآتي:



- الاقتران ق اقتران واحد لواحد. لماذا؟
- هل الاقتران ق شامل؟

تعريف(٣): يُسَمّى الاقتران ق: أ ⟵ ب اقترانَ تناظر إذا حقَّق الشرطين الآتيين:

١) أن يكون الاقتران ق واحداً لواحد. ٢) أن يكون الاقتران ق شاملاً.

نشاط (٦): إذا كان الاقتران ق: ح ⟵ ح ، بحيث: ق(س) = س^{٢} + ١ .

ق(٣) = (٣)^{٢} + ١ = ١٠ ، ق(-٣) = _____ = ____

هل الاقتران ق واحد لواحد؟ لماذا؟

الاقتران ق ليس شاملاً. أُوضِّح ذلك.

هل الاقترانُ اقترانُ تناظر؟ لماذا ؟

تمارينُ ومسائِل

١ إذا كانت أ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١} ، ب = {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، وكان الاقتران ق: أ ⟵ ب ، بحيث: ق(س) = ٢س + ١ ، أُبَيِّنُ فيما إذا كان الاقتران ق اقتراناً شاملاً أم لا؟ مع ذكر السبب.

٢ إذا كانت ص هي مجموعة الأعداد الصَّحيحة، وكان الاقتران ق: ص ⟵ ص ، بحيث: ق(س) = س^{٢} ، أُبَيِّنُ فيما إذا كان الاقتران ق اقتراناً شاملاً أم لا ؟ مع ذكر السبب.

٣ أيّ من الاقترانات الآتية هي اقتران واحد لواحد، مع ذكر السبب؟

أ ق= {(س ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ع ، ٣) ، (ل ، ١)} .

ب هـ = {(٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}.

٤ إذا كانت ص مجموعة الأعداد الصَّحيحة، وكان الاقتران ق: ص ⟵ ص ، بحيث: ق(س) = ٢س . أُبَيِّنُ فيما إذا كان الاقتران ق اقترانَ واحد لواحد أم لا، مع ذكر السبب؟

٥ إذا كان الاقتران ق: ط ⟵ ط ، بحيث: ق(س) = ٣س + ١ ، أُبَيِّنُ فيما إذا كان الاقتران ق اقتران تناظر أم لا، مع ذكر السبب؟

(٢ – ٦) الاقتران الخطّيّ

نشاط (١): لتشجيع زراعة الأشجار المثمرة في فِلَسطين، قدّمت إحدى البلديّات الفِلَسطينيّة حوافز تشجيعيّة للمزارعين، بحيث تعطي ٢٥ شجرة مقابل كلِّ دونم يُزرَع.

زرع محمد ١٠ دونمات، فحصل على ٢٥٠ شجرة،

وزرع إلياس ١٢ دونماً، فحصل على _____ شجرة.

تعريف (١): كلّ اقتران على الصّورة ق(س) = أس + ب ، حيث أ ، ب أعداد حقيقيّة أ ≠ صفر ، يُسَمّى اقتراناً خطّيّاً .

ملاحظة: إذا لم يُعْطَ مجال الاقتران الخطّيّ، وأعطِيت القاعدة، فيكون مجاله، ومجاله المقابل الأعداد الحقيقيّة ح . (ق: ح ⟵ ح).

نشاط (٢): أُكْمِلُ الآتي:

ق(س) = ٣س + ١ : اقتران خطّيّ؛ لأنَّه على صورة ق(س) = أس + ب .

هـ(س) = ٦س^{٢} : ليس اقتراناً خطّيّاً؛ لأنَّه ليس على الصّورة أس + ب .

ل(س) = ٤√س : _____

و(س) = ٢س : _____

م(س) = ٦ : _____

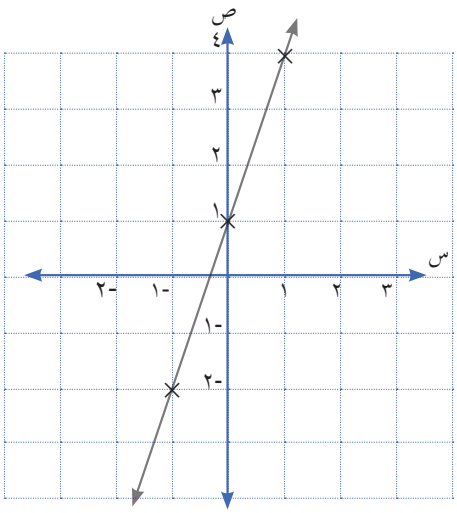
ع(س) = $\frac{٥}{٣س+١}$: _____

ك(س) = $\frac{٣س+١}{٥}$: _____

مِثال: أُمَثِّلُ ق(س) = ٣س + ١ في المستوى الدّيكارتِيّ:

الحل: لتمثيلِ الاقترانِ الخطّيّ في المستوى الدّيكارتِيّ، أُعَيِّنُ نقطتَيْنِ على الأقلّ تنتميان للاقتران في المستوى الدّيكارتِيّ، ثُمَّ أَصِلُ بينهما بخطّ مستقيم:

س	-١	٠	١
ص = ق(س)	-٢	١	٤



ق(-١) = ٣ × -١ + ١ = -٢ تُمَثَّلُ بالنُّقطة (-١ ، -٢).

ق(٠) = ٣ × ٠ + ١ = ١ تُمَثَّلُ بالنُّقطة (٠ ، ١).

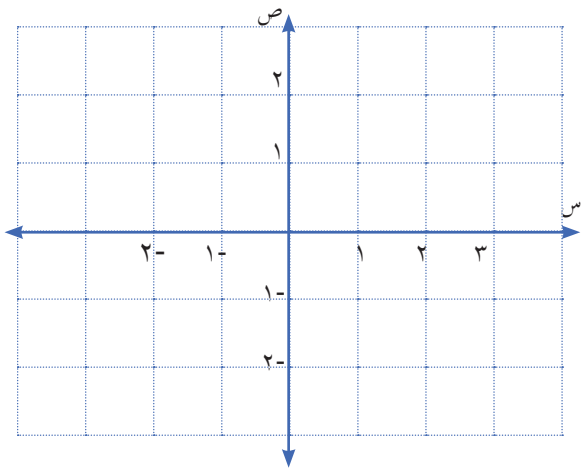
ق(١) = ٣ × ١ + ١ = ٤ تُمَثَّلُ بالنُّقطة (١ ، ٤).

أُعَيِّنُ النِّقاط في المستوى الدّيكارتِيّ، وأَصِلُ بينها بخط مستقيم:

نشاط (٣): أُكْمِلُ الجدول وأُمَثِّلُ ق(س) = ٢س + ١ في المستوى الدّيكارتِيّ:

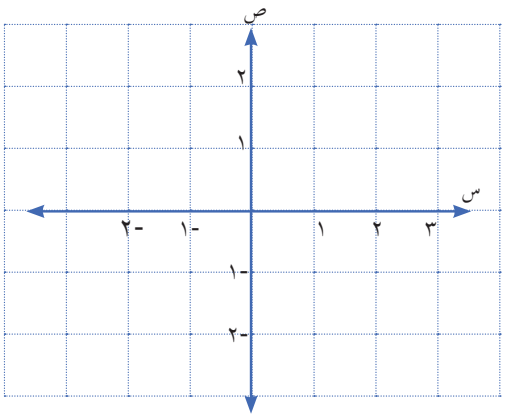
س	-١	٠	١
ص = ق(س)			

أُعَيِّنُ النِّقاط على المستوى الدّيكارتِيّ، وأَصِلُ بينها:



نشاط (٤): الاقتران ق(س) = س ، أُكْمِلُ الجدول الآتي، ثُمَّ أُمَثِّلُ الاقتران:

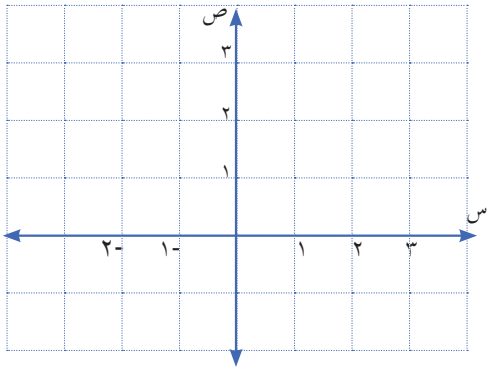
س	-٢	١	٣	٠
ص = ق(س)	-٢			



تعريف (٢): ق(س) = س يُسَمّى اقتراناً محايداً، وهو حالة خاصّة من الاقتران الخطّيّ.

نشاط (٥): الاقتران ق(س) = ٤ ، أُكْمِلُ الجدول الآتي ، ثُمَّ أُمَثِّلُ الاقتران:

س	-٣	٢	٤
ص = ق(س)	٤		



أتعلّم الاقتران ق(س) = ب، حيث ب ∋ ح يُسَمّى اقتراناً ثابتاً.

أُفكّر وأُناقش ماذا يمثل الاقتران ق(س) = صفر في المستوى الدّيكارتيّ؟

تمارينُ ومسائِل

١ أيّ من الاقترانات الآتية يُعَدّ اقتراناً خطّيّاً؟ ولماذا؟

أ) ق(س) = ٢س^{٣} − ١

ب) ل(س) = ٣س$^{-٢}$

جـ) هـ (س) = ٥س

د) م(س) = ٢ − س

هـ) و(س) = $\frac{٣}{س}$ + ١٠

٢ إذا كان ق(س) = ٥س + ٢ ، أَجِدُ كلّاً من: ق(٤) ، ق($\sqrt{٢}$) ، ق(٠) ، ق(-١) .

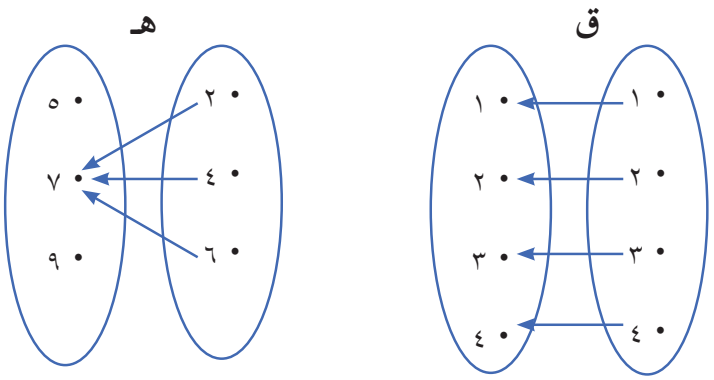
٣ أُمَثِّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الدّيكارتِيّ:

أ) ق(س) = س + ٣

ب) ق(س) = ١ − ٢س

جـ) ق(س) = -٣

٤ تمّ تمثيل اقترانَيْنِ بمخطَّطَيْنِ سهميَّيْن، أُحَدِّدُ أيُّهما اقتران ثابت، وأيُّهما اقتران محايد.



٥ قطعة أرض مربّعة الشَّكْل، طول ضِلْعها (س) متراً، يريد صاحبها إقامة سياج حولها، فإذا كانت تَكْلِفَة المتر (٥) دنانير، أَجِدُ:

أ) الاقتران الذي يُمَثِّلُ تكاليف سياج الأرض بِدِلالة طول الضِّلْع (س).

ب) إذا كان طول قطعة الأرض ٣٢م، فما تَكْلِفَة السّياج؟

(٢ – ٧) تركيب الاقترانات

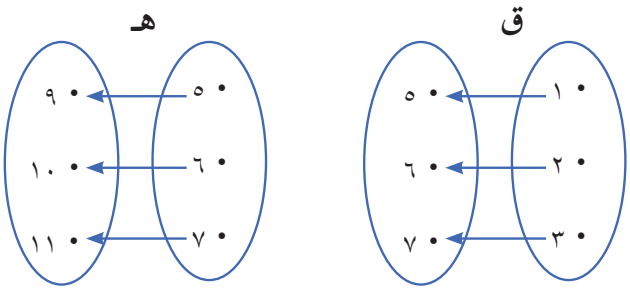
نشاط (١): تشرف سلطة النّقد الفِلَسطينيّة الّتي أنشئت عام ١٩٩٧م على سلامة العمل المصرفيّ، والحفاظ على الاستقرار النّقديّ، فتحويل ١٠٠ دولار يساوي ٧٠ ديناراً، وتحويل ٧٠ ديناراً يساوي ٣٧٠ ريالاً سعوديّاً.

١٠٠ دولار تساوي ٧٠ ديناراً.

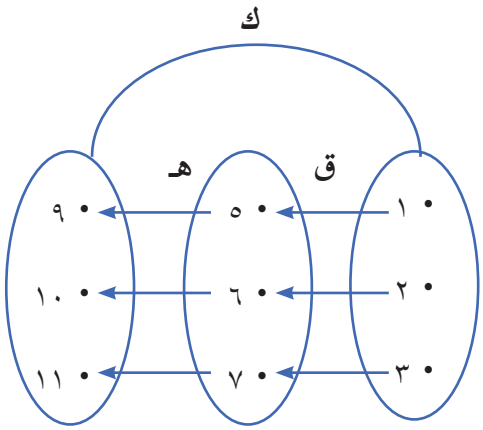
٧٠ ديناراً تساوي ٣٧٠ ريالاً سعوديّاً.

١٠٠ دولار تساوي _____ ريالاً سعوديّاً.

نشاط (٢): لديك الاقترانان ق ، هـ، كما في الشَّكْل:

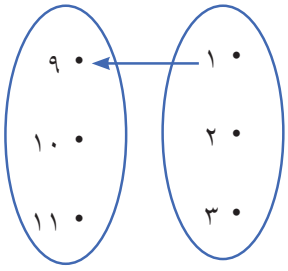


أُكَوِّنُ اقتراناً جديداً، مجاله هو مجال ق، ومداه هو مدى هـ، وليكن ك.



أُكْمِلُ تمثيل الاقتران ك بمخطط سهميّ:

ك = هـ o ق



يُعَدّ الاقتران ك النّاتج تركيباً للاقترانين ق ، هـ ، ويُرْمَزُ له بالرَّمْز (هـ o ق)، ويُقْرَأُ هـ بعد ق .

