بعض المعارف المفيدة في حل مشاكل تعليمية الرياضيات

إعداد: الطالب وليد سعدي

2019/07/14

بعض المعارف المفيدة في حل مشاكل تعليمية الرياضيات

إعداد: الطالب وليد سعدي.

بعض المعارف الازمة لحل بعض المشاكل في تعليمية الرياضيات

تمهيد

يتطلّب العمل في الرياضيات بصفة عامّة إلى الكثير من المعارف والمكتسبات خاصّة عندما يتعلّق الأمر بحلّ المشكلات ولأنّ تعليميّة الرياضيات تضع الطالب أمام زمرة من المشاكل الرياضياتية المتنوعة (مشكل جبري + مشكل هندسي) ارتأينا أنّه لا مفرّ إلى بتزويد الطالب بجملةٍ من المعارف والأدوات الازمة لحلّ الكثير من هذه المشاكل ولعلّنا أهملنا بعضًا منها سواءً لاعتقادنا معرفة الطالب لها أو نسيانًا منّا؛ الذي يبقي هذا العمل الناقص بحاجة إلى إتمام ويترك في ذلك المجال إلى زملائنا الطلبة الأفاضل...

كما ننصح القارئ بأن لا يكتفي بمعرفة هذه الخواص كأيّ ثقافة علمية إذ لابدّ من العودة إلى الدروس التي اشتقت منها هذه المعارف للاطلاع على براهينها وكذا استرجاع بعض التعاريف لجعلها معرفة متينة (الحفظ + الفهم) حتّى لا تنسى ويسهل حفظها.

1. الجبر

مبادئ في العد

- إذا كانت X و Y مجموعتين منتهيتين كان:

$$card(X \times Y) = card(X) \cdot card(Y)$$

- إذا كانت X و Y مجموعتين منتهيتين جزئيتين من مجموعة Z كان:

$$card(X \cup Y) = card(X) + card(Y) - card(X \cap Y).$$

وتعمم النتيجتين السابقتين على عدد منته من المجموعات المنتهية.

- إذا كان $f : X \to Y$ تطبيقًا بين مجموعتين منتهيتين، عندئذ:
  - f متباين $\Leftarrow card(X) \leq card(Y)$،
  - f غامر $\Leftarrow card(X) \geq card(Y)$،
  - f تقابل $\Leftarrow card(X) = card(Y)$.

إعداد: الطالب وليد سعدي.

- وفي حالة $card(X)=card(Y)$، يكون:

f متباين $\Leftrightarrow$ f غامر $\Leftrightarrow$ f تقابل

- عدد التقابلات بين مجموعتين عدد عناصر كل منهما يساوي n هو $P_n=n!$.
وهو نفسه عدد التبديلات لمجموعة بها n عنصرًا.
- عدد التطبيقات المتباينة من مجموعة عدد عناصرها k إلى مجموعة عدد عناصرها n $(k\le n)$ يساوي:

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

وهو نفسه عدد طرق اختيار k عنصرًا من مجموعة بها n عنصرًا دون تكرار وبمراعاة الترتيب.
- عدد المجموعات الجزئية المكوَّنة من k عنصرًا مأخوذة من مجموعة بها n عنصرًا يساوي:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وهو نفسه عدد طرق اختيار k عنصرًا دفعة واحدة من مجموعة بها n عنصرًا.
- - مبدأ أدراج ديريكليه -

عند تجزئة مجموعة مكوَّنة من $nk+1$ عنصرًا إلى n مجموعة جزئية، فلا بُدّ أن تحوي إحدى هذه المجموعات على $k+1$ عنصرًا على الأقل.

الحساب ونظرية الأعداد

- ليكن n و m عددين صحيحين. نقول إنّ n يقسم m، أو إنّ m مضاعف للعدد n، ونعبّر عن ذلك بالكتابة $n|m$، إذا وفقط إذا وُجد عدد صحيح k يحقّق $m=nk$.
- نرمز عادة بالرمز $m\mathbb{Z}$ إلى مجموعة مضاعفات العدد m، وهي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة.
- إنّ أيّ زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ هي من النمط $m\mathbb{Z}$ و m عدد طبيعي.

إعداد: الطالب وليد سعدي.

- إذا كان a يقسم b وكان b يقسم c، فإنّ a يقسم c.
- إذا كان a يقسم b، فإنّ ma يقسم mb لأجل كل عدد m من $\mathbb{Z}^*$.
- إذا كان a يقسم كلاً من b و c، فإنّ a يقسم $mb+nc$ لأجل أي عددين صحيحين n و m.
- - القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ -

من أجل كل زوج (a,b) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ يوجد زوج وحيد (q,r) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$، بحيث:

$$a=bq+r \qquad / \, 0\le r<|b|$$

يدعى q حاصل القسمة الإقليدية لـ a على b، ويدعى r باقي القسمة الإقليدية لـ a على b.

