مسائل فى المساحة المستوية

1- قيس خط بشريط من التيل فكان طوله (93.75 m) ، فإذا علم أن الطول الإسمى لهذا الشريط هو (20.0 m) ، والطول الحقيقى له (20.01 m) احسب الطول الحقيقى للخط.

الحل

يستخدم الشريط للقياس المباشر، ويمكن أن يكون من الكتان أو من الصلب، ولكنه يصعب استخدامه فى تيارات الهواء الشديدة لصعوبة شده أفقياً.

$$\text{الطول الحقيقى للخط} = \text{الطول المقاس} \times \frac{\text{الطول الحقيقى للشريط (أو الجنزير)}}{\text{الطول الإسمى للشريط (أو الجنزير)}}$$

$$\text{True length} = 93.75 * \frac{20.01}{20.0} = 93.7968 \text{ m}$$

******

2- فقدت عقلة من المتر الثامن من الجنزير، وكان طول الخط المقاس (88.50 m) . احسب الطول الحقيقى للخط.

الحل

الجنزير عبارة عن قضبان رفيعة من الحديد أو الصلب تتصل ببعضها عن طريق حلقات، وينتهى طرفا الجنزير بمقبضين من النحاس، والطول المعروف للجنزير هو (20.0 m)، وطول كل عقلة هو (20.0 cm) بما يتبعها من حلقات.

الطول الإسمى للجنزير = 20.0 m ، الطول الحقيقى للجنزير = 0.20 – 20.0 = 19.80 m

$$\text{true length} = 88.50 * \frac{19.80}{20.0} = 87.615 \text{ m}$$

******

3- قيست مساحة أرض باستخدام شريط طوله (30.0 m) فكانت المساحة ($656.0\ m^2$)، فإذا علم أن الطول الحقيقى للشريط هو (29.99 m) فأوجد المساحة الحقيقية لقطعة الأرض.

الحل

$$\text{المساحة الحقيقية} = \text{المساحة المقاسة} \times \frac{(\text{الطول الحقيقى للشريط أو الجنزير})^2}{(\text{الطول الإسمى للشريط أو الجنزير})^2}$$

$$\text{True area} = 656.0 * \left(\frac{29.99}{30.0}\right)^2 = 655.562 \text{ m}^2.$$

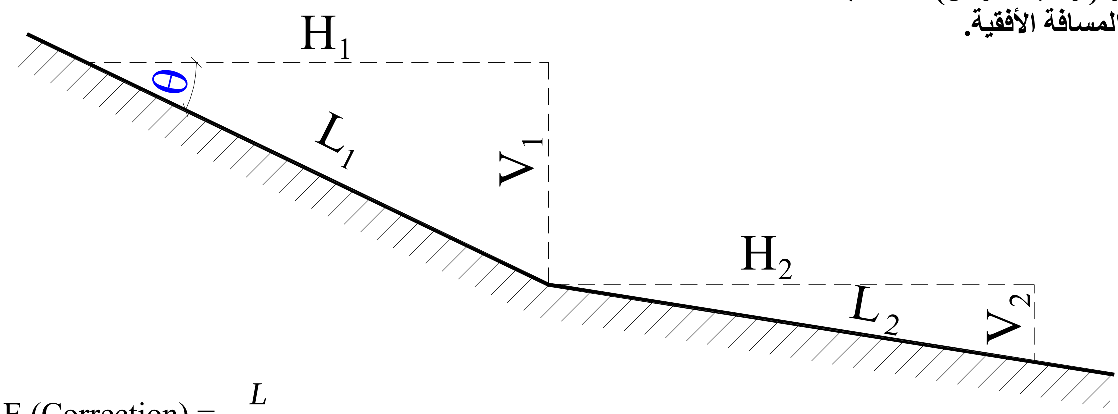
******

4- اشتق العلاقة لتصحيح الخطأ الناتج عن القياس على أرض مائلة بانتظام بدلالة:
أ- زاوية ميل الأرض θ
ب- فرق المنسوب بين النقطتين.

الحل

أ- بدلالة زاوية الميل θ

درجة الإنحدار (أو ميل الأرض) 1:n حيث 1 المسافة الرأسية ، n المسافة الأفقية.



E (Correction) = $\frac{L}{2.n^2}$

Or the Horizontal distance (H) = L . cos θ

ب- بدلالة فرق المنسوب (البعد الرأسى):

Data is the inclined distance (L), and level difference (V).

Assume that $L^2 = V^2 + (L-E)^2$, where E is the correction value.

$$E = L - \left(L - \frac{V^2}{2.L} - \frac{V^4}{8.L^3} \right)$$

$$E = \frac{V^2}{2.L} + \frac{V^4}{8.L^3}$$

5- قيس خط بشريط من الصلب طوله (20.0 m) فكان طوله (100.0 m) وكان مقدار الترخيم (5.0 cm) من الطول الحقيقى للشريط (20.01m) وكانت درجة الحرارة أثناء القياس ($18.0\ ^0C$) وأثناء المعايرة ($20.0\ ^0C$) ومعامل تمدد الشريط ($9*10^{-7}$ لكل درجة مئوية، وزاوية ميل الشريط (60^0) احسب الطول الحقيقى للخط.

الحل

1- العلاقة التى تستخدم لتصحيح الترخيم فى الشريط:

$$H = D - \frac{8.S^2}{3.D} - \frac{32.S^2}{15.D^2} - ....$$

Where:

H	Horizontal distance
D	length of the measuring tape
S	sag of the tape

وبالتالى يمكن حساب الخطأ الناتج من الترخيم من المعادلة:

$$E = D - H = \frac{8.S^2}{3.D} + \frac{32.S^4}{15.D^3}$$

ويمكن إهمال الحد الثانى من المعادلة لأنه صغير جداً.