وبشكل عامّ: (هـ o ق)(س) = هـ(ق(س))

مِثال: إذا كان ق(س) = ٢س + ١ ، هـ (س) = ٤س − ٣، أجد (هـ o ق)(٢)

الحل: (هـ o ق) (٢) = هـ (ق(٢))

= هـ (٢ × ٢ + ١)

= هـ (٥)

= ٤ × ٥ − ٣ = ١٧

نشاط (٣): إذا كان ق(س) = ٣ + ٢س

هـ(س) = ٥س − ١

(هـ o ق) (س) = هـ (ق(س))

= هـ (٣ + ٢س)

= ٥×( ) − ١

= _____ = ١٤ + ١٠س

(ق o هـ) (س) = ق (هـ(س))

= ق (٥س − ١)

= ٣ + ٢ × ( )

= _____ = ١ + ١٠س

هل (هـ o ق)(س) = (ق o هـ) (س)؟

أتعلّم : بشكل عام (هـ o ق)(س) ≠ (ق o هـ) (س)

نشاط (٤): إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ (س) = ٣س − ١

(هـ ٥ ق) (١) = هـ (ق(١))

= هـ (١) = ٣ × ( ) − ١

= _____

(ق ٥ هـ) (١) = ق (هـ (١))

= _____ = _____

تمارينُ ومسائِل

١ إذا كان ق(س) = ٢س − ٥

هـ(س) = ٣س + ٤ ، أَجِدُ: (ق ٥ هـ) (٣) ، (هـ ٥ ق) (٠) .

٢ إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣ ، أَجِدُ: (ق ٥ ق) (-٢) .

٣ إذا كان ق(س) = س^{٢}

هـ(س) = $\sqrt{\text{س}}$ + ٣ ، أَجِدُ: (هـ ٥ ق) (٢) .

٤ أَجِدُ (ق ٥ هـ) (س) فيما يأتي:

أ) ق(س) = ١ − ٥س ، هـ(س) = ٢س

ب) ق(س) = س^{٢} − ١ ، هـ(س) = س + ٥

جـ) ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ١ ، هـ (س) = ٣س

٥ إذا كان ق(س) = س + ٣ ، هـ(س) = س^{٢} ، م(س) = ١ + ٢س

أَجِدُ: ((ق ٥ هـ) ٥ م)(٢)

(٢ – ٨) الاقتران النظير (العكسيّ)

نشاط (١): تُصدر وزارة السّياحة والآثار الفِلَسطينيّة كُتَيِّباتٍ إرشاديّةً تشرح فيها عن المعالم السّياحيّة، كان في إحدى صفحات الكُتَيِّبات بعضُ المدن الفِلَسطينيّة، والمعالم السياحية فيها، على النحو الآتي:

المدينة	المعلم السياحي
القدس	قبّة الصخرة
بيت لحم	كنيسة المهد
الخليل	الحرم الإبراهيميّ
غزّة	الجامع العمريّ الكبير
عكّا	جامع الجزّار

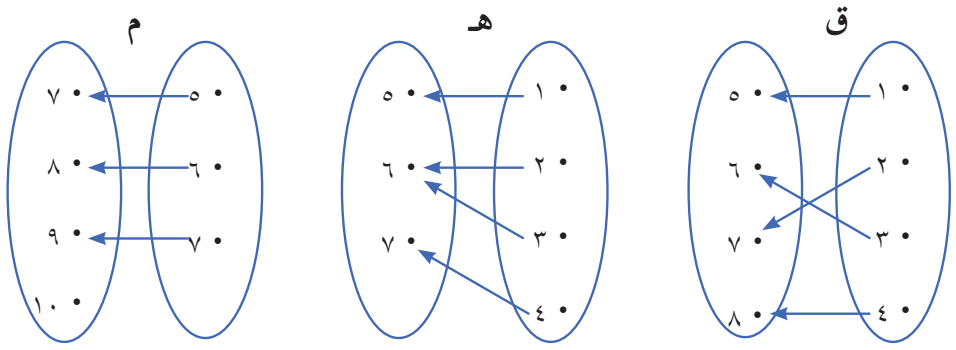
إذا اعتبرنا أنّ:

أ = {القدس، بيت لحم، الخليل، غزة، عكا}،

ب = {قبة الصخرة ، ، ، ، }

- العلاقة من أ ⟵ ب اقتران.
- هل العلاقة من ب ⟵ أ اقتران؟

نشاط (٢): لديك الاقترانات ق ، هـ ، م الآتية:



ق	هـ	م
- الاقتران ق اقتران واحد لواحد.	- الاقتران هـ: _____	- الاقتران م: _____
هل الاقتران ق **شامل؟ تناظر**	هل الاقتران هـ **شامل؟ تناظر**	هل الاقتران م **شامل؟ تناظر**
هل يمكن تكوين اقتران جديد إذا عكسنا اتّجاه الأسهم؟	- هل يمكن تكوين اقتران جديد إذا عكسنا اتّجاه الأسهم؟	- هل يمكن تكوين اقتران جديد إذا عكسنا اتّجاه الأسهم؟

أتعلّم: إذا كان الاقتران ق اقتران تناظر، فإنّه يوجد له اقتران نظير نرمز له بالرمز ق$^{-1}$ ويقرأ نظير ق.

نشاط (٣): إذا كان ق = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ١٥) ، (٣ ، ١٢) ، (٤ ، ٢٠)} اقتران تناظر

ق$^{-١}$ = {(٣ ، ١) ، (١٥ ، ٢) ، (،) ، (،) ، (،)} .

ق(١) = ٣

ق(٣) =

ق$^{-١}$(١٢) = ٣

ق$^{-١}$(٣) =

نشاط (٤): إذا كان ق = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ١٦)} اقتران تناظر

ق$^{-١}$ = {(١ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (،) ، (،) ، (،)} .

(ق o ق$^{-١}$)(٤) = ق(ق$^{-١}$(٤)) = ق(٢) = ٤

(ق$^{-١}$ o ق) (٤) = _____ = _____ = ___

ما العلاقة بين (ق o ق$^{-١}$)(٤) ، (ق$^{-١}$ o ق)(٤) .

أتعلّم :

إذا كان ق(س) اقتران تناظر، وكان ق$^{-١}$(س) هو الاقتران النظير له، فإنَّ:

(ق o ق$^{-١}$) (س) = س و (ق$^{-١}$ o ق) (س) = س (الاقتران المحايد).

مِثال: إذا علمتُ أنّ ق(س) = ٢س + ٣ اقتران تناظر، أَجِدُ ق$^{-١}$(س) للاقتران، باستخدام قاعدة الاقتران المحايد:

الحل:

(ق o ق$^{-١}$) (س) = س

ق(ق$^{-١}$(س)) = س

٢ × ق$^{-١}$(س) + ٣ = س

٢ ق$^{-١}$(س) = س − ٣

ق$^{-١}$(س) = $\frac{س - ٣}{٢}$ = $\frac{س}{٢}$ − $\frac{٣}{٢}$ (أقارِنُ النّاتج مع ق(س)).

نشاط (٥): الاقتران العكسي للاقتران ق(س) = س^{٣} + ١ :

(ق ○ ق$^{-١}$) (س) = س

ق(ق$^{-١}$(س)) = س

( )^{٣} + ١ = س

_____ = _____

ق$^{-١}$(س) = _____

أُفَكِّر وأُناقش

هل يوجد اقتران نظير للاقتران ق(س) = س^{٢} ؟

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ الاقتران العكسيّ للاقترانات الآتية، إن وُجِد:

أ ق = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١)} .

ب هـ = {(-١ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣)}

جـ م = {(-٣ ، -٢) ، (-١ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣)}

٢ إذا كان ق = {(١ ، ٢) ، (٤ ، ١٢) ، (٥ ، ١٧)} اقترانَ تناظر، أَجِدُ:

ق$^{-١}$ ، ق(١) ، ق(٤) ، ق$^{-١}$ (١٧) ، ق$^{-١}$ (٢) .

٣ أَجِدُ: ق$^{-١}$(س) في كلٍّ من الاقترانات الآتية، إن أمكن:

أ ق(س) = ٣س − ١ ب ق(س) = س^{٢} + ٢

جـ ق(س) = ٢س^{٣} − ٤ د ق(س) = أس + ب ، حيث أ ≠ صفراً.

٤ أُبَيِّنُ باستخدام عمليّة تركيب الاقتران أنّ ق$^{-١}$(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ هو الاقتران العكسيّ للاقتران: ق(س) = س^{٣} .

(٢ – ٩)

تمارينُ عامّة

١ أضعُ دائرة حوّل رمز الإجابة الصَّحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

١ عدد عناصر المجموعة أ هو ٧ عناصر، وعدد عناصر المجموعة ب هو ٦ عناصر، فما عدد عناصر حاصل الضّرْب الدّيكارتِيّ لهما؟

أ) ٤٢ ب) ١٣ جـ) ١٤ د) ٤٩

٢ إذا كان الاقتران ق: ط ⟵ ط ، بحيث ق(س) = ٤س + ١ ، أيّ النِّقاط الآتية تحقّق قاعدة الاقتران ق؟

أ) (-١، ٣) ب) (٢ ، ١٠) جـ) (٣ ، ١٣) د) (٠ ، ٥)

٣ إذا كان ق = {(٢ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٧ ، ٩) } ، فما قيمة ق$^{-١}$(٩)؟

أ) ١ ب) ٩ جـ) ٥ د) ٧

٤ ما الاقتران الخطّيّ من الاقترانات الآتية؟

أ) ق(س) = س^{٢} ب) ق(س) = ٣س جـ) ق(س) = $\frac{١}{س}$ د) ق(س) = $\sqrt{س}$

٥ في الاقتران المحايد ق(س) = س عند تمثيله في المستوى، ما الزّاوية المحصورة بين خطّ الاقتران ومحور السّينات الموجب؟

أ) ٠° ب) ٩٠° جـ) ٤٥° د) ١٨٠°

٦ ما قيمة (ق ٥ ق$^{-١}$) (٥)؟

أ) -٥ ب) ٥ جـ) ٢٥ د) ٠

٢ أَجِدُ قيمة س ، ص ، إذا كان: (٧ ، ٢ص + ١) = (٢س + ٣ ، ٨).

٣ إذا كانت أ = {٠ ، ١ ، ٢} ، ب = {٢ ، ٧ } ، فأَجِدُ: أ × ب ، أ × أ .

٤ لتكن أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، وكانت العلاقة ع معرّفة على أ ، حيث:

ع = {(س ، ص) ∈ أ × أ : س – ص = ٢ } :

أ أَكْتُبُ العلاقة ع على شكل مجموعة من الأزواج المرتّبة.

ب أَجِدُ المجال، والمدى للعلاقة .

جـ أُمَثِّلُ العلاقة ع بمخطّط سهميّ، وفي المستوى الدّيكارتِيّ .

د هل تُمَثِّلُ العلاقة ع اقتراناً، مع ذكر السبب.

٥ إذا كان أ = {١ ، ٢ ، ٣ } ، ب = {١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦} ، وكان الاقتران:

ق: أ ⟵ ب ، بحيث: ق(س) = س^{٢} :

أ أَكْتُبُ الاقتران ق على صورة أزواج مرتّبة.

ب أكتب: المجال، والمجال المقابل، والمدى.

جـ هل الاقتران ق شامل، وواحد لواحد، وتناظر؟

٦ أُمَثِّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الدّيكارتِيّ:

أ ق(س) = ٢س + ٣ ب ق(س) = -س جـ ق(س) = ٣س

٧ أَجِدُ ق$^{-١}$(س) للاقتران ق(س) = ٥س + ٩

٨ أُبَيِّنُ أنّ الاقتران ق(س) = س ، ق: ح ⟵ ح اقتران تناظر أم لا.

مشروع الوحدة:

أراد أحمد التَّبرُّع بالدّم لأحد المستشفيات، حيث يُمَثِّلُ المتبرّعون المصدر الوحيد لجميع فئات دم الإنسان القابلة للنقل خلال عمليّة نقل الدّم، يجب الأخذ بعين الاعتبار عاملين أساسيّين، هما: فصيلة الدّم، وعامل رايزيسي.

يستحسن أن تتمَّ عمليّة نقل الدّم بين أناس من فصيلة الدّم نفسها؛ لتجنُّبِ الأعراض السّلبيّة. أُكَوِّنُ جدولاً أُبَيِّنُ فيه العلاقة بين الفصائل المتبرِّعة والفصائل المتلقِّية، وأسألُ زملائي في الصّفِّ عن فصيلة دمهم، وأُمَثِّلُ العلاقة الّتي تُبَيِّنُ عمليّة نقل الدّم فيما بينهم (دون الأخذ بعين الاعتبار عامل الرايزيسي).

أيّ خواصّ العلاقات تحقّق هذه العلاقة؟

روابط وبرامج مقترحة

www.Geo algebra
microsoft mathematics

الوحدة ٣

الهندسة والقياس

أتأمَّلُ

ألاحظ الصورة، وكيف تم تصميم الطرق المنحدرة فيها.

برع العرب والمسلمون في الهندسة والقياس، وتظهر جماليّة الهندسة وفوائدها في مناحي الحياة المختلفة، فالطلبة قادرون على توظيفها في المواقف الحياتيّة المختلفة.

الأهداف:

يُتَوَقَّعُ من الطّلبة بعد الانتهاء من دراسة الوَحْدة أن يحققوا الأهداف الآتية:

١) إيجاد المسافة بين نقطَتَيْنِ في المستوى الدّيكارتِيّ.

٢) إيجاد إحداثيّات منتصف القطعة المستقيمة.

٣) التَّعَرُّف إلى مَيل الخطّ المستقيم.

٤) إيجاد معادلة الخطّ المستقيم.

٥) التَّعَرُّف إلى القطع المتوسّطة في المُثَلَّث.

٦) حلّ مسائل تطبيقيّة على مفاهيم الوَحْدة.

(٣-١) المسافة بين نقطتين

نشاط (١): للمسجد الأقصى عدة مآذن، أراد أحد الأشخاص الانتقال من مئذنة باب الأسباط إلى مئذنة باب السّلسلة، أمامه المسلكان الآتيان:

الأوّل: من مئذنة باب الأسباط إلى مئذنة باب الغوانمة، ثُمَّ إلى مئذنة باب السلسة.