- - الموافقات في $\mathbb{Z}$ -

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n تعرّف العلاقة التالية في $\mathbb{Z}$ علاقة تكافؤ:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: a-b=kn$$
$$\Leftrightarrow (a-b)\in n\mathbb{Z}$$

ونعبر عنها عادة بالرمز $a\equiv b[n]$ ونقول إنّ a يوافق b بترديد n. وعندئذ تشكل مجموعة صفوف تكافئها:

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}=\{\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{n-1}\}$$

تجزئة منتهية لـ $\mathbb{Z}$. وهي ناتجة من كون:

$$a=nq+r \Leftrightarrow a\equiv r[n]$$

- إذا كان $a\equiv b[n]$ و $c\equiv d[n]$ فإنّ $a+c\equiv b+d[n]$.

وتنتج الحالة الخاصّة التالية:

$$a\equiv b[n] \Rightarrow ma\equiv mb[n], \quad \forall m\in\mathbb{Z}$$

- إذا كان $a\equiv b[n]$ و $c\equiv d[n]$ فإنّ $a\times c\equiv b\times d[n]$.

وتنتج الحالة الخاصّة التالية:

إعداد: الطالب وليد سعدي.

$$a \equiv b[n] \Rightarrow a^p \equiv b^p[n], \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

- إذا كان $x \equiv a[n \cdot m]$ فإنّ $x \equiv a[n]$ و $x \equiv a[m]$.
- من أجل كل n عدد طبيعي متعاقب ولا تشمل الصفر، يوجد عدد طبيعي وحيد بين هذه الأعداد يقبل القسمة على n. وإذا كان:
  - n زوجيًا كان هذا العدد زوجيًا،
  - n فرديًا كان هذا العدد متناوب في شفعيته.

ففي السلسلة التالية 7,8,9,10 يوجد عدد طبيعي وحيد بين هذه الأعداد يقبل القسمة على 4 هو العدد 8.

- - قابلية القسمة على عدد –

لنعتبر العدد الطبيعي التالي $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ عندئذ، لدينا:

$$10 \mid N \Leftrightarrow a_0 = 0$$
$$2 \mid N \Leftrightarrow 2 \mid a_0$$
$$5 \mid N \Leftrightarrow 5 \mid a_0$$
$$4 \mid N \Leftrightarrow 4 \mid a_1 a_0$$
$$3 \mid N \Leftrightarrow 3 \mid \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$11 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow 11 \mid \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

- - الأعداد الأولية-

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية وكل عدد أولي، بخلاف 2 و 3، يقع على أحد جانبي مضاعفات العدد 6. بعبارة أخرى، أنّ أي عدد أولي بعد هذين العددين يتكون من الصيغة $6n \pm 1$ بالنسبة لعدد طبيعي n. كما يوجد دائمًا عدد أولي واحد على الأقل يتوسّط العددين n و $2n$ أيًا كان $2 \le n$ وتُعرف هذه الأخيرة بـ "فرضية برتراند".

- كل عدد طبيعي أكبر تمامًا من 1 يقبل على الأقل قاسمًا أوليًا، وإذا كان هذا العدد الطبيعي n مركبًا (ليس بعدد أولي) فإنّه يقبل قاسمًا أوليًا p بحيث $p \le \sqrt{n}$.

- - التفكيك إلى جداء عوامل أولية -

كل عدد طبيعي مركب يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية ويكون هذا التفكيك وحيدًا إذا أهملنا ترتيب عوامل التفكيك.

- - القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر -

إذا كانت $(a_1,\ldots,a_n)$ جملة من الأعداد الصحيحة عرّفنا القاسم المشترك الأكبر لأعداد الجملة $(a_1,\ldots,a_n)$ بأنّه أكبر القواسم المشتركة الموجبة لأعداد تلك الجملة ورمزنا له بالرمز $p\gcd(a_1,\ldots,a_n)$ و عرّفنا المضاعف المشترك الأصغر لأعداد الجملة $(a_1,\ldots,a_n)$ بأنّه أصغر المضاعفات المشتركة الموجبة لأعداد تلك الجملة ورمزنا له بالرمز $ppcm(a_1,\ldots,a_n)$.

