1434هـ
2013م

حساب المثلّثات

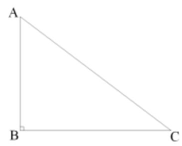
محمّد داشر

1434/05/02

حساب المثلّثات

نظريّة فيثاغورس:

في المثلّث القائم يكون مربّع طول الوتر مساويًا لمجموع مربّعي الضلعين القائمين.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

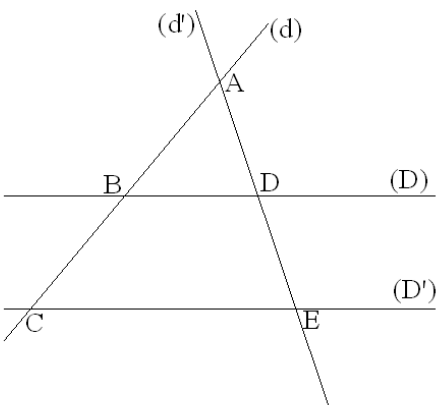
عكس نظريّة فيثاغورس:

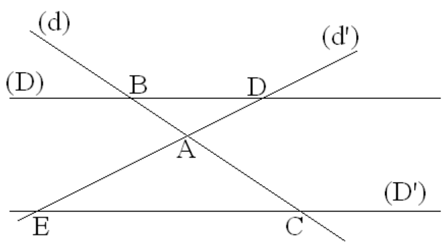
إذا كان في مثلّث ما مربّع طول أحد أضلاعه مساويًا لمجموع مربّعي الضلعين الآخرين، فهذا المثلّث قائم وأطول أضلاعه هو الوتر.

نظريّة طاليس:

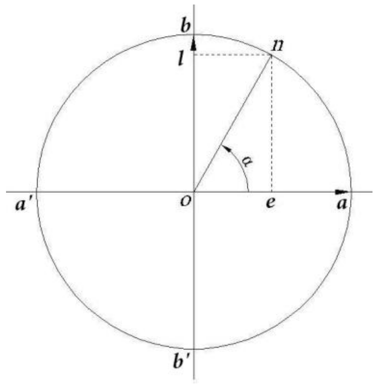
إذا كان لدينا مستقيمان متوازيان (D) و(D')، وكان لدينا مستقيمان متقاطعان (d) و(d') في النقطة A، ويقطعان المستقيمين (D) و(D') على الترتيب في النقاط B، C، D، E، كما في الرسم المرفق في الأسفل، فإنّ:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$





النسب المثلّثيّة لزاوية حادّة:



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (c) دائرة مركزها O ونصف قطرها 1.

a، b نقطتان حيث: $\overrightarrow{Oa}=\vec{u}$ ؛ $\overrightarrow{Ob}=\vec{v}$.

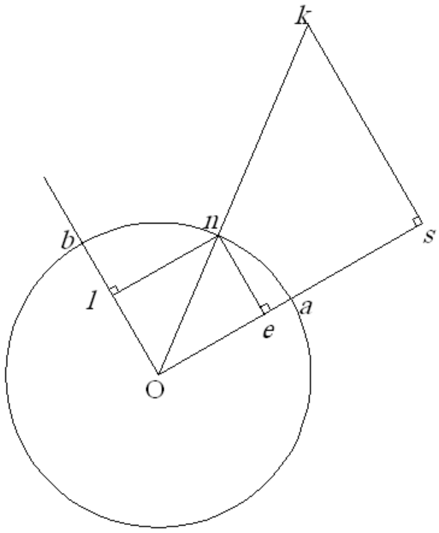
n نقطة من القوس ab و α قيس للزاوية $[Oa;On]$. e المسقط العموديّ للنقطة n على (Oa). l المسقط العموديّ للنقطة n على (Ob).

- فاصلة النقطة n هي **جيب تمام** الزاوية $[Oa;On]$ التي قيسها α: $\boxed{\cos\alpha=\overline{Oe}}$
- ترتيب النقطة n هو **جيب** الزاوية $[Oa;On]$ التي قيسها α: $\boxed{\sin\alpha=\overline{Ol}}$
- إذا كانت n تختلف عن كلّ من b وb' فإنّ النسبة $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ هي **ظل** الزاوية $[Oa;On]$ التي قيسها α: $\boxed{\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$
- إذا كانت n تختلف عن كلّ من a وa' فإنّ النسبة $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ هي **ظل تمام** الزاوية $[Oa;On]$ التي قيسها α: $\boxed{\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

النسب المثلّثيّة لزاوية حادّة في مثلّث قائم:

Osk مثلّث قائم في s؛ وα قيس للزاوية $[Os;Ok]$. الدائرة (c) التي مركزها O ونصف قطرها 1 تقطع (Os) في a وتقطع (Ok) في n. b نقطة من (c) بحيث تكون الزاوية $[Oa;Ob]$ قائمة و n تنتمي إلى القوس ab.

e المسقط العموديّ للنقطة n على (Oa)، l المسقط العموديّ للنقطة n على (Ob).