الثّاني: من مئذنة باب الأسباط إلى مئذنة باب السّلسلة مباشرة في خط مستقيم.

أُحَدِّدُ المسلكيْنِ على المخطط المجاور.

أُقارنُ بين المسلكيْنِ، من حيثُ المسافة.

نشاط (٢): أُمَثِّلُ إحداثيّاتِ النِّقاط أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠) ، جـ (٤ ، ٣) في المستوى الدّيكارتِيّ:

نوع المُثَلَّث أ ب جـ النّاتج من توصيل النِّقاط السّابقة: _____

المسافة بين النقطتين أ ، ب = طول القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ = ٤ وحدات = ٤ − ٠ (∆س).

المسافة بين النقطتين ب ، جـ = طول القطعة المستقيمة $\overline{ب جـ}$ = _____ = ٣ − ٠ (∆ص).

طول القطعة المستقيمة $\overline{أجـ}$ ، باستخدام نظرية فيثاغورس =_____.

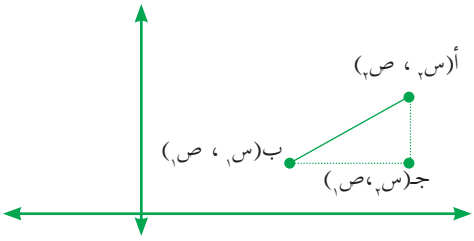
نشاط (٣): في الشَّكْل المقابل، إذا كانت إحداثيّات النُّقطة ب(س١،ص١)، إحداثيّات النُّقطة أ (س٢ ، ص٢) ،

فإنَّ طول القطعة المستقيمة $\overline{أ جـ}$ = ص٢ − ص١ ،

وطول القطعة المستقيمة $\overline{ب جـ}$ = _____ .

باستخدام نظرية فيثاغورس:

أ ب = _____.



أَتَعَلَّم : إذا كانت أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) نقطتَيْنِ في المستوى الدّيكارتِيّ، فإنَّ المسافة بينهما تُعطى بالقانون: أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

نشاط (٤): إذا كانت م(-٢ ، -٢) ، ن(٢ ، ١) ، ل(٦ ، ٤)، أَجِدُ كلّاً من: م ن، ن ل ، م ل :

م ن = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(٢ - ^-٢)^٢ + (١ - ^-٢)^٢}$

= $\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}$ = ٥ وحدات

ن ل = $\sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

= _____ = _____ وحدة

م ل = _____

أُلاحظُ العلاقة بين أطوال القطع المستقيمة النّاتجة من حساب المسافة بين كل نقطتين، ومنها النِّقاط: م، ن، ل تقع على استقامة واحدة.

نشاط (٥): ما نوع المُثَلَّث ك ل م ، الذي رؤوسه ك(٠ ، ٤) ، ل(٢ ، ٢) ، م(٠ ، ٠)؟

نجد: ك ل = $\sqrt{(٢ - ٠)^٢ + (٢ - ٤)^٢}$ = $\sqrt{(٢)^٢ + (-٢)^٢}$

= $\sqrt{٤ + __}$ = _____

ك م = $\sqrt{(٠ - ٤)^٢ + (٠ - ٠)^٢}$ = _____

ل م = _____

أُلاحظُ العلاقة بين أطوال أضلاع المُثَلَّث، ومنها المُثَلَّث ك م ل هو مُثَلَّث _____.

نشاط (٦): إذا كانت المسافة بين النقطتين م(أ ، ٧) ، ن(-٢ ، ٣) تساوي ٥ وحدات، ما قيمة/ قيم أ؟

م ن = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

٥ = $\sqrt{(-٢ - أ)^٢ + (٣ - ٧)^٢}$

٢٥ = _____

_____ = ٤ + ٤أ + $أ^٢$ + ١٦

$أ^٢$ + ٤أ − ٥ = ٠

( ) ( ) = ٠

إما أ = _____ أو أ = _____ .

تمارينُ ومسائِل

١ أحسبُ المسافة بين النُّقطتين فيما يأتي:

أ) أ (٢ ، ٧) ، ب (٦، ١١).

ب) م (٥ ، -٢) ، ن (-١ ، ٦).

٢ ما نوع المُثَلَّث الذي رؤوسه أ(١ ، ٤) ، ب(-١ ، -٢) ، جـ (٢ ، -٣)؟

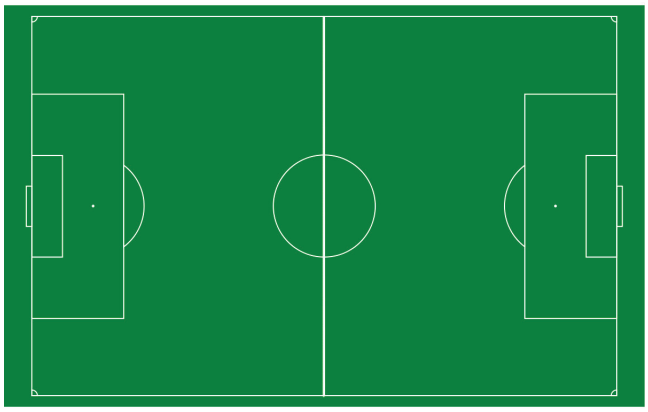
٣ إذا كانت المسافة بين النقطتين ل (أ ، ٧) ، ك (٣أ - ١ ، -٥) تساوي ١٣ وحدة، أَجِدُ قيمة/قيم أ.

٤ هل النِّقاط أ (-٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، جـ (-٤ ، ٣) تقع على استقامة واحدة؟

٥ أبين أن النقاط أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠) ، جـ (-٥ ، ٧) ، د (-٢ ، ٩) رؤوس مربع.

(٣ - ٢) إحداثيّات نقطة منتصف القطعة المستقيمة

نشاط (١): تقوم اللجنة الرياضيّة بمساعدة معلم الرّياضة في تخطيط الملاعب، تمّ تخطيط الملعب المجاور، وبقي تحديد نقطة منتصف الملعب.



اقترح محمد استخدام الخيط؛ لتحديد نقطة المنتصف.

أقترحُ طريقة أُخرى لتحديد نقطة المنتصف:

_____ .

نشاط (٢): أُمَثِّلُ النقطتين أ(-١ ، ٤) ، ب(٥ ، ٢) في المستوى الدّيكارتِيّ، ثُمَّ أَصِلُ بينهما بقطعة مستقيمة. وأُمَثِّلُ النُّقطة جـ (٢ ، ٣) في المستوى نفسه، ثُمَّ أقيس بالمسطرة المسافة بين النُّقطة جـ والنقطتين أ ، ب.

ماذا أُلاحظُ؟

أُلاحظُ أنّ: $\frac{-١ + ٥}{٢} = ٢$

وأن ٣ = _____

أتعلّم: إذا كانت أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) نقطتين في المستوى الدّيكارتِيّ، فإنَّ إحداثيّات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب = ($\frac{س١ + س٢}{٢}$ ، $\frac{ص١ + ص٢}{٢}$).

نشاط (٣): لتكن أ (٩ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (-٤ ، ٨) ، إحداثيّات منتصف أب هي ($\frac{٩ + ٥}{٢}$ ، $\frac{٣ + ١}{٢}$) = (،)

إحداثيّات منتصف أجـ هي _____ .

نشاط (٤): أ ، ب ، جـ تُمَثِّلُ ثلاثة مواقع في المستوى الدّيكارتيّ: الموقع ب (٦ ، -٤) هو منتصف المسافة بين أ ، جـ، إذا كان موقع أ(٥ ، -٣)، فما موقع جـ = ؟

أَفرضُ إحداثيّات الموقع جـ (س٢ ، ص٢)

$$(٦ ، -٤) = \left(\frac{٥ + س_٢}{٢} ، \frac{-٣ + ص_٢}{٢}\right)$$

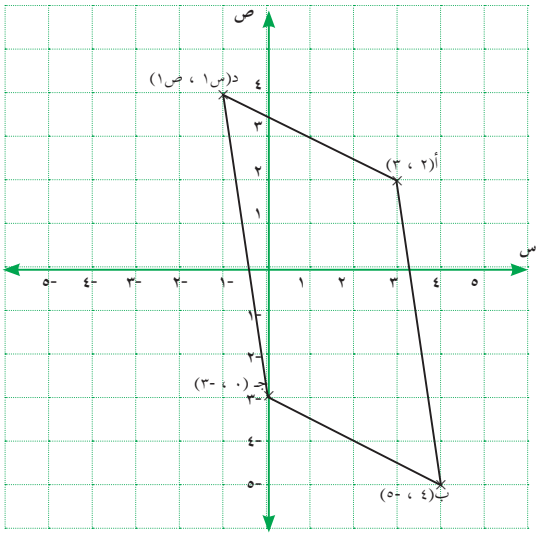
$$٦ = \frac{٥ + س_٢}{٢}$$

س٢ = _____

-٤ = _____

ص٢ = _____

نشاط (٥): رُسِم متوازي الأضلاع أب جـ د ، حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، -٥) ، جـ (٠ ، -٣)، كما في الشَّكْل المجاور، أَجِدُ إحداثيَّي نقطة تقاطع قُطريه، ثُمَّ أَجِدُ إحداثيَّي النُّقطة د مستخدماً قانون إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة.



الشَّكْل أب جـ د متوازي أضلاع، فيه م نقطة تقاطع قُطريه،

وإحداثيّات النُّقطة م (س ، ص)

$$(س ، ص) = \left(\frac{٠ + ٣}{٢} ، \text{_____}\right) = \text{_____}$$

(،)

وإحداثيّات النُّقطة د (س١ ، ص١)

$$(،) = \left(\frac{٤ + س_٢}{٢} ، \frac{-٥ + ص_٢}{٢}\right)$$

س١ = _____ ، ص١ = _____

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ إحداثيَّي النُّقطة جـ ، حيث جـ منتصف أب في الحالات الآتية:

أ أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠).

ب أ (٧ ، -٥) ، ب (-٣ ، ٥).

٢ إذا كانت جـ (س ، -٣) منتصف أب ، أَجِدُ كُلّاً من س ، ص ، بحيث:

أ (-٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١).

٣ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربع نقاط في المستوى الديكارتي، وكان أب = ب جـ = جـ د ، حيث:

أ (١ ، ٣) ، جـ (٥ ، ١)، أَجِدُ:

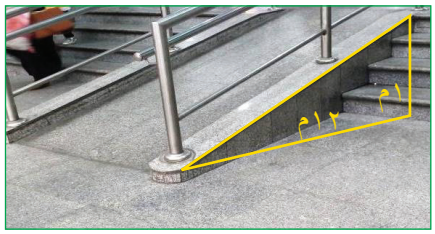
أوّلاً- إحداثيَّي النُّقطة ب .

ثانياً- إحداثيَّي النُّقطة د .

٤ أ ب جـ مُثَلَّث، فيه أب = أجـ، إذا كانت إحداثيّات كل من: أ (-٣ ، ٠)، ب (٣ ، ٤)، جـ (١ ، -٦)، أَجِدُ طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ على منتصف ب جـ .

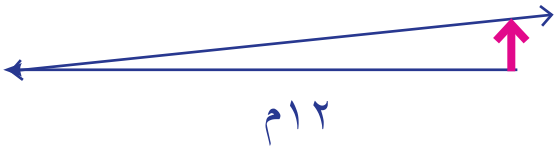
(٣ - ٣) مَيل الخطّ المستقيم

نشاط (١): يقتضي قانون دمج الطلبة ذوي الإعاقة في المدارس الحكوميّة الفِلَسطينيّة مواءمة المدارس والمراكز والمؤسّسات التربويّة بما يتناسب والأشخاص ذوي الإعاقة، ومنها الممرّات، والسّطوح المائلة اللّازمة لتسهيل حركة الكراسي المُدَوْلَبَة الخاصّة بذوي الإعاقة في المدارس. والإرشادات الخاصّة بهذه الكراسي تسمح كحدّ أقصى بارتفاع عموديّ، مقداره متر واحد لكل ١٢ متراً أُفُقِيّاً للسّطوح المائلة.



النسبة $\frac{١}{١٢}$ تُسَمّى مَيل السطح المائل، وتصف شدة انحداره،

فإذا كان الارتفاع العموديّ يساوي $\frac{١}{٢}$ متر،
فإنَّ أقلّ بُعْدٍ أُفُقِيٍّ مناسب = _____

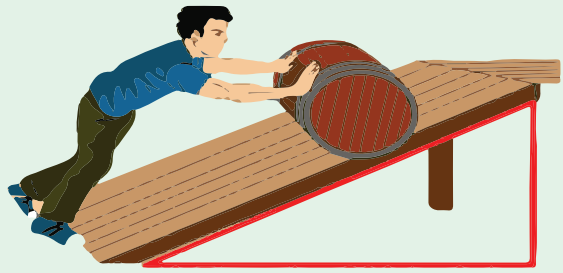


مَيل السطح = _____

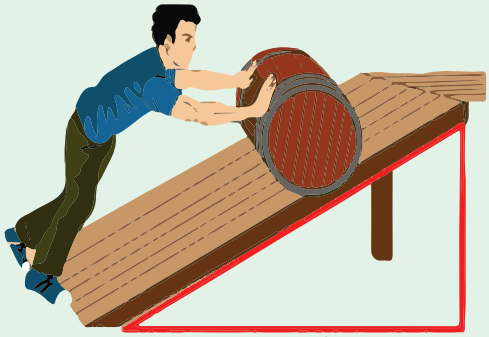
أيُّهما أكثر انحداراً، السّطح الّذي ميله $\frac{١}{١٢}$ ، أَمِ السّطح الّذي انحداره $\frac{١}{١٥}$

أُفَكِّر وأُناقش

السَّطح في الشَّكْل (٢) أكثر انحداراً من السّطح في الشَّكْل (١).