- نقول إنّ أعداد الجملة $(a_1,\ldots,a_n)$ أولية فيما بينها إذا وفقط إذا كان 1 هو قاسمها المشترك الأكبر.
- لتكن $(a_1,\ldots,a_n)$ جملة من الأعداد الصحيحة وليكن d هو القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد، عندئذ من أجل أي عدد طبيعي m يكون md قاسمًا مشتركًا أكبر لأعداد الجملة $(ma_1,\ldots,ma_n)$.
- لتكن $(a_1,\ldots,a_n)$ جملة من الأعداد الصحيحة ليست كلها معدومة وليكن d القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد نعرّف جملة الأعداد $(a'_1,\ldots,a'_n)$ بالعلاقات $a_i = da'_i$ حيث i من $\{1,\ldots,n\}$. عندئذ تكون أعداد الجملة $(a'_1,\ldots,a'_n)$ أولية فيما بينها.
- - مبرهنة بيزو -

لتكن $(a_1,\ldots,a_n)$ جملة من الأعداد الصحيحة عندئذ تكون الأعداد a_1، ...، a_n أولية فيما بينها إذا وفقط إذا وُجدت جملة $(x_1,\ldots,x_n)$ من الأعداد الصحيحة تحقّق:

$$x_1a_1+\cdots+x_na_n=1$$

- إذا كان p عددًا أوليًا فإنّ p أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.

- إذا كان a عددًا أوليًا مع عددين b و c فإنّه يكون أوليًا مع جداءهما $b\times c$.
- إذا كان a و b عددين صحيحين أوليين فيما بينهما فإنّ العددين a^n و b^m أوليين فيما بينهما أيًا كان العددين الطبيعيين وغير المعدومين n و m.
- - مبرهنة ڤاوص -

إذا كانت a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة وكان a يقسم الجداء $b\times c$ وكان a أوليًا مع b، فإنّ a يقسم c.

- إذا كان a و b عددين صحيحين غير معدومين وكان p عددًا أوليًا يقسم الجداء $b\times c$ فإنّ p يقسم أحد العددين a أو b.
- لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة. إذا كان a يقسم c وكذلك b يقسم c وكان a و b أوليان فيما بينهما فإنّ جداءهما $a\times b$ يقسم c.
- من أجل كل عددين صحيحين a و b فإنّ:

$$p\gcd(a,b)\times ppcm(a,b)=\pm\, a\cdot b$$

- - مبرهنة فيرما الصغيرة -

إذا كان p عددًا أوليًا وكان n عددًا صحيحًا فإنّ:

$$n\notin p\mathbb{Z}\Rightarrow (n^{p-1}-1)\in p\mathbb{Z}$$

- - متراجحات المتوسطات –

إذا كانت $(a_1,\dots,a_n)$ أعدادً موجبة تمامًا، عرّفنا المتوسّط الحسابي AM، والمتوسّط الهندسي GM، والمتوسّط التوافقي HM، والمتوسّط التربيعي QM، كمايلي:

$$AM=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \quad \text{و} \quad GM=\sqrt[n]{a_1\times\cdots\times a_n}$$

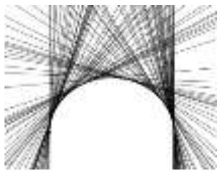
$$HM=\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)} \quad \text{و} \quad QM=\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

وعندئذ يكون: $HM\le GM\le AM\le QM$

وتقع المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

2. الهندسة المستوية

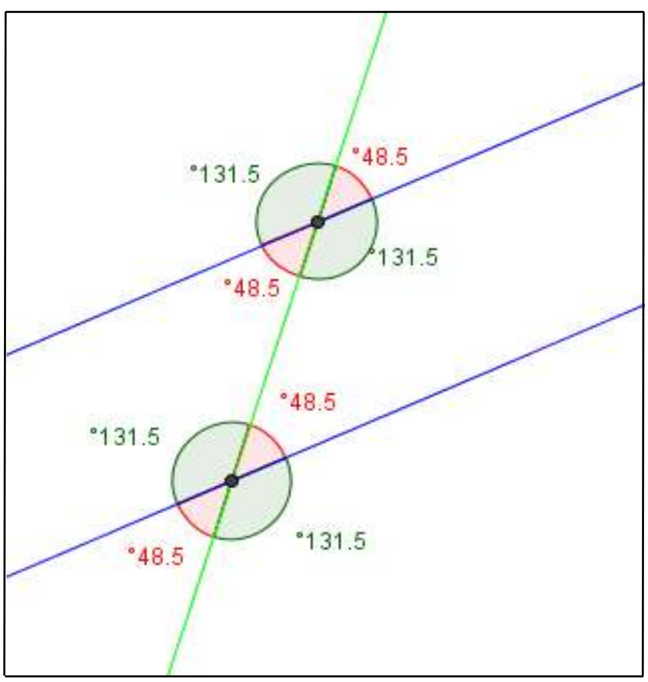
- مكملات الزوايا المتقايسة تكون متقايسة.
- الزوايا المتجاورة على خط مستقيم تكون متكاملة.
- كل زاويتين متقابلتين بالرأس متقايستان.
- إنّ علاقة التوازي بين المستقيمات المستوية هي علاقة تكافؤ تكون ممثلات الصفوف المختلفة لها هي المستقيمات المماسة لأي نصف دائرة من المستوي محذوف منها نقطة في أحد طرفيها. وعددها لا نهائي كما يظهر في الصورة.



- إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ:

1) كلّ زاويتين متبادلتين (داخليًا أو خارجيًا) متقايستان.
2) كلّ زاويتين متناظرتين متقايستان.
3) كلّ زاويتين متحالفتين (داخليًا أو خارجيًا) متكاملتان.

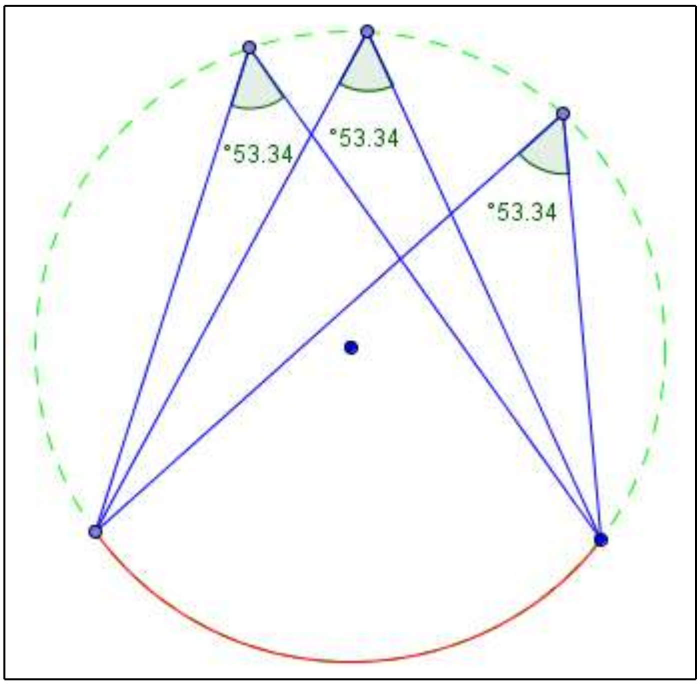
ويكون العكس صحيحًا في حال حقّق زوج من الزوايا شرطًا من الشروط الثلاث.



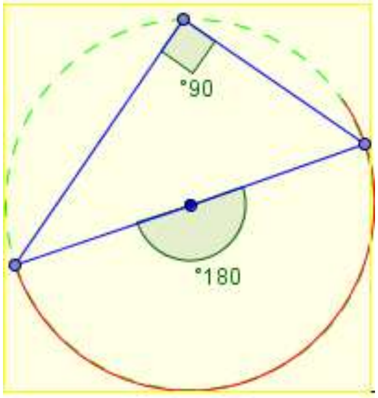
- - مسلمة التوازي -

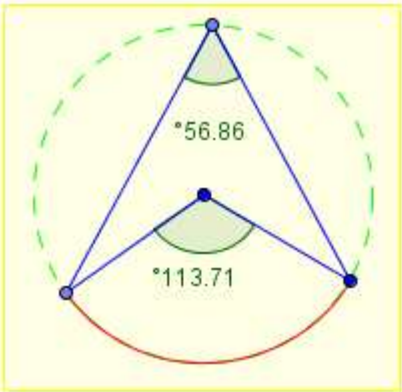
من نقطة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمرّ بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

- الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في دائرة تكون متقايسة.



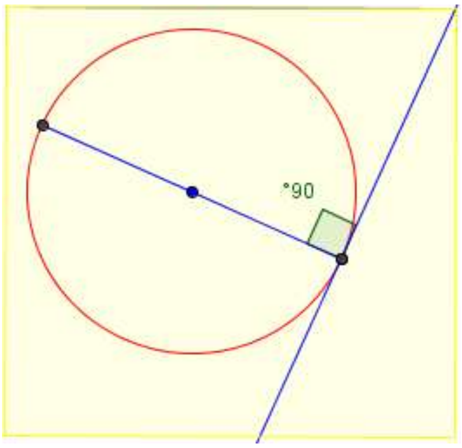
- قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوسًا من دائرة يساوي ضعفي قياس الزاوية المحيطية التي تحصر نفس القوس.
- الزوايا المحيطية التي تحصر نصف دائرة تكون قائمة.