لدينا: $\frac{Ok}{On} = \frac{Os}{Oe}$ (نظيرّة طاليس) ومنه: $\frac{Oe}{On} = \frac{Os}{Ok}$ أي $Oe = \frac{Os}{Ok}$ أي: $\frac{Os}{Ok} = \cos\alpha$

كذلك من المساواة: $\frac{Ok}{On} = \frac{sk}{en}$ يمكن إيجاد: $\frac{sk}{Ok} = \sin\alpha$

نسب مثلّثيّة أخرى:

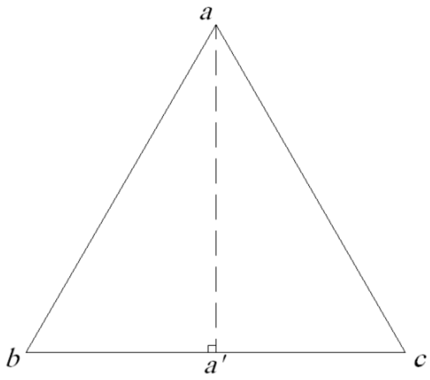
توجد أربع نسب مثلّثيّة أخرى وهي ظلّ الزاوية (*tangent*)، وظلّ تمام الزاوية (*cotangent*)، وقاطع الزاوية (*secant*)، وقاطع تمام الزاوية (*cosecant*)، وهي معرّفة كما يلي:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

حيث: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ من أجل كلّ من الظلّ والقاطع، و $\alpha \neq k\pi$ من أجل كلّ من الظلّ التمام والقاطع التمام.

إيجاد جيب وجيب تمام الزاويتين °30 و°60

abc مثلّث متقايس الأضلاع وa' المسقط العموديّ للنقطة a على (bc).



$$a'a = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ab$$

$$aa'^2 + a'b^2 = ab^2 \Rightarrow aa' = \sqrt{ab^2 - \left(\frac{1}{2}ab\right)^2}$$

$$\Rightarrow aa' = \sqrt{ab^2\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

$$\cos a\hat{b}c = \frac{a'b}{ab} = \frac{\frac{1}{2}ab}{ab} = \frac{1}{2}$$

$$\sin a\hat{b}c = \frac{aa'}{ab} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}ab}{ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

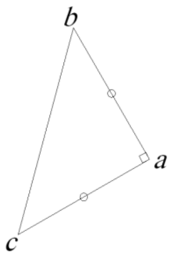
ومنه: $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 60° = \frac{1}{2}$

وبما أنّ: °30+°60=°90 فإنّ:

$\sin 60° = \cos 30°$ و $\cos 60° = \sin 30°$

إيجاد جيب وجيب تمام الزاوية °45

abc مثلّث قائم في a ومتساوي الساقين.



$$\left.\begin{array}{r} ab^2 + ac^2 = bc^2 \\ ab = ac \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} bc = ab\sqrt{2} \\ bc = ac\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\cos a\hat{b}c = \frac{ab}{bc} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin a\hat{b}c$$

وبما أنّ: $a\hat{b}c = a\hat{c}b$ و $a\hat{b}c + a\hat{c}b = 90°$ فإنّ:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