الشَّكْل (١)



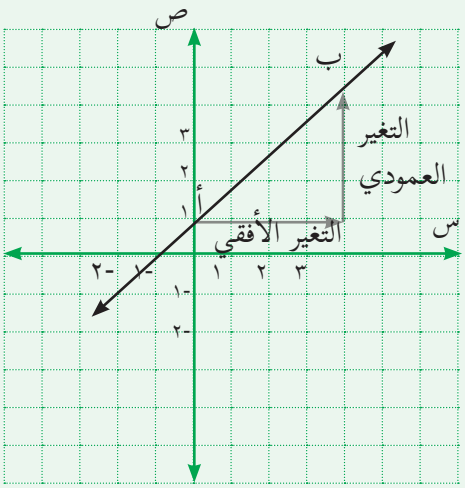
الشَّكْل (٢)

تعريف: إذا كانت أ(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب(س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) نقطتَيْنِ على الخطّ المستقيم أ ب ، فإنَّ:

مَيل الخطّ المستقيم أ ب (م) = $\frac{\text{التغير العمودي}}{\text{التغير الأفقي}}$ = $\frac{\text{التغير في الإحداثيات الصادية}}{\text{التغير في الإحداثيات السينية}}$

$$= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

حيث س$_{١}$ ≠ س$_{٢}$



نشاط (٢): أَجِدُ مَيل الخطّ المستقيم المارّ بالنُّقطتَيْن الآتيتين:

١) (٣ ، ٥) ، (٠ ، -٢).

م = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ = _____

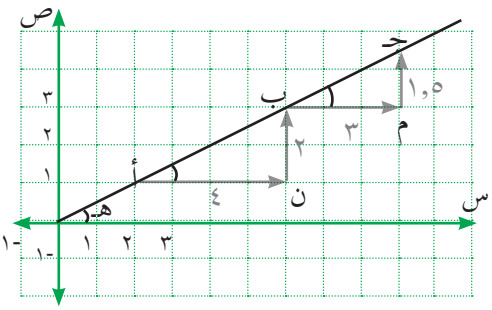
= _____

= $\frac{٧}{٣}$

٢) ر(-٤ ، ٣) ، ل(٠ ، ١).

مَيل الخطّ المستقيم $\overleftrightarrow{ر\ ل}$ = $\frac{\square}{\square}$ = $\frac{\square}{\square}$

نشاط (٣): النّقاط أ ، ب ، جـ واقعة على الخطّ المستقيم في المستوى البيانيّ، أُكْمِلُ:



في المُثَلَّث جـ م ب: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = _____

في المُثَلَّث ب ن أ: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = _____

ميل أب _____ ميل ب جـ

قياس الزّاوية هـ = قياس الزّاوية م ب جـ = قياس الزّاوية ن أ ب . لماذا؟_____

في المُثَلَّث ب ن أ: ظلّ الزّاوية ب أ ن = _____

في المُثَلَّث جـ م ب: ظلّ الزّاوية جـ ب م =_____

ما العلاقة بين ظلّ الزّاوية ب أ ن ، وظلّ الزّاوية جـ ب م ؟ _____

ما العلاقة بين ظا هـ ، ومَيل الخطّ المستقيم أ جـ ؟ _____

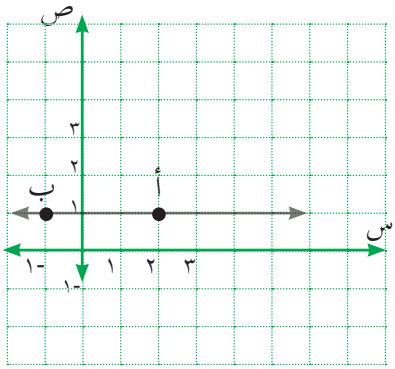
أَتَعَلَّم : مَيل الخطّ المستقيم = ظاهـ ، حيث هـ هي الزّاوية الّتي يصنعها الخط المستقيم مع محور السّينات الموجب.

نشاط (٤): أَجِدُ مَيل الخط المستقيم الّذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع محور السّينات الموجب:

الميل = ظاهـ

م = ظا ___ = ___

نشاط (٥): إذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (-١ ، ١)، كما في الشَّكْل، أَجِدُ ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ ؟

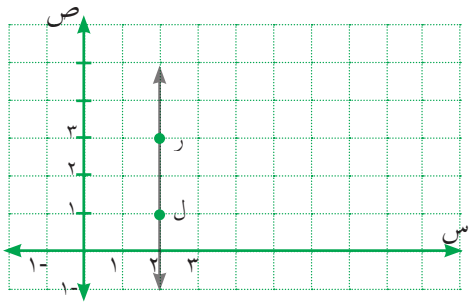


ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{١ - ١}{٢ - (١-)}$ = $\frac{\square}{\square}$ = _____

الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ يوازي محور _____

أَتَعَلَّمُ : مَيل الخطّ المستقيم الموازي لمحور السّينات يساوي صفراً.

نشاط (٦):



إذا كانت ل(٢ ، ١) ، ر(٢ ، ٣)،

أُلاحظُ أنّ:

$س_٢ - س_١ = ٠$ ، فيكون مَيل الخط المستقيم غير معرّف،

والخط المستقيم $\overleftrightarrow{ل ر}$ يوازي محور _____.

أَتَعَلَّمُ : مَيل الخطّ المستقيم الموازي لمحور الصّادات يساوي دائماً كمّيّة غير معرّفة.

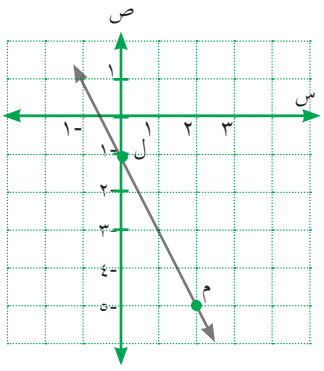
تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ مَيل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أ\ ب}$ في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ أ (-١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٤).

ب أ (٢ ، -١) ب (٤ ، -١).

جـ زاوية مَيل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أ\ ب}$ = ٤٥°.



٢ أَجِدُ مَيل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{م\ ل}$ في الشَّكْل المجاور:

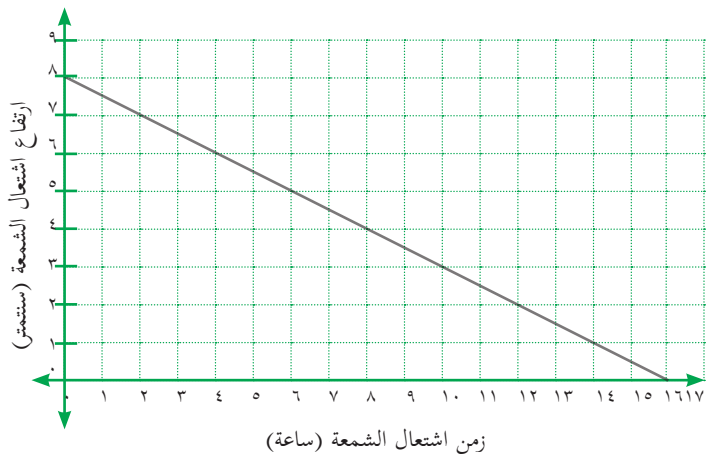
٣ أُبَيِّنُ باستخدام المَيل أنّ النِّقاط الآتية: أ (٢ ، -١)،
ب (٣ ، ٢)، جـ (٤ ، ٥) تقع على استقامة واحدة.

٤ الشَّكْل المجاور يُمَثِّلُ العلاقة بين زمن اشتعال شمعة بالساعات، وارتفاعهابالسَّنتمترات:

أ ما طول الشمعة قبل إشعالها؟

ب أَجِدُ مَيل الخط المستقيم في الشَّكْل.

جـ كيف تستفيد من قيمة المَيل في وصف العلاقة بين زمن اشتعال الشمعة وارتفاعها؟



(٣ - ٤) معادلة الخطّ المستقيم

نشاط (١): تمتاز فِلَسطين بطقس حارّ جافّ صيفاً، معتدل شتاءً، وبذلك تتنوّع فيها المزروعات، كالزّيتون، والعنب، والحَمضيّات، وبعض النّباتات الموسميّة أيضاً. فإذا علمت أنّ نبتة فاصولياء طولها ٣ سنتمترات، وتنمو بمعدل ٢ سنتمتراً يوميّاً، وكان طول النّبتة ص سنتمتراً بعد س يوماً معطى بالعلاقة: ص = ٢س + ٣ ،

أُكْمِلُ الجدول الآتي:

س(يوميّاً)	٠	١	٢	٣	
ص (طول النّبتة)	٣		٧		

طول النّبتة في اليوم الخامس = _____

طول النّبتة في اليوم الحادي عشر = _____

أُمَثِّلُ ص = ٢س + ٣ بيانيّاً:

مَيل الخط المستقيم = _____

= _____

الإحداثيّ الصّاديّ لنقطة تقاطع الخط المستقيم ومحور الصّادات = ___

أتعلّم: الإحداثيّ الصّاديّ لنقطة تقاطع الخط المستقيم، ومحور الصادات يُسَمّى المقطع الصّاديّ.

تعريف: معادلة الخطّ المستقيم الذي مَيله (م)، ومقطعه الصّاديّ (جـ) هي:

ص = م س + جـ ، حيث م ، جـ ∋ ح .

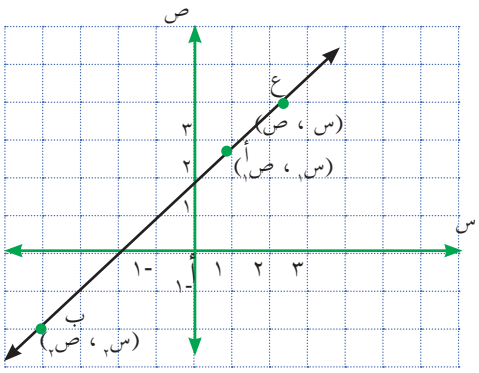
مِثال(١): أَجِدُ معادلة الخطّ المستقيم الذي مَيله = $\frac{٣}{٤}$ ، ويقطع محور الصّادات عند النُّقطة (٠ ، -٢).

الحل: معادلة الخط المستقيم هي ص = م س + جـ ، وبما أنّ م = $\frac{٣}{٤}$ ، والمقطع الصّاديّ جـ = -٢ ، يَنْتُجُ أنّ ص = $\frac{٣}{٤}$ س – ٢ .

نشاط تعاونيّ (٢): أُكْمِلُ الجدول الآتي:

معادلة الخط المستقيم	المَيل	المقطع الصّاديّ
ص = ٢س – ٥	٢	
ص= س		
ص = -٢		
٣ص = ٦ + ١٢س		٢

نشاط (٣): في الشَّكْل المجاور، ميل الخط المستقيم، بالاعتماد على النقطتين أ ، ب



$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

إذا كانت ع(س ، ص) نقطة واقعة على الخط المستقيم أب ، فإنَّ ميله = م = $\frac{ص - ص_١}{\square - \square}$

ومنه:

ص – ص١ = م (س – س١)

أو ص = م(س – س١) + ص١

تعريف: معادلة الخط المستقيم الّذي مَيله م، ويمرّ بالنُّقطة $(س_١ ، ص_١)$ هي: $ص = م (س - س_١) + ص_١$.

نشاط (٤):

أَجِدُ معادلة الخط المستقيم الّذي يمرّ بالنُّقطة أ (٢ ، ٣)، وميله يساوي ٤ :

معادلة الخط المستقيم الّذي مَيله م = ٤ ، ويمرّ بالنُّقطة (٢ ، ٣) هي:

ص = م (س – $س_١$) + $ص_١$، ومنها ص = ٤(س – ☐) + _____

إذن: ص = ٤س – ☐

ملاحظة: معادلة محور الصّادات هي س = ٠ ، ومعادلة محور السّينات هي ص = ٠

أُفَكِّر وأُناقش

ما معادلة الخط المستقيم الّذي يمرّ بالنُّقطة (-٣ ، ٤)، ويوازي محور السّينات؟

نشاط (٥):

أَجِدُ معادلة الخط المستقيم الّذي يمرّ بالنُّقطتَيْن أ (١ ، ٥)، ب (٤، ٣):

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} ،$$

ومنه: $\frac{ص - ٥}{س - ١}$ = _____

ومنها: ص – ٥ = $\frac{-٢}{٣}$ س + _____

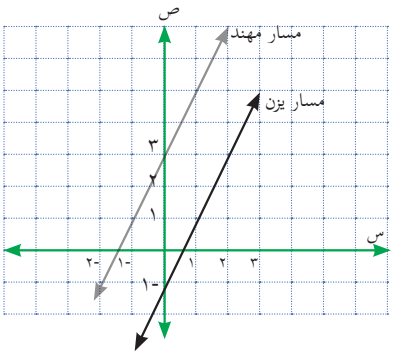
ص = _____.

نشاط (٦):

أَجِدُ معادلة الخط المستقيم الّذي مقطعه السّيني ٥ ، ومقطعه الصّاديّ ٣ :

المستقيم يمرّ بالنُّقطتَيْن (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، وبالتّالي فإنَّ: م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = $\frac{٣ - ☐}{٠ - ☐}$ = ___ ومنها: ص = $\frac{-٣}{٥}$ س + ٣

نشاط (٧): انطلق يزنُ ومهنّدٌ لممارسة رياضة الجري في مسارَيْنِ متوازيَيْن: الأوّل حَسَبَ الخطّ ص = ٢س − ١ ، والثّاني حَسَبَ الخطّ ص = ٢س + ٣.



مَيل الخط المستقيم الأوّل (مسار يزن) = ____

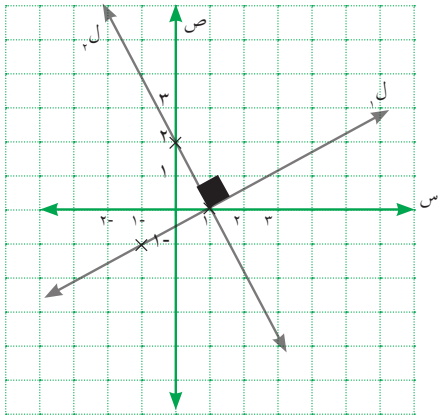
مَيل الخط المستقيم الثّاني (مسار مهنّد) = ___

ماذا أُلاحظ؟

أتعلّم : إذا توازى خطّان مستقيمان، فإنَّ مَيليهِما متساويان، والعكس صحيح.