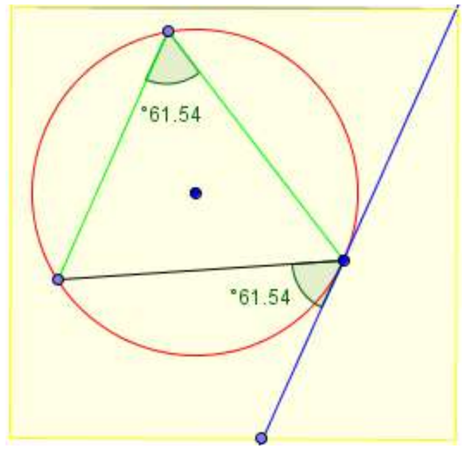




إعداد: الطالب وليد سعدي.

- الزاوية المماسية تقايس الزاوية المحيطية المرسومة في الجهة الأخرى من الوتر.
- المماس يكون عموديًا على قطر التماس.





- نسبة محيط الدائرة إلى قطرها نسبة ثابتة وتساوي π.
- مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هي πr^2.
- الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسًا متقايسة تكون متقايسة، وإذا كانت الزوايا المحيطية متقايسة كانت الأقواس التي تحصرها هذه الزوايا متقايسة.
- عدد أقطار أي مضلّع عدد أضلاعه n هو $C_n^2 - n$.
- - المضلّعات المحدّبة -

يكون المضلّع محدّبًا، إذا كان كلُّ خط مستقيم يحوي ضلعًا من أضلاع المضلّع لا يحوي أيّ نقطة داخلية، أو إذا كان قياس كل زاوية داخلية من زواياه أقل من 180°.

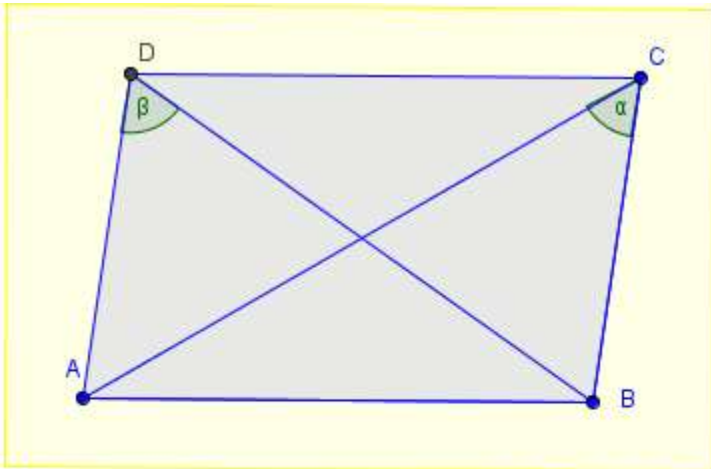
- - المضلّعات المقعّرة –

يكون المضلّع مقعّرًا إذا لم يكن محدّبًا.

- مجموع قياسات زوايا المثلث هي 180°.
- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي هي 360°.
- مجموع قياسات زوايا أي مضلّع عدد أضلاعه n هو $(n-2)\times 180^\circ$.
- مجموع قياسات الزوايا الخارجية (واحدة عند كل رأس) لأي مضلّع هو 360°.

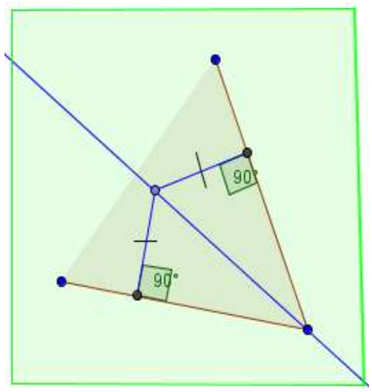
إعداد: الطالب وليد سعدي.

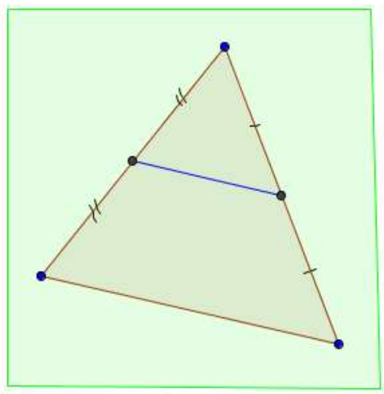
- يكون الشكل الرباعي $ABCD$ رباعيًا دائريًا إذا وفقط إذا كان $A\hat{C}B = A\hat{D}B$.