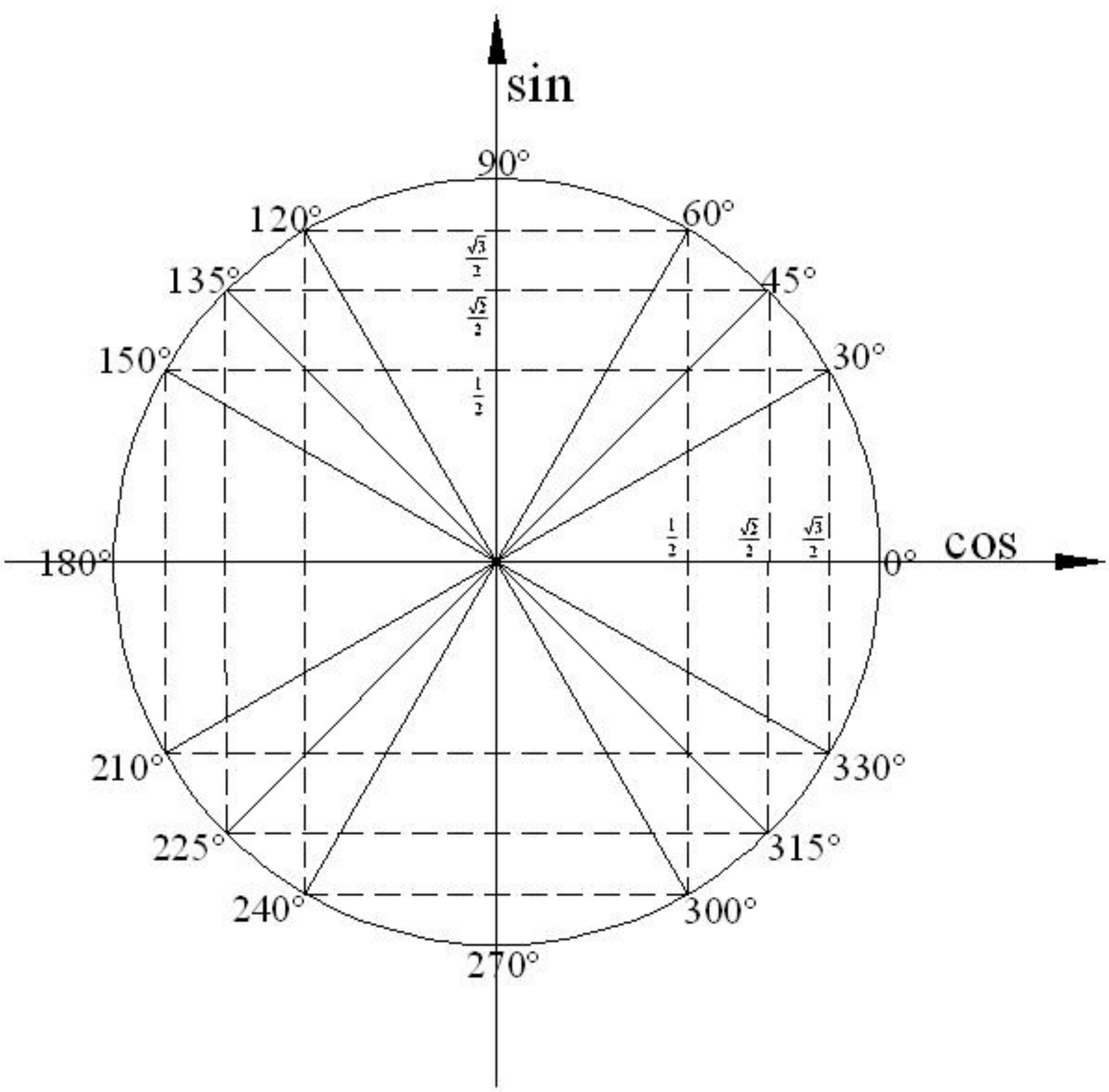
نتائج أساسيّة:

- إذا كان α وα' قيسين لزاويتين متتامّتين فإنّ: $\cos\alpha = \sin\alpha'$ و $\sin\alpha = \cos\alpha'$.
- إذا كان α قيسًا لزاوية حادّة فإنّ: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

- إذا كان α قيسًا لزاوية حادّة وكلّ من جيبها وجيبها التمام غير معدومين فإنّ: $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

- يبيّن الجدول التالي قيم النسب المثلّثيّة لبعض الزوايا:

قيس الزاوية			الجيب (sin)	الجيب التمام (cos)	الظلّ (tan)	الظلّ التمام (cot)	القاطع (sec)	القاطع التمام (csc)
بالدرجات	بالغرادات	بالراديان						
0	0	0	0	1	0	غير معرّف	1	غير معرّف
30	$\frac{100}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45	50	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{200}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90	100	$\frac{\pi}{2}$	1	0	غير معرّف	0	غير معرّف	1
120	$\frac{400}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135	150	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150	$\frac{500}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
180	200	π	0	-1	0	غير معرّف	-1	0
210	$\frac{700}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
225	250	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240	$\frac{800}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
270	300	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	غير معرّف	0	غير معرّف	-1
300	$\frac{1000}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
315	350	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330	$\frac{1100}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
360	400	2π	0	1	0	غير معرّف	1	غير معرّف



بصفة عامّة:

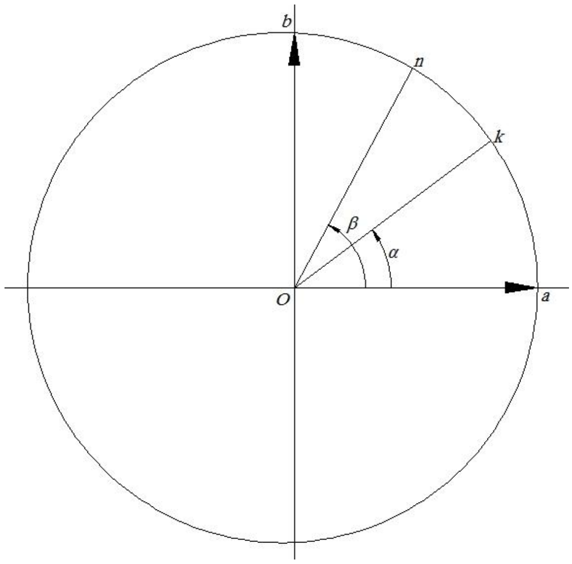
في المثلّث القائم:

- جيب زاوية هو نسبة طول الضلع المقابل لها إلى طول الوتر.
- جيب تمام زاوية هو نسبة طول الضلع المجاور لها إلى طول الوتر.
- ظلّ زاوية هو نسبة طول الضلع المقابل لها إلى طول الضلع المجاور لها.
- ظلّ تمام زاوية هو نسبة طول الضلع المجاور لها إلى طول الضلع المقابل لها.
- قاطع زاوية هو نسبة طول الوتر إلى طول الضلع المجاور لها.
- قاطع تمام زاوية هو نسبة طول الوتر إلى طول الضلع المقابل لها.

دساتير التحويل

دساتير الجمع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\overrightarrow{Oj};\overrightarrow{Ov})$.



(C) الدائرة المثلثيّة المرفقة بالمعلم. a النقطة ذات الإحداثيّين $(1;0)$. α وβ عددان حقيقيّان، n وk صورتاهما على الدائرة المثلّثيّة.

- لنحسب الجداء السلّمي $\overrightarrow{Ok}\times\overrightarrow{On}$:

لدينا من جهة:

$$\overrightarrow{Ok}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix};\overrightarrow{On}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{Ok}\times\overrightarrow{On}=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

أي:

$$\overrightarrow{Ok}\times\overrightarrow{On}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.............................(1)$$

ومن جهة أخرى:

$$\overrightarrow{Ok}\times\overrightarrow{On}=\left\|\overrightarrow{Ok}\right\|\times\left\|\overrightarrow{On}\right\|\times\cos(\overrightarrow{Ok};\overrightarrow{On})=1\times1\times\cos(\overrightarrow{Ok};\overrightarrow{On})$$

نعلم أنّ:

$$(\overrightarrow{Ok};\overrightarrow{On})=(\overrightarrow{Oa};\overrightarrow{On})-(\overrightarrow{Oa};\overrightarrow{Ok})$$

ومنه:

$$\cos(\overrightarrow{Ok};\overrightarrow{On}) = \cos(\alpha-\beta)$$

إذن:

$$(\overrightarrow{Ok}\times\overrightarrow{On}) = \cos(\alpha-\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

لدينا:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)]$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

- **لنحسب** $\sin(\alpha+\beta)$:

لدينا:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

- **لنحسب الآن** $\sin(\alpha-\beta)$:

لدينا:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

الخلاصة:

مهما كان العددان α،β:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

يمكن كتابة هذه العلاقات كما يلي:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

1. حساب $\cos 2\alpha$، $\sin 2\alpha$:

مهما كان العدد الحقيقيّ α فإنّ:

- $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha)$

  $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

- $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$

  $= 2\sin\alpha\cos\alpha$

2. مجموع وفرق جيبين أو جيبي تمام:

تحصّلنا سابقًا على دساتير الجمع التالية:

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ……………………………(1)

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

بجمع (3) وَ(4) طرفًا إلى طرف وطرحهما طرفًا من طرف ثمّ بجمع (1) وَ(2) طرفًا إلى طرف وطرحهما طرفًا من طرف نحصل على:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

وإذا وضعنا $\alpha+\beta=A$ و$\alpha-\beta=B$ يكون لدينا: $\alpha=\frac{A+B}{2}$ و $\beta=\frac{A-B}{2}$ وتكتب عندئذ العلاقات (5)، (6)، (7)، (8) كما يلي:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

حالة خاصّة:

إذا كان $A=0$ نجد:

$$\cos 0+\cos B=2\cos\frac{0+B}{2}\cos\frac{0-B}{2}$$

$$\cos 0-\cos B=-2\sin\frac{0+B}{2}\sin\frac{0-B}{2}$$

أي:

$$1+\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}$$

$$1-\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}$$

العبارة الخطّيّة لكلّ من $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$:

لدينا:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = \cos^2 - \cos 2\alpha \\ \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos 2\alpha \end{cases}$$

ولدينا أيضًا:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \end{cases}$$

ومنه:

$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$1 - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

المحتويات