نشاط (٨): الخط لمستقيم $ل_١$ يمرّ بالنُّقطتَيْن (١ ، ٠) ، (-١ ، -١)،

والخط المستقيم $ل_٢$ يمرّ بالنُّقطتَيْن (١ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، وهما متعامدان.



مَيل الخط المستقيم $ل_١$ = $م_١$ =

_____ = _____ ،

ومَيل الخط المستقيم $ل_٢$ =

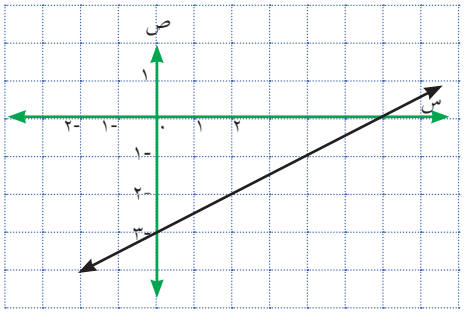
$م_٢$ = _____ = _____ ،

أَجِدُ: $م_١ \times م_٢$ = _____ = _____

أتعلّم : إذا تعامدَ خطّان مستقيمان، فإنَّ حاصل ضرب ميليهِما يساوي -١ ، والعكس صحيح.

تمارينُ ومسائِل

١ أَجِدُ معادلة الخطّ المستقيم في كلٍّ من الحالات الآتية:



أ الخط المستقيم الّذي مَيله $\frac{-٣}{٢}$ ، ومقطعه الصّاديّ ٤.

ب الخط المستقيم المارّ بالنُّقطتَيْن (٧ ، ١) ، (-٢ ، ٣).

جـ الخط المستقيم المارّ بنقطة الأصل، والنُّقطة (٢ ، -٣).

د الخط المستقيم في الشَّكْل المجاور.

٢ أَجِدُ معادلة كلٍّ من المستقيمات الآتية:

أ الخط المستقيم المارّ بنقطة الأصل، وعموديّ على المستقيم الّذي معادلته ٣س ـ ص ـ ١=٠

ب الخط المستقيم الّذي مقطعه السّيني ٣ ، ومقطعه الصّاديّ -٤.

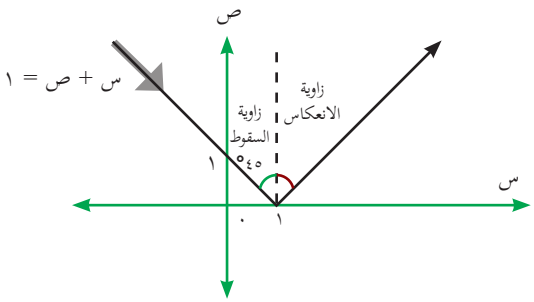
٣ أَجِدُ معادلة الخطّ المستقيم الموازي لمحور الصّادات، ويمرّ بالنُّقطة (-٣ ، ٤)، وأُمَثِّلُهُ بيانيّاً.

٤ أُبَيِّنُ أيّ النِّقاط الآتية تقع على الخط المستقيم الّذي معادلته: س + ٢ص = ٣

أ(٢ ، -٣) ، ب (٥ ، -١) .

٥ إذا كانت النُّقطة (١ ، -٢) تقع على الخط المستقيم الّذي معادلته أس + ٢ص ـ ٧ = صفر، أحسبُ قيمة أ .

٦ في الشَّكْل المجاور، أَجِدُ معادلة مسار الضّوء المنعكس عند النُّقطة (١ ، ٠)، إذا كانت معادلة الضّوء السّاقط* هي س + ص = ١.



٧ أَجِدُ قيمة هـ الّتي تجعل الخط المستقيم

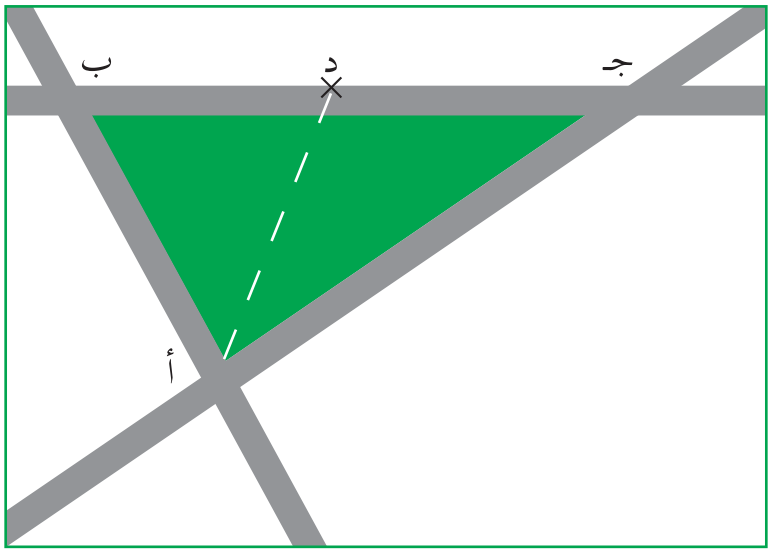
ص = (هـ + ٣) س + ٢

يوازي محور السينات (أُفُقِيّاً).

* قياس زاوية السقوط تساوي قياس زاوية الانعكاس.

(٣ -٥) القطع المتوسّطة للمُثَلَّث

نشاط (١): تشرف سلطة الأراضي الفِلَسطينيّة على تحديد الأراضي وإفرازها بين المواطنين، وتريد سلطة الأراضي تقسيم أرض مُثَلَّثة الشَّكْل بين شخصيْن بالتّساوي.



مِساحة المُثَلَّث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × _____

أنصف الضِّلْع ب جـ بالنُّقطة د ، وأصل بين أ ، د ، فيكون ب د = _____

مِساحة المُثَلَّث أ ب د = _____×_____×_____

مِساحة المُثَلَّث أ جـ د = _____×_____×_____

ما العلاقة بين مِساحة المُثَلَّثين؟

هل هناك طريقة أُخرى للتقسيم؟

تعريف: القطعة المتوسّطة في المُثَلَّث هي القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المُثَلَّث ومنتصف الضِّلْع المقابل له.

نشاط تعاونيّ: يوزّع المعلّم مجموعة من المُثَلَّثات المختلفة على مجموعات:

- نرسمُ القطع المتوسّطة في المُثَلَّثات.
- نلاحظُ أنّ القطع المتوسّطة في المُثَلَّث تقاطعت في _____.
- نقيسُ المسافة من رأس المُثَلَّث إلى نقطة تقاطع القطع المتوسّطة.
- نقيسُ المسافة بين نقطة تقاطع القطع إلى منتصف الضِّلْع.

ماذا نلاحظ؟

أَتَعَلَّم:

- تتقاطع القطع المتوسّطة للمُثَلَّث في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع القطع المتوسّطة، تُقَسِّمُ كلُّ قطعة منها بنسبة ٢ : ١ من جهة أي رأس.

نشاط (٢): في المُثَلَّث المجاور:

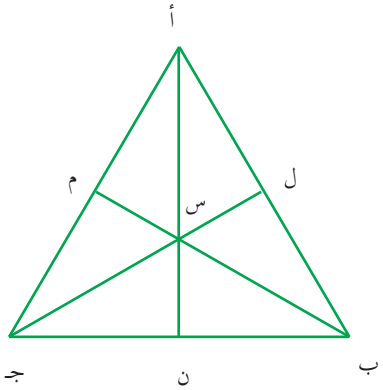
المُثَلَّث أ ب جـ ، فيه: ل منتصف أ ب، ن منتصف ب جـ، م منتصف أ جـ ،

س جـ = ٨ سم، س م = ٣ سم.

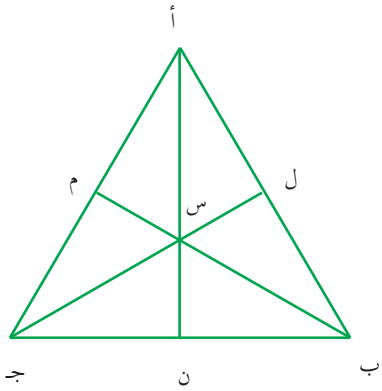
جـ س : ل س = ٢ : ١

ل س = ٤ سم .

ب س = _____ سم.



نشاط (٣): المُثَلّث أ ب جـ ، فيه: ل منتصف أ ب، ن منتصف ب جـ، م منتصف أ جـ .



جـ س = $\frac{٢}{٣}$ جـ ل .

أ س = ____ أ ن .

ب س = ____ ب م .

ل س = $\frac{١}{٣}$ جـ ل .

ن س = ____ أ ن .

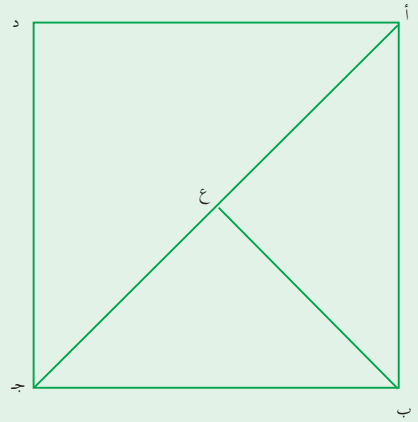
م س = ____ ب م

أُفَكِّر وأُناقش

أ ب جـ د مربّع ، ب ع قطعة متوسّطة في المُثَلَّث أ ب جـ.

أ) ما العلاقة بين المُثَلَّث أ ب ع والمُثَلَّث جـ ب ع ؟

ب) ما العلاقة بين مِساحة المُثَلَّث أ ب ع ، والمربّع أ ب جـ د ؟



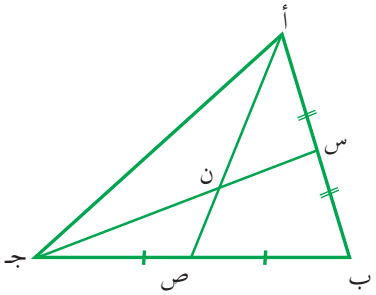
تمارينُ ومسائِل

١ في المُثَلَّث المجاور، أرسمُ القطع المتوسّطة فيه.

٢ أ ص ، جـ س قطع متوسّطة في المُثَلّث أ ب جـ، وطول $\overline{\text{ن ص}}$ = ٦ سم، أَجِدُ:

أ طول $\overline{\text{أ ن}}$.

ب طول $\overline{\text{أ ص}}$.

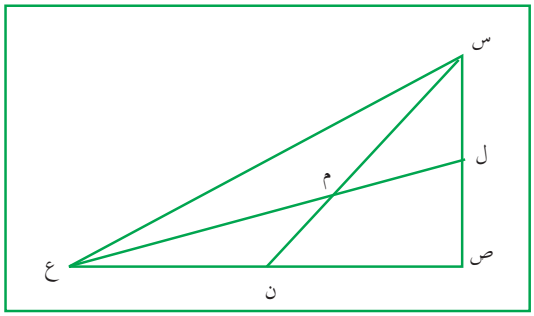


٣ س ص ع مُثَلَّث قائم الزّاوية في ص ، ن منتصف ص ع ، ل منتصف س ص،

س ص = ٨سم، ص ع = ١٢ سم، م نقطة التقاء القطع المتوسّطة، أَجِدُ:

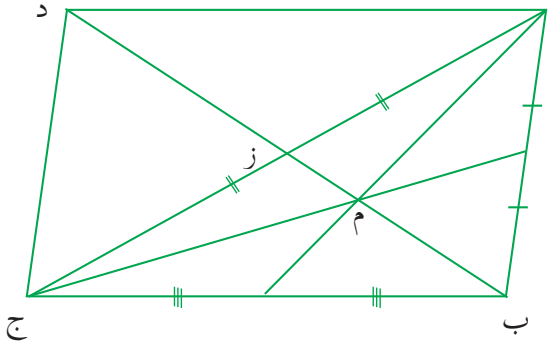
أ م ع .

ب م ن .



٤ أب جـ د متوازي أضلاع، إذا كانت ز نقطة تقاطع القطرين، ب د = ٢٤ سم، م نقطة تلاقي القطع المتوسّطة للمُثَلَّث أ ب جـ ،

أَجِدُ م ز .



(٣-٦) تمارينُ عامّة

١ أختارُ رمز الإجابة الصَّحيحة فيما يأتي:

١ ما نوع المُثَلَّث النّاتج من التقاء القطع المستقيمة الواصلة بين النّقاط: أ (٠ ، ٠) ب (٦ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٨) :

أ) منفرج الزّاوية. ب) متساوي السّاقَيْن.

جـ) قائم الزّاوية. د) متساوي الأضلاع.

٢ طول القطعة أ ب يساوي ٢ وحدة، إحداثيّات النُّقطة أ(٠ ، ٠)، فما إحداثيّات النُّقطة ب؟

أ) (١ ، ١) ب) (٢ ، ٢) جـ) (٢ ، ٠) د) ($\sqrt{٢}$ ، ٠)

٣ إذا كانت (٤ ، -٣) منتصف أب ، حيث أ (٣ ، -٤)، فما إحداثيّ ب؟

أ) (٥ ، -٢). ب) (٥ ، ٢). جـ) (٢ ، ٥). د) (- ٢ ، ٥).

٤ ما مَيل الخط المستقيم المارّ بالنُّقطتَيْن أ (٠ ، ١)، ب (٦ ، ٣)؟

أ) ٣ ب) -٣ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) - $\frac{١}{٣}$

٥ ما المقطع الصّاديّ للخط المستقيم الّذي معادلته ٣ص = ٢س – ١٢؟

أ) ٤ ب) -٤ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) ٣

٦ ما معادلة الخط المستقيم الّذي يمرّ بنقطة الأصل، والنُّقطة (-١ ، ٥)؟

أ) ص = ٥ ب) ص = ٤ جـ) ص = س + ٥ د) ص = -٥س

٧ ما المسافة بين النُّقطة (-٣ ، ٤)، ونقطة الأصل؟

أ) ٥ ب) -٣ جـ) ٤ د) ٢٥

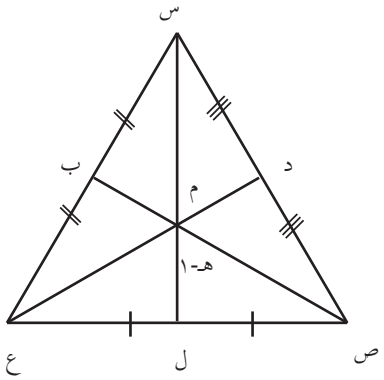
٢ خط مستقيم، مَيله $\frac{١}{٥}$ ، ومقطعه الصّاديّ يساوي ٢ ، أَجِدُ:

أ) معادلة الخط المستقيم. ب) نقطة تقاطعه مع محور السّينات.