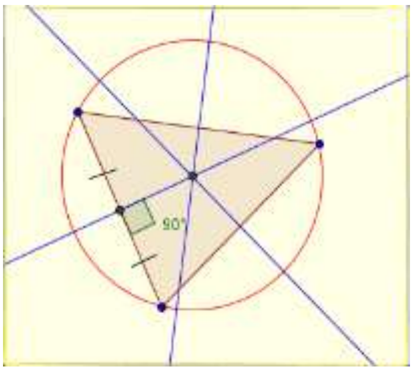
- ويكون $ABCD$ رباعيًا دائريًا إذا وفقط إذا وُجدت فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان؛ أي $C\hat{B}A + A\hat{D}C = \pi$.
- يتشابه مثلثان في الحالات التالية:
  1) إذا تقايست أضلاع أحدهما مع أضلاع الآخر،
  2) إذا تقايسا ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحدهما مع المثلث الآخر،
  3) إذا تقايست زاويتان وضلع في أحدهما مع المثلث الآخر.

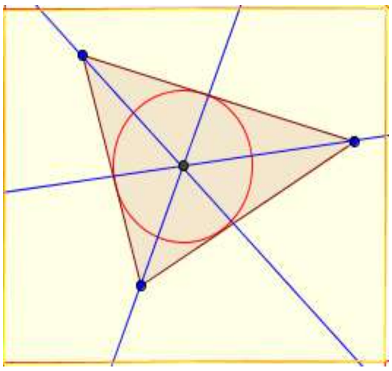
  الشروط الكافية لتشابه مثلثين السابقة تكفي لرسم مثلث.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها نصف طوله.
- في المثلث، يقسم منصّف أي زاوية من زواياه الضلع المقابل بنسبة الضلعين اللذين يجاورانها.
- كل نقطة من منصف الزاوية تبعد بنفس المسافة من ضلعي الزاوية.

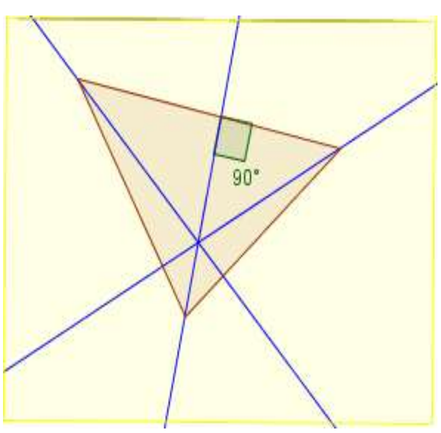


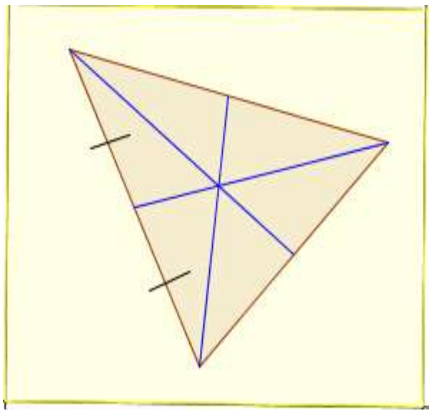


- في المثلث، تتلاقى المنصفات في مركز الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلّث داخلاً.
- في المثلث، تتلاقى المحاور في مركز الدائرة المحيطة بالمثلث.
- في المثلّث، تتلاقى المتوسطات في مركز ثقل المثلث وهي نقطة تقسم المتوسطات بنسبة 2:1.
- في المثلث، تتلاقى الارتفاعات في نقطة واحدة.









إعداد: الطالب وليد سعدي.

- كل ثلاث نقط ليست على استقامة تقع على دائرة وحيدة.
- قياس الزاوية الخارجية لأي مثلث يساوي مجموع قياسي زاويتي المثلث غير المجاورتين.
- إذا كان ABC مثلثًا أطوال أضلاعه $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ تساوي a و b و c وزواياه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$.
  - عندئذ يكون لدينا:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

(علاقة الكاشي)

  - إذا رمزنا بالرمز R إلى نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه كان:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

  - وإذا رمزنا بالرمز S إلى مساحة المثلث ABC كان:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

أو

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(قاعدة هيرون)

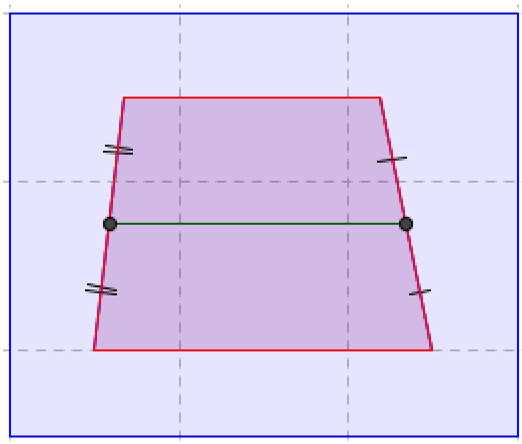
مع

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

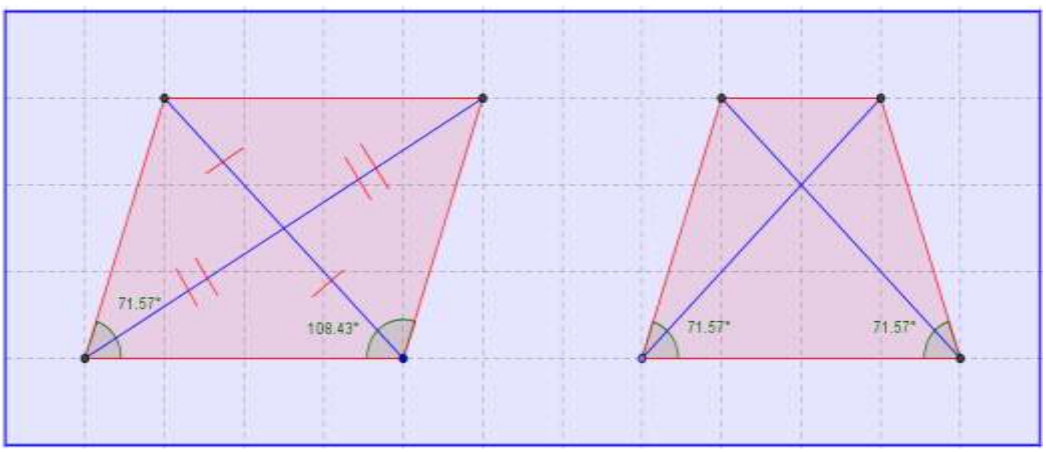
  - وإذا رمزنا بالرمز r إلى نصف قطر الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلّث ABC داخلاً كان:

$$r = \frac{S}{p}$$

- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف توازي كلاً من القاعدتين وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.



- مساحة شبه المنحرف هي نصف مجموع طولي القاعدتين مضروبًا في الارتفاع.
- إذا كان شبه المنحرف متساوي الساقين فإنّ زاويتي كل قاعدة متقايستان أو متكاملتان.
- إذا كان شبه المنحرف متساوي الساقين فإنّ قطريه متقايسان أو متناصفان.



- - متوازي الأضلاع –

هو رباعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان.

- كل قطر في متوازي الأضلاع يصنع مع أضلاعه مثلثين متشابهين.
- في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متقايسان (وهي خاصّة مميزة لمتوازي الأضلاع).