٣ في الشَّكْل المقابل، إذا كان م ل = هـ – ١ ، س ل = ٩ سم، أَجِدُ:

أ) قيمة هـ.

ب) طول س م .



٤ أَجِدُ معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة أ ب ، حيث أ(٢ ، ٣)، ب (-٢ ، ٥).

٥ ما طول نِصْف قُطر الدّائرة الّتي مركزها (٤ ، ٧)، وتمرّ بالنُّقطة (١ ، ٣)؟

٦ إذا كانت أ(٦ ، -٢)، ب(٢جـ ، جـ)، وكان البُعْدُ بين النُّقطتَيْن أ ، ب يساوي ١٠ وحدات، أَجِدُ إحداثيّاتِ النُّقطة ب .

مشروع الوحدة:

مقياس رسم الخريطة هو نسبة ما بين الأبعاد على الطبيعة والأبعاد على الخريطة، حيث تُمَثِّلُ الأبعادُ الحقيقيّةُ الطبيعيةَ على الخرائط بأبعاد أقل من الحقيقيّة؛ لتسهيل قراءة الخرائط.

بالتعاون مع أفراد مجموعتي، أختارُ مقياس رسم مناسب، وأضعُ خريطة فِلَسطين في المستوى الدّيكارتِيّ، بالاعتماد على مقياس الرّسم الّذي اخترتُه، أَحْسِبُ:

١. المسافة التقريبيّة بين القدس وجنين.
٢. المسافة التقريبيّة بين القدس وغزّة، ثُمَّ أقارنُ بين المسافتَيْن.
٣. أُحدِّدُ موقع أريحا، والخليل، وعكّا بالنّسبة للعاصمة القدس. (أعتبرُ أنّ محور السّينات الموجب: الغَرب)
٤. أختارُ ٣ مدنٍ تقع على خطّ مستقيم، وأحسبُ معادلته.

روابط مقترحة

Graphic calc
Math a+

الوحدة ٤

الإحصاء

أتأمَّلُ الصّورة:

أحراش يعبد محميّة طبيعيّة، أشجارها متنوعة. هل يمكن تصنيف أشجارها من حيثُ النوع؟

يُعَدّ الإحصاء أساساً يُعتمَدُ عليه في رسم أيّ خُطّة مستقبليّة، فالطلبة قادرون على جمع البيانات، وتنظيمها في جداول تَكراريّة، وتوظيفها في حلِّ مسائلَ مرتبطةٍ بمقاييس النَّزْعة المركزيّة، ومقاييس التّشتُّت؛ لتنعكسَ إيجاباً على خططهم.

يُتَوَقَّعُ من الطّلبة بعد الانتهاء من دراسة الوَحْدة أن يحقّقوا الأهداف الآتية:

١) تنظيم البيانات في جدول تَكراريّ ذي فئات.

٢) تمثيل التّوزيعات التَّكراريّة بيانيّاً.

٣) إيجاد مقاييس النَّزْعة المركزيّة لبيانات مبوّبة في جدول.

٤) إيجاد الإنحراف المعياريّ لبيانات مبوّبة في جدول.

(٤-١) الجداول التَّكراريّة

بناء الجدول التَّكراريّ:

نشاط (١): تتعرّض محافظة القدس إلى عُدوان مستمرّ من سلطات الاحتلال الإسرائيليّ على المقدّسات الإسلاميّة، وعلى سكّانها الفِلَسطينيّينَ، وما نتج عنه من خسائرَ في الممتلكاتِ والأرواح؛ فقد بلغ عدد الشهداء في محافظة القدس خلال الفترة ١٩٩٤- ٢٠١٥م، حَسَبَ إحصائيّة الجهاز المركزيّ للإحصاءِ الفِلَسطينيّ ١٥٦ شهيداً، وكان عدد الشّهداء موزَّعاً حَسَبَ السّنوات كما يأتي:

١٥	٦	٨	٣	٤	٣	١٥	١٩	١٦	٥	٢				
٢	٢	٩	٢	١	٠	٣	١	١	١٥	٢٤				

ويمكن تمثيل البيانات بجدول تَكراريّ.

أُكْمِلُ الجدول التَّكراريّ:

عدد الشّهداء	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٨	٩	١٥	١٦	١٩	٢٤
عدد السّنوات	١				١					٣			

عدد السنوات الّتي لم يكن فيها شهداء خلال الفترة ١٩٩٤ – ٢٠١٥م هو سنة واحدة.

عدد السنوات الّتي كان فيها شهيدان في السنة هو..... .

ماذا لو كانت البيانات عددها كبير؟ هل يمكن الحصول على المعلومات المطلوبة بسهولة؟

نشاط (٢): تُمَثِّلُ البيانات الآتية علامات ٢٦ طالباً في الصف الحادي عشر في مادّة الرياضيّات:

٣٠	٢٤	٢٣	١١	١٢	٢٢	٢٥	١٢	١٤	١٣	١٤	٢٥	٣٠	
٢٧	٢٨	٢٩	٣١	٢٠	٢٠	١٩	١٤	٢٥	١٢	١٦	١٧	١٨	

مدى العلامات = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ...

عدد العلامات الّتي تبدأ من ١١ ، وتنتهي عند ١٧ هو..... .

عدد العلامات الّتي تبدأ من ١٨ ، وتنتهي عند ٢٤ هو..... .

عدد العلامات الّتي تبدأ من ٢٥ ، وتنتهي عند ٣١ هو..... .

أتعلّم: طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$.

ملاحظة: إذا كان النّاتج في طول الفئة عدداً عشريّاً، يفضّل أن يُقَرَّبُ إلى العدد الصحيح الذي يليه مباشرة.

الفئة: هي مجموعةٌ تحوي عدداً من القيم المتقاربة.

نشاط (٣): تُمَثِّلُ البيانات الآتية علامات (٣٠) طالباً في أحد امتحانات اللغة العربية:

١٤	١٦	٢٠	٢٣	١٠	١٣	١٧	٢١	٢٩	١٨	١٢	١٩	٢٠	
٢٣	٢٧	٢٥	٢٢	٢١	٢٥	٢٩	١٨	٢٠	٢٨	٢٤	١٧	٢١	
٢٥	٢٤	٢٢	١٨										

ويمكن تصنيف البيانات إلى خمس فئات:

مدى البيانات = ...

طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$ = ...

أختارُ الحدّ الأدنى للفئة الأولى، وليكن أصغر قيمة في البيانات، وهي .....

الحد الأعلى للفئة الأولى = الحد الأدنى + طول الفئة – ١

= ..... + ... – ١ =.....

أُكْمِلُ الجدول الآتي:

الفئات	١٠ – ١٣	١٤ – ...	... – ...	٢٢ – ٢٥	٢٦ – ٢٩
الإشارة	///		### ###		////
العدد	٣			٩	

عدد الطلبة الّذين تتراوح علاماتهم بين ١٠ – ١٣ هو ..... .

الفئة الّتي عدد طَلَبَتِها ٤ هي ..... .

عدد الطلبة الّذين علاماتهم أكبر من ٢٢ هو ..... .

نشاط (٤): تُمَثِّلُ البيانات الآتية الأجر الأسبوعيّ بالدّينار، مكوّنة من (٥٠) عاملاً يعملون في إحدى المؤسسات:

٥٠ ٦٠ ٧٦ ٨٤ ١٠٢ ٦٨ ٨٤ ١٠٨ ٦٨ ٨٤ ٧٨ ٨٠ ١٠٠ ٥٢ ١٠٤ ٧٦ ٩٤

٧٠ ١٠٦ ٥٦ ٦٨ ٨٢ ٧٠ ٦٢ ٨٢ ٧٢ ١٠٦ ٨٢ ٧٢ ٦٤ ٧٤ ٨٨ ٩٠ ٧٤

٩٠ ٩٢ ٥٨ ٩٢ ٧٦ ٩٦ ٨٠ ٦٦ ٨٨ ٩٠ ٨٨ ٨٠ ٦٢ ٩٤ ٨٦ ٥٤

ويمكن تفريغ البيانات في جدول توزيع تَكراريّ، عدد فئاته ٦.

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ...

طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$ = —— ≈ .....

أُكْمِلُ الجدول الآتي:

الفئات	٥٠ – ٥٩			٨٠ – ٨٩			المجموع
التّكرار	٥						

تمارينُ ومسائِل

١ أُنظِّمُ البياناتِ الآتيةَ في جدولٍ تَكراريّ، عددُ فئاتِهِ (٥):

٣٤	٣٤	٣٨	٣٥	٤٣	٤٨	٤٦	٢٧	٣٠	٣١	٣٢	٣٧	٤٠
٣٩	٣٨	٢٦	٣١	٣٤	٣١	٣٦	٤١	٢٦	٣٢	٣٠	٣٣	٣٩
٣٤	٤٤	٣٣	٣٨	٣٥	٣٥	٣٧	٤٠	٢٨	٣١	٣٥	٣٧	٤٢
٤٩	٢٩	٣٠	٣٢	٣٩	٤٤							

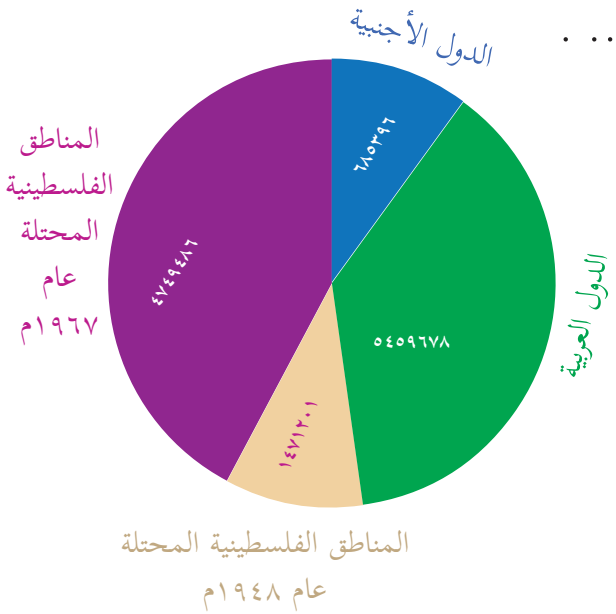
٢ أَجِدُ قيمة أ، ب، جـ، د في الجدول التَّكراريّ الآتي:

الفئات	١ – أ	٤ – ب	جـ – د	١٠ – ١٢
التكرار	٢	١	٤	١٣

(٤-٢) التَّمثيل البيانيّ للجداول التَّكراريّة ذات الفئات

نشاط (١): بسبب ظروف الاحتلال، هاجر كثير من الفِلَسطينيّينَ إلى شتّى بقاع الأرض بحثاً عن مصادر رزقهم، وقام الجهاز المركزيّ للإحصاء الفِلَسطينيّ بتقدير عدد السُّكّان الفِلَسطينيّين، حَسَبَ مكان الإقامة نهاية ٢٠١٥م، كما في الشَّكْل الآتي:

التّوزيع السكّانيّ لعدد الفلسطينيّين حسب مكان الإقامة نهاية ٢٠١٥



التَّمثيل المجاور للبيانات يُسَمّى ..... .

عدد السُّكّان الفِلَسطينيّينَ في المناطق الّتي احتُلّتْ عام ١٩٦٧ هو ٤٧٤٩٤٨٦.

عدد السُّكّان الفِلَسطينيّينَ في المناطق التي احتلت عام ١٩٤٨م هو ..... .

مجموع السُّكّان الفِلَسطينيّينَ في جميع المناطق هو ..... .

تعرّفنا إلى تمثيل البيانات بعدّة طرق، منها: القطاعات الدّائرية، والمُضّلّعات، والمُنحنى التَّكراريّ، وهناك طرق أُخرى لعرض البيانات المكتوبة في جدول تَكراريّ ذي فئات.

أوّلاً- المدرَّج التَّكراريّ:

المدرَّج التَّكراريّ: هو عبارة عن تمثيل الجداول التَّكراريّة بوساطة مستطيلات متلاصقة، ويتم تعيين الحدود الفعلية على المحور الأفقيّ والتَّكرارات على المحور العموديّ.

أتعلّم: الحدّ الفعليّ الأدنى = الحد الأدنى – ٠,٥ .

الحدّ الفعلي الأعلى = الحد الأعلى + ٠,٥ .