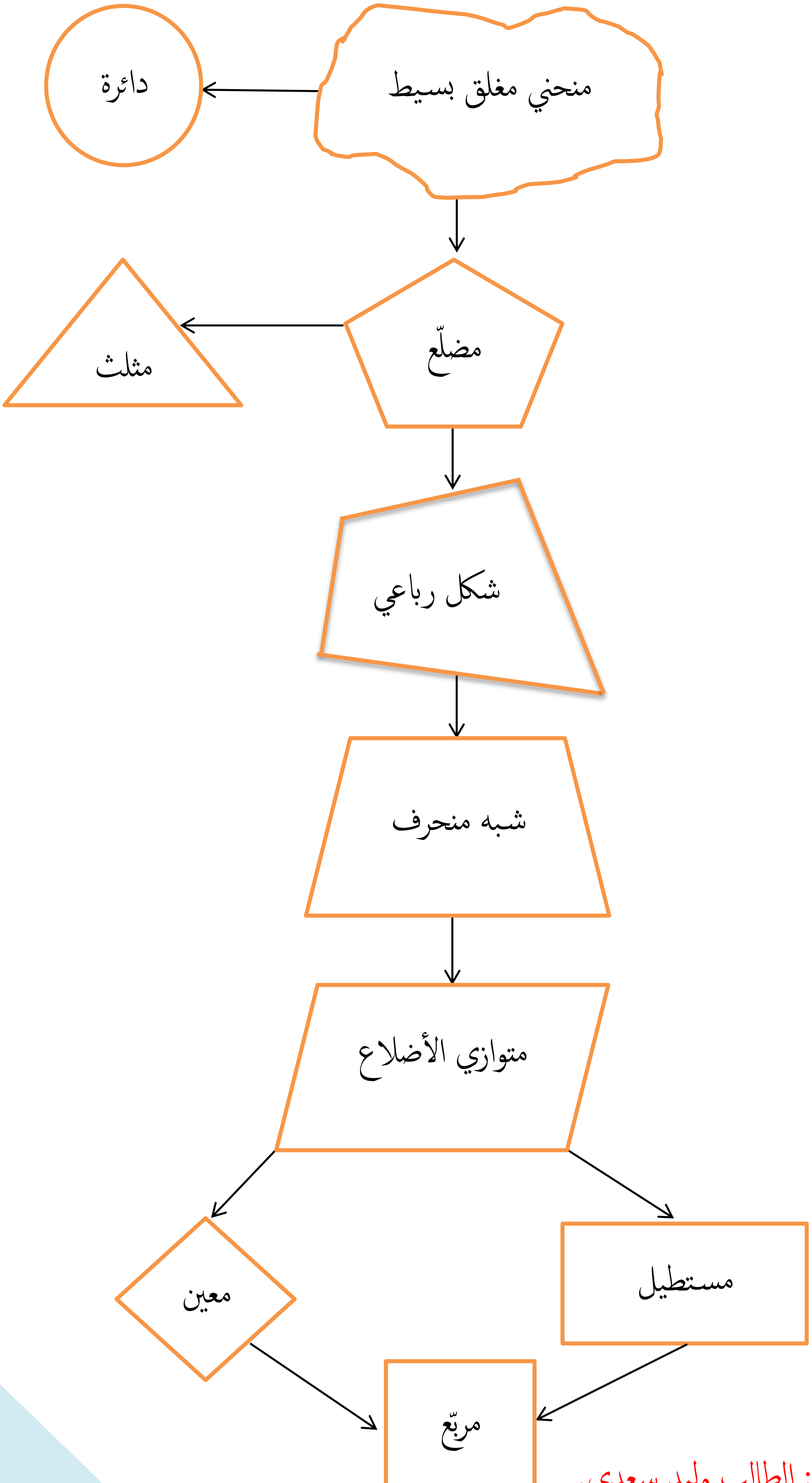
إعداد: الطالب وليد سعدي.

- في متوازي الأضلاع، كل زاويتين متقابلتين متقايستان (وهي خاصّة مميزة لمتوازي الأضلاع).
- قطرا متوازي الأضلاع متناصفان (وهي خاصّة مميزة لمتوازي الأضلاع).

فالخواص السابقة مكافئة للخاصّة "كل ضلعان متقابلان متوازيان" التي تعرّف متوازي الأضلاع.

- مساحة متوازي الأضلاع هي طول القاعدة في الارتفاع.
- قطرا المستطيل متناصفان ومتقايسان.
- مساحة المستطيل هي الطول في العرض.
- جميع أضلاع المعين متقايسة.
- قطرا المعين متناصفان ومتعامدان.
- كلُّ قطر في المعيّن ينصّف زاويتي المعيّن عند طرفيه.
- مساحة المعين هي نصف حاصل ضرب طولي قطريه.
- قطرا المربّع متناصفان ومتقايسان ومتعامدان.

بعض المعارف المفيدة في حل مشاكل تعليمية الرياضيات



إعداد: الطالب وليد سعدي.

- الانسحاب تحويل نقطي ليس له نقاط صامدة، وهو:
  - يحافظ على الاستقامية،
  - يحافظ على التوازي،
  - يحافظ على الأبعاد.
- التحاكي تحويل نقطي له نقطة صامدة وحيدة ونسبة من $\mathbb{R}^*$، وهو:
  - يحافظ على الاستقامية،
  - يحافظ على التوازي،
  - يحافظ على الطبولوجيا.
- التناظر المركزي هو تحاكي نسبته -1.
- التناظر المحوري تحويل نقطي نقاطه الصامدة هي محور تناظره (Δ)، وهو:
  - يحافظ على الاستقامية،
  - يحافظ على التوازي،
  - يحافظ على الأبعاد.
- الدوران تحويل نقطي له نقطة صامدة (مركز الدوران) وزاوية من $[0,2\pi[$، وهو:
  - يحافظ على الاستقامية،
  - يحافظ على التوازي،
  - يحافظ على الأبعاد.