نشاط (٢): يبيع محلٌّ ما هدايا قلائد، إذا كان طول (٦٠) قلادة بالسّنتمير مُمَثَّلَةً بالجدول التَّكراريّ الآتي، أُكْمِلُ الجدول:

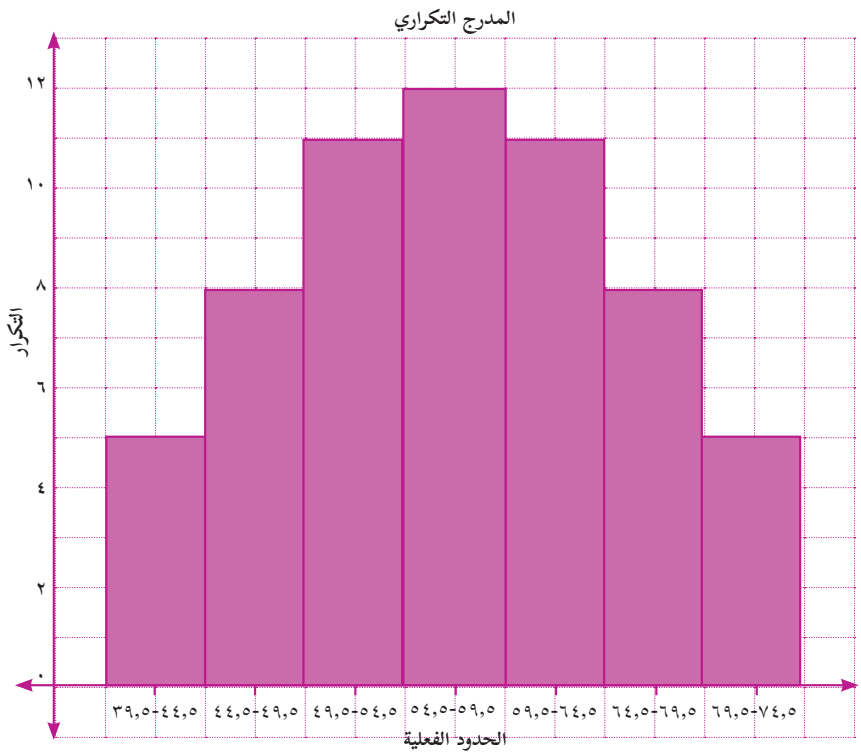
الفئات	٤٠ – ٤٤	٤٥ – ٤٩	٥٠ – ٥٤	٥٥ – ٥٩	٦٠ – ٦٤	٦٥ – ٦٩	٧٠ – ٧٤
التكرار	٥	٨	١١	١٢	١١	٨	٥
الحدود الفعلية	٣٩,٥ -٤٤,٥						

ويمكن تمثيل البيانات بالمدرَّج التَّكراريّ باتّباع الخطوات الآتية:

١- رسم محوريْنِ متعامديْن، بحيث يُمَثِّلُ المحورُ الأفقيّ محورَ السّينات، والمحورُ العموديّ _____.

٢- إيجاد الحدود الفعليّة، وتعيينها على المحور الأفقيّ.

٣- تعيين التَّكرار على المحور العموديّ.



من الرسم السّابق، أَجِدُ أنّ: أكثر الأطوال مبيعاً هي.....، وفئتها هي ..... .

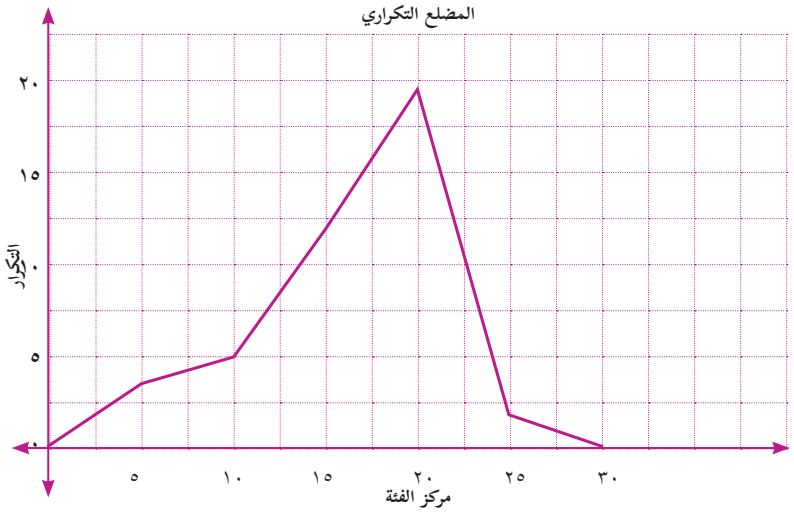
ثانياً- المُضَلَّع التَّكراريّ: هو عبارة عن مُضَلَّع مغلق، يَنْتُجُ من توصيل النِّقاط الّتي إحداثيّاتُ كلٍّ منها(مركز الفئة، تكرار الفئة)، ولكي يصبح المُضَلَّع مغلقاً، نُعَيِّنُ مركز فئة سابقة، تَكرارها صفر، ومركز فئة لاحقة، تكرارها صفر.

أَتَعَلَّمُ : مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$.

نشاط (٣): يُمَثِّلُ الجدول التَّكراريّ الآتي علاماتِ (٤٠) طالبةً في امتحان الرياضيّات. أُكْمِلُ الجدول:

الفئات	٣ – ٧	٨ – ١٢	١٣ – ١٧	١٨ – ٢٢	٢٣ – ٢٧
التَّكرار	٣	٥	١٢	١٨	٢
مركز الفئة			١٥		٢٥

ويمكن تمثيل البيانات بالمُضَلَّع التَّكراريّ الآتي:



المحور الأُفُقيّ يُمَثِّلُ .....

المحور العموديّ يُمَثِّلُ ..... .

عدد الطّلبة الّذين تقلّ علاماتهم عن ١٣ هو ..... .

تَكرار الفئة الّتي مركزها ٢٠ ..... .

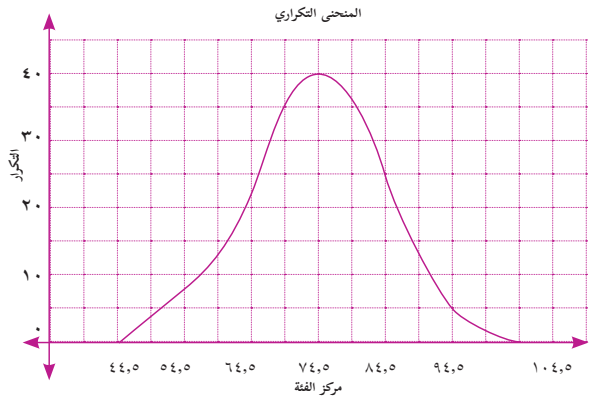
ثالثاً- المنحنى التَّكراريّ:

المنحنى التَّكراريّ: هو منحنى مقفل بسيط، يوضِّح أيّ القيم تَكرارها أكثر من الأُخرى، ويَنْتُجُ المنحنى من توصيل النِّقاط الّتي إحداثيّاتُ كلٍّ منها(مركز الفئة، والتَّكرار المقابل لها)، ولكي يصبح المنحنى مقفلاً، نُعَيِّنُ مركز فئة سابقة، تَكرارها صفر، ومركز فئة لاحقة، تكرارها صفر.

نشاط (٤): يُمَثِّلُ الجدول التَّكراريّ الآتي فئاتِ كُتَلِ (١٠٠) موظّف بالكيلوغرام في إحدى المؤسسات، أُكْمِلُ الجدول:

الفئات	٥٠ – ٥٩	٦٠ – ٦٩	٧٠ – ٧٩	٨٠ – ٨٩	٩٠ – ٩٩
التّكرار	٨	٢٢	٤٠	٢٥	٥
مركز الفئة	٥٤,٥				

ويمكن تمثيل البيانات بالمنحنى التّكراريّ الآتي:



المحور الأُفقيّ يُمَثِّلُ .....

المحور العموديّ يُمَثِّلُ .....

مركز الفئة الأكثر تكراراً هو .....

عدد الموظّفين الّذين كُتَلُهم أقلّ من ٧٠ كغم هو ..... .

رابعاً- المنحنى التّكراريّ المتجمّع الصّاعِد:

نشاط (٥): يُمَثِّلُ الجدول التّكراريّ الآتي توزيع علامات ٥٠ طالباً في مادّة اللّغة الإنجليزيّة:

الفئات	٥٠ – ٥٩	٦٠ – ٦٩	٧٠ – ٧٩	٨٠ – ٨٩	٩٠ – ٩٩	المجموع
التّكرار (عدد الطلبة)	٣	٥	١٨	١٦	٨	٥٠

من الجدول السابق، أُلاحظُ أنّ:

عدد الطّلبة الحاصلين على علامة ٦٩ وأقل هو: ٥ + ٣ = ٨ طلّاب.

عدد الطّلبة الحاصلين على علامة ٨٩ وأقل هو ..... .

أتعلّم : التّكرار المتجمّع الصّاعِد (التّكرار التّراكميّ): هو مجموع كلّ تكرار مع جميع التّكرارات الّتي تسبقه.

المنحنى التّكراريّ المتجمّع الصّاعِد: هو منحنى تتجمّع فيه التّكرارات على التّوالي من أحد طرفيه إلى طرفه الآخر، وصولاً إلى التّكرار الكُلّيّ، ويَنْتُجُ المنحنى من توصيل النّقاط الّتي إحداثيّاتُ كلٍّ منها (الحدود الفعليّة العليا، والتّكرار المتجمّع الصّاعِد).

نشاط (٦): يُمَثِّلُ الجدول التّكراريّ الآتي فئاتِ الأجور الأسبوعية لـ(١٠٠) عامل بالدّينار. أُكْمِلُ الجدول الآتي:

الفئات	التّكرار	الحدود الفعليّة العليا	التّكرار المتجمّع الصّاعِد
٧٠ – ٧٩	٨	٧٩,٥	٨
٨٠ – ٨٩	٢٢		٣٠
٩٠ – ٩٩	٤٠		
١٠٠ – ١٠٩	٢٥		
١١٠ – ١١٩	٥		١٠٠

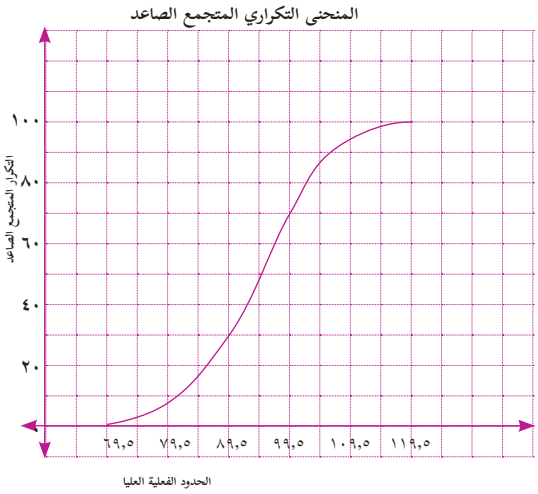
ويمكن تمثيل البيانات بالمنحنى التّكراريّ المتجمّع الصّاعِد كما يأتي:

المحور الأفقيّ يُمَثِّلُ.....

المحور العموديّ يُمَثِّلُ.....

الحدّ الفعليّ الأعلى لفئة الأجور الّتي تَكرارها المتجمّع الصّاعِد ٣٠ هو ٨٩,٥.

عدد العمال الّذين أجورهم أكثر من ٩٩,٥ ديناراً هو..... (لماذا؟)



تمارينُ ومسائِل

١ يُمَثِّلُ الجدول التَّكراريّ الآتي كُتَلَ (٤٢) طالباً بالكيلوغرام من طلبة الصَّفّ السّابع في مدرسة الشُّهداء:

فئات الكُتَل	٤٠ – ٤٤	٤٥ – ٤٩	٥٠ – ٥٤	٥٥ – ٥٩	٦٠ – ٦٤
التّكرار (عدد الطّلبة)	٥	١٠	١٢	٨	٧

(أ) أرسمُ المدرَّج التَّكراريّ لهذا التّوزيع.

(ب) أرسمُ المُضّلَّع التَّكراريّ لهذا التّوزيع.

٢ أُمَثِّلُ الجدول التَّكراريّ الآتي بالمنحنى التَّكراريّ، والمنحنى التَّكراريّ المتجمّع الصّاعِد:

الفئات	٣ – ٥	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧	١٨ – ٢٠
التّكرار	٤	٥	٦	٧	٥	٣

أُناقش: ما الفرق بين المنحنى التَّكراريّ، والمنحنى التَّكراريّ المتجمّع الصّاعِد؟

(٤-٣) مقاييس النَّزْعة المركزيّة للجداول التَّكراريّة

نشاط (١): تتعدّد المؤسّسات الثّقافيّة في فِلَسطين، من مراكزَ ثقافيّة، ومَتاحِفَ، وغيرِها. قام الجهاز المركزيّ للإحصاء الفِلَسطينيّ في العام ٢٠١٥م برصد عدد المراكز الثّقافيّة العاملة في ١٦ محافظةً فِلَسطينيّة، فكانت كالآتي:

٦٩	١٢	٤٥	٨٩	٢٩	١٣	٣٢	١٢	٥٠	
٨١	٨٣	١٦	٣٠	١٧	٩	٩			

معدل عدد المراكز الثّقافيّة:

$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} =$ _____ = ... مركز ثقافيّ.

ترتيب القيم تصاعديّاً: ٩، ٩، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ، ٨٩،

الوسيط لعدد المراكز الثّقافيّة = ٢٩,٥ (لماذا؟)

المنوال لعدد المراكز الثّقافيّة هو ..... وَ .....

أوّلاً- الوسط الحسابيّ للجداول التَّكراريّة:

أتعلّم: $\overline{س} = \frac{\sum (س \times ت)}{\sum ت}$ حيث: $\overline{س}$: الوسط الحسابيّ، $\sum ت$: مجموع التّكرارات،

س: مركز الفئة، $\sum$: رمز المجموع.

نشاط (٢): الجدول التّكراريّ الآتي يُمَثِّلُ علاماتِ (٢٠) طالبةً في امتحان لمادّة ما:

أُكْمِلُ الجدول:

الفئات	التّكرار (ت)	مركز الفئة (س)	س× ت
٥ – ٩	٥		٣٥
١٠ – ١٤	٢	١٢	
١٥ – ١٩	٦		
٢٠ – ٢٤	٣	٢٢	
٢٥ – ٢٩	٤		
المجموع			

ويمكن إيجاد الوسط الحسابيّ لعلامات الطالبات:

$\sum$(س×ت) = ...

$\overline{س} = \frac{\sum(س \times ت)}{\sum ت}$ = ...

ثانياً- الوسيط للجداول التّكراريّة:

سبق وأن أوجدت الوسيط للبيانات غير مكتوبة في جدول تَكراريّ، وهو القيمة الّتي يسبقها من القيم يساوي ما يليها من القيم، ولإيجاد الوسيط للجداول التّكراريّة، فإنَّ الوسيط يساوي القيمة في الحدود الفعليّة العليا الّتي تَكرارها التراكميّ هو مجموع التّكرارات مقسوماً على ٢.

أتعلّم: رتبة الوسيط للجدول التّكراريّ هي مجموع التّكرارات مقسوماً على ٢. وبالرّموز:

رتبة الوسيط = $\frac{\sum ت}{٢}$.

نشاط (٣): تنظم وزارة التّربية والتعليم مسابقاتِ ثقافيّةً، كانت إحدى تلك المسابقات عن إلقاء قصيدة للقدس، اختارت إحدى المديريّات ٢٨ طالباً من طلبة الصّفّ التّاسع؛ للمشاركة في المسابقة. يمكن إيجاد الوسيط لزمن إلقاء القصيدة؛ كي يترشّح الطّالب للمسابقة، وكانت نتائجهم في الجدول التّكراريّ الآتي:

الفئات (الزّمن بالدّقائق)	٢ – ٤	٥ – ٧	٨ – ١٠	١١ – ١٣	١٤– ١٦
التّكرار	٢	٥	٧	١٠	٤
الحدود الفعليّة العليا	١,٥-٤,٥	٤,٥-٧,٥			
التّكرار التّراكميّ	٢		١٤		

أُكْمِلُ الجدول السّابق.

رتبة الوسيط = $\frac{\sum ت}{٢}$ = ١٤

الحدّ الفعليّ الأعلى الّتي يقابلها رتبة الوسيط هو..... .

الوسيط لزمن إلقاء القصيدة؛ كي يترشّح الطّالب للمسابقة هو ١٠,٥ دقائق.

مِثال: يُمَثِّلُ الجدول التّكراريّ الآتي عدد السّاعات الّتي يقضيها (١٠) أشخاص في المطالعة:

الفئات	١ – ٥	٦ – ١٠	١١ – ١٥	١٦ – ٢٠
عدد الأشخاص	٢	٤	٣	١

أَجِدُ الوسيط لعدد السّاعات الّتي يقضيها الشّخص في المطالعة.

الحل: ١) أَجِدُ الحدود الفعليّة العليا، والتّكرار التّراكميّ للجدول التّكراريّ.

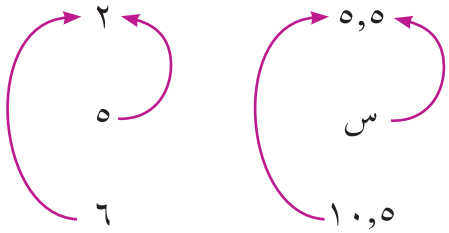
الفئات	التكرار(ت)	الحدود الفعلية العليا	التكرار التراكمي
١ – ٥	٢	٥,٥	٢
٦ – ١٠	٤	١٠,٥	٦
١١ – ١٥	٣	١٥,٥	٩
١٦ – ٢٠	١	٢٠,٥	١٠

٢) رتبة الوسيط = $\frac{\sum ت}{٢}$ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

رتبة الوسيط تقع في التّكرار التّراكميّ بين ٢، ٦.

٣) أُعَيِّنُ الفئة الوسيطيّة؛ لأنّ الوسيط يقع ضمنها.

الفئة الوسيطيّة هي ٥,٥ ــ ١٠,٥



٤) $\frac{س - ٥,٥}{٥,٥ - ١٠,٥}$ = $\frac{٥ - ٢}{٦ - ٢}$ (لماذا؟)

$\frac{س - ٥,٥}{٥}$ = $\frac{٣}{٤}$

٥) بالضّرْب التّبادليّ: س ــ ٥,٥ = $\frac{١٥}{٤}$ ، ومنها: س = ٥,٥ + $\frac{١٥}{٤}$ = ٩,٢٥

ومنها: الوسيط = ٩,٢٥.

ثالثاً- المنوال للجداول التَّكراريّة:

نشاط (٤): أُكْمِلُ الجدول التَّكراريّ الآتي:

الفئات	١ – ٥	٦ – ١٠	١١ – ١٥	١٦ – ٢٠
ت	٢	٤	٣	١
مركز الفئة	٣			١٨

الفئة الأكثر تَكراراً هي ..... .

مركز الفئة الأكثر تكراراً هو..... .

أَتَعَلَّم : المنوال للجداول التَّكراريّة: هو مركز الفئة الأكثر تَكراراً.

نشاط (٥): أَجِدُ المنوال للجدول التَّكراريّ الآتي الّذي يُمَثِّلُ توزيع علامات (٣٢) طالباً في إحدى المباحث:

الفئات	٤٠ – ٤٤	٤٥ – ٤٩	٥٠ – ٥٤	٥٥ – ٥٩	٦٠ – ٦٤	٦٥ – ٦٩
التَّكرار	٢	٦	٨	٧	٥	٤

المنوال: .....

تمارينُ ومسائِل

١ يُمَثِّلُ الجدول الآتي كُتَلَ أمتعةِ مجموعةٍ من المسافرين بالكيلوغرام:

الفئات	١٠ – ١٥	١٦ – ٢١	٢٢ – ٢٧	٢٨ – ٣٣	٣٤ – ٣٩	٤٠ – ٤٥
عدد المسافرين	١٢	١٥	٢٠	١٣	١٢	٨

أَحْسِبُ قيمة ما يأتي:

أ الوسط الحسابيّ. ب الوسيط. ج المنوال.

٢ يُمَثِّلُ الجدول الآتي عدد ساعات العمل الإضافيّ لـ (٣٠) عاملاً يعملون في إحدى الشّركات، خلال أسبوع:

مركز الفئة	٧	١٠	١٣	١٦
عدد العُمّال	٢	١٤	٨	٦

أُجيبُ عما يأتي:

أ ما الحدود الفعليّة لعدد ساعات العمل الإضافيّ الّتي مركزُها (١٠)، علماً أنّ الحدّ الأدنى للفئة الأولى هو ٦؟

ب ما معدّل عدد ساعات العمل الإضافيّ للعُمّال في هذه الشركة؟

ج ما القيمةُ الّتي يحصل ٥٠٪ من العُمّال على عدد ساعات عمل إضافي أَقلّ منها، و ٥٠٪ منهم يحصلون على عدد ساعات عمل إضافي أعلى منها؟

د ما فئةُ عدد ساعات العمل الإضافيّ الأكثر تَكراراً؟

(٤-٤) الانحراف المعياريّ للجداول التّكراريّة

نشاط (١): قام الجهاز المركزيّ للإحصاء الفِلَسطينيّ برصد عدد حوادث الطُّرق في فِلَسطين حَسَبَ الشَّهر، للعام ٢٠١٤م، وكان عدد الحوادث كما يأتي:

٦٤٧	٥٩٣	٦١٨	٦٧٤	٧٤٦	٦٦٠
٦٤٩	٦٨٥	١١٧٩	٥٥٨	٥٧٤	٥٩٤

المعدل الشهري لعدد حوادث الطُّرق هو ..... .

أكثر القيم بُعْداً عن المعدّل هي ١١٧٩(لماذا؟)

أقرب قيمة على المعدّل هي ..... .

أتعلّم: الانحراف المعياريّ للجداول التّكراريّة: هو الجذر التّربيعيّ لمجموع حاصل ضرب التّكرارات في مربّع انحراف مراكز الفئات عن الوسط الحسابيّ مقسوماً على مجموع التّكرارات، ويُعَبَّرُ عنه بالعلاقة الآتية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum ت \times (س - \overline{س})^2}{ن}}$$ ، حيث:

ت: تَكرار الفئة، ن: مجموع التّكرارات، س: مركز الفئة، $\overline{س}$: الوسط الحسابيّ.

نشاط (٢): يمثل الجدول الآتي توزيع علامات الطّلبة للصّفّ التّاسع في مادّة الرّياضيّات:

أُكْمِلُ الجدول:

الفئات	التّكرار (ت)	مركز الفئة (س)	س × ت	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 \times ت$
٣٥ – ٢٧	١	٣١	٣١		
٤٤ – ٣٦	٥	٤٠			
٥٣ – ٤٥	٦				
٦٢ – ٥٤	٨				
٧١ – ٦٣	٧				
٨٠ – ٧٢	٧				
٨٩ – ٨١	٦	٨٥			
المجموع					

$\overline{س}$ = ...

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^2 \times ت}{ن}} = ...$$

تمارينُ ومسائِل

١ أَحْسِبُ الانحراف المعياري لجدول التّوزيع التّكراريّ الآتي، والّذي يُبَيِّنُ علامات ٣٠ طالباً في امتحان اللّغة العربيّة:

الفئات	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧	١٨ – ٢٠	٢١ – ٢٣	٢٤ – ٢٦
التّكرار	٣	٨	١٠	٧	٢

٢ الجدول التّكراريّ الآتي يُمَثِّلُ علاماتِ (٢٠) طالباً في امتحانٍ لمادّة الإحصاء:

الفئات	٥ – ٩	١٠ – ١٤	١٥ – ١٩	٢٠ – ٢٤	٢٥ – ٢٩
التّكرار(ت)	٥	١	٣	٧	٤

أَحْسِبُ الانحراف المعياريّ لعلامات الطلبة.

(٤-٥) تمارينُ عامّة

١ أضعُ دائرة حول رمز الإجابة الصَّحيحة فيما يأتي:

١ يتكوّن جدول التّوزيع التّكراريّ من عموديْنِ على الأقلّ، ما هما؟

أ) الفئات، والحدود الفعليّة. ب) التّكرار، ومراكز الفئات.

جـ) الفئات، والتّكرار. د) الفئات، والتّكرار المتجمّع الصّاعِد.

٢ عند تمثيل الجدول التّكراريّ بالمنحنى التّكراريّ المتجمّع الصّاعِد، ماذا يُمَثِّلُ المحور العموديّ؟

أ) التّكرار. ب) التّكرار المتجمّع الصّاعِد.

جـ) مراكز الفئات. د) الحدود الفعليّة.

٣ ما مركز الفئة ١٠ – ١٤؟

أ) ١٢ ب) ٢ جـ) ٢٤ د) ٤

٤ أحد المقاييس الآتية ليس من مقاييس النَّزْعة المركزيّة:

أ) المنوال. ب) الوسط الحسابيّ. جـ) الوسيط. د) الانحراف المعياريّ.

٥ إذا كان $\sum$(س×ت)= ٥٠٠، وكان $\bar{س}$ = ١٠ ، فما مجموع التّكرارات؟

أ) ٥٠٠ ب) ١٠ جـ) ٥٠ د) ١٠٠

٦ إذا كان $\sum$ت×(س – $\bar{س}$)^{٢} = ٣٢٠، ن = ٤٠ ، فما قيمة σ ؟

أ) ٢$\sqrt{٢}$ ب) ٨ جـ) ٦٤ د) $\sqrt{٣٢٠}$

٢ حصل ٣٠ طالباً في الصّفّ الثّامن الأساسيّ في إحدى المدارس على النّتائج الآتية في امتحان اللّغة الإنجليزيّة:

٨٠	٧٠	٧٤	٥٤	٥٩	٧٢
٧٢	٦٠	٥٨	٤٢	٧٥	٨٠
٦٥	٧٥	٦٢	٦٣	٨٩	٧٧
٤٠	٨٣	٨٢	٧٠	٧٩	٨٤
٥٣	٩٠	٧٣	٥٢	٦٩	٧٥

أُفْرِغُ هذه البيانات في جدول تَكراريّ، عددُ فئاته ٦.

٣ يُمَثِّلُ الجدولُ الآتي التّوزيعَ التّكراريّ لعلامات (٢٠) طالباً:

الفئات	٤ – ٨	٩ – ١٣	١٤ – ١٨	١٩ – ٢٣	٢٤ – ٢٨
عدد الطَّلبة	٢	٤	٨	٥	١

أُمَثِّلُ التّوزيع التّكراريّ بما يأتي:

أ) بالمدرَّج التّكراريّ.
ب) بالمُضّلَّع التّكراريّ.
جـ) بالمنحنى التّكراريّ.
د) بالمنحنى التّكراريّ المتجمّع الصّاعِد

٤ أَستخدمُ البياناتِ الواردةَ في الجدول التّكراريّ الآتي؛ للإجابة عن الأسئلة الّتي تليه:

الفئات	١ – ٥	٦ – ١٠	١١ – ١٥	١٦ – ٢٠
التّكرار	٢	٤	٣	١

أ) أَحْسِبُ الوسط الحسابيّ للبيانات.
ب) أَحْسِبُ الوسيط للبيانات.
جـ) أَحْسِبُ المنوال للبيانات.
د) أَحْسِبُ الانحراف المعياريّ للبيانات.

مشروع الوحدة:

يتكوّن فريق كرة السَّلّة من خمسةِ لاعبين، موزّعينَ على خمسة مراكز، هي: لاعبُ الهجومِ الخلفيّ، والمُدافعُ المُسَدِّد، ولاعبُ الهجومِ صغيرِ الحجم، ولاعبُ الهجومِ قويُّ الجسم، ولاعبُ الوَسَط.

أقومُ وأفرادَ مجموعتي بتشكيل فريق كرة السَّلّة لصفّي، بحيث تكونُ أطوالهم على الأقلّ ١٥٠ سم.

أقومُ بتوزيع الفريق على المراكز الخمسة، بناءً على أطوالهم، وشروط كلّ مركز.

أقومُ بحسابِ معدّلِ أطوالِ فريقِ كرةِ السَّلّةِ الّذي قمتُ بتشكيلِه

روابط مقترحة

mathworld.wolfram.com/Line.html
www.calculatorsoup.com > Statistics

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية نخالة
م. فواز مجاهد	أ. علي مناصرة	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د. سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة	أ. احمد سياعرة	أ. قيس شبانة	أ. مبارك مبارك

المشاركون في ورشات عمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف التاسع:

د. تحسين مغربي	أ. أحلام صلاح	أ. نايف الطيطي	أ. وهبة ثابت
أ. جهاد أبو جاسر	أ. محمد الفرا	أ. رانية شريم	أ. ريم العويضات
أ. عهود طه	أ. راتب نصار	أ. ميسون جمل	أ. منال الصباغ
أ. عبد الله مهنا	أ. أمل جبور	أ. عار ف السعافين	أ. ابتسام اسليم
أ. وفاء موسى	أ. مؤيد الحنجوري	أ. سرين أبو عيشة	أ. سهيل شبير
أ. باسم المدهون	أ. رفيق الصيفي	أ. صلاح الترك	أ. محاسن سحويل
أ. فلسطين الخطيب	أ. عبد العزيز شلالدة		

تَمَّ بِحَمْدِ الله