Correction of sag:

$$E = \frac{8*(0.05)^2}{3*20.0} = 0.033 \text{ cm.}$$

2- الخطأ الناتج من اختلاف درجة الحرارة:

$$E = \alpha.H(d_1 - d)$$

Where:

E	Correction due to temperature change
α	coefficient of thermal expansion
d_1	degree of temperature at measuring
d	degree of temperature at calibration.

$E = 9*10^{-7}*$

6- عند عمل رفع لبركة مياه أحيطت بمثلث ABC أطوال أضلاعه كالآتى :

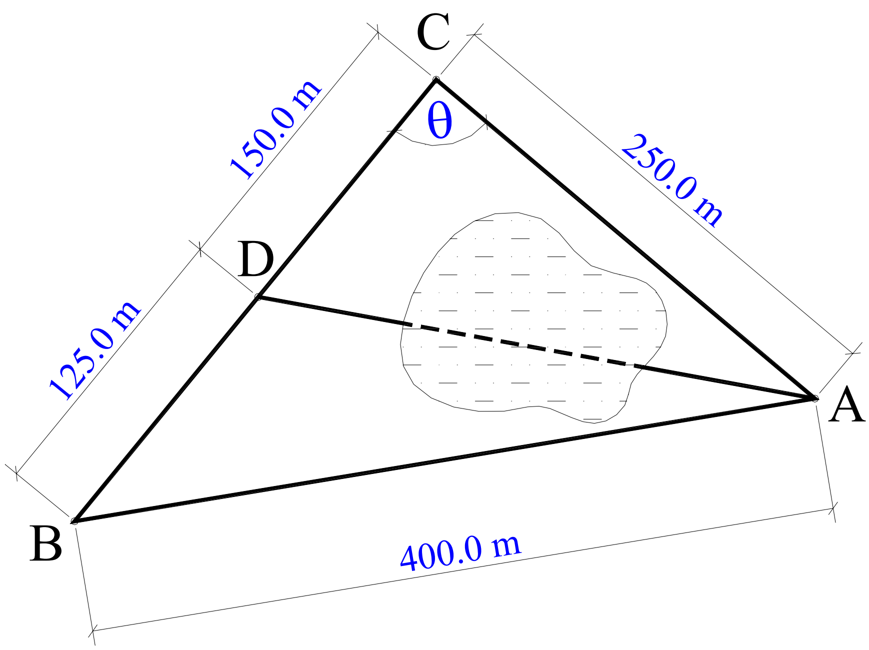
AB = 400.0 m , AC = 250.0 m.

أخذت النقطة D على الخط BC بحيث كان طول BD = 125.0 m ،CD = 150.0 m احسب طول الخط AD، أذا كان :

أ – طول الجنزير المستعمل صحيحاً.

ب – الجنزير المستعمل به عقلة مفقودة فى المتر (15).

الحل



$$AD = \sqrt{\frac{(AB)^2.DC + (AC)^2.DB}{BC} - BD.DC}$$

$$AD = \sqrt{\frac{(400)^2.150 + (250)^2.125}{275} - 125.0*150.0} = 311.339 \text{ m}$$

or,

$$\cos(\theta) = \frac{(AC)^2 + (BC)^2 - (AB)^2}{2*AC*BC}$$

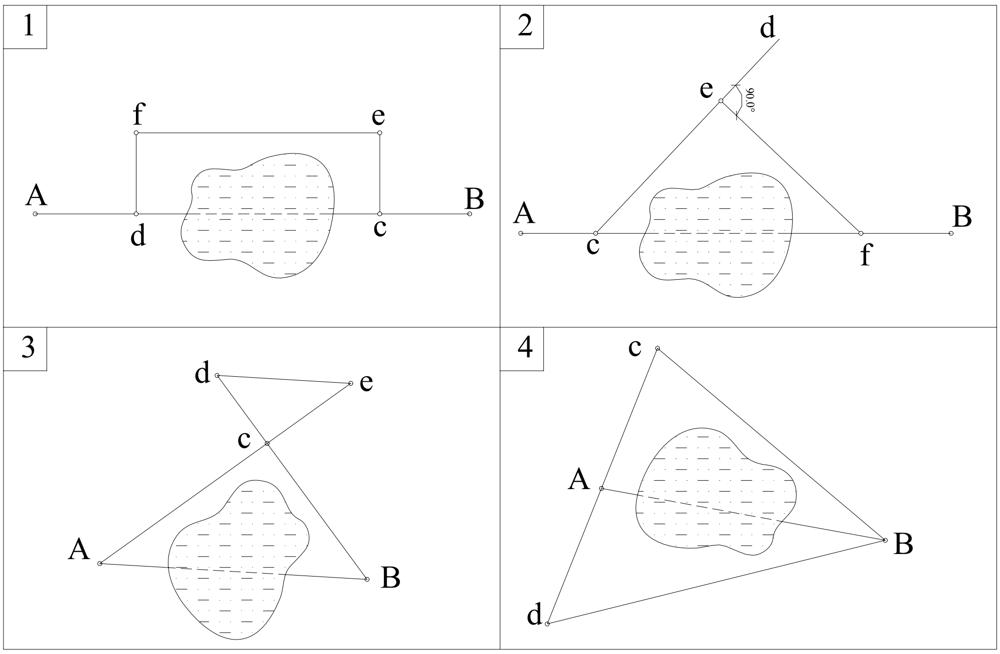
$$\cos(\theta) = \frac{(250)^2 + (275)^2 - (400)^2}{2*250*275} =$$

$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 - 2*AC*CD*\cos(\theta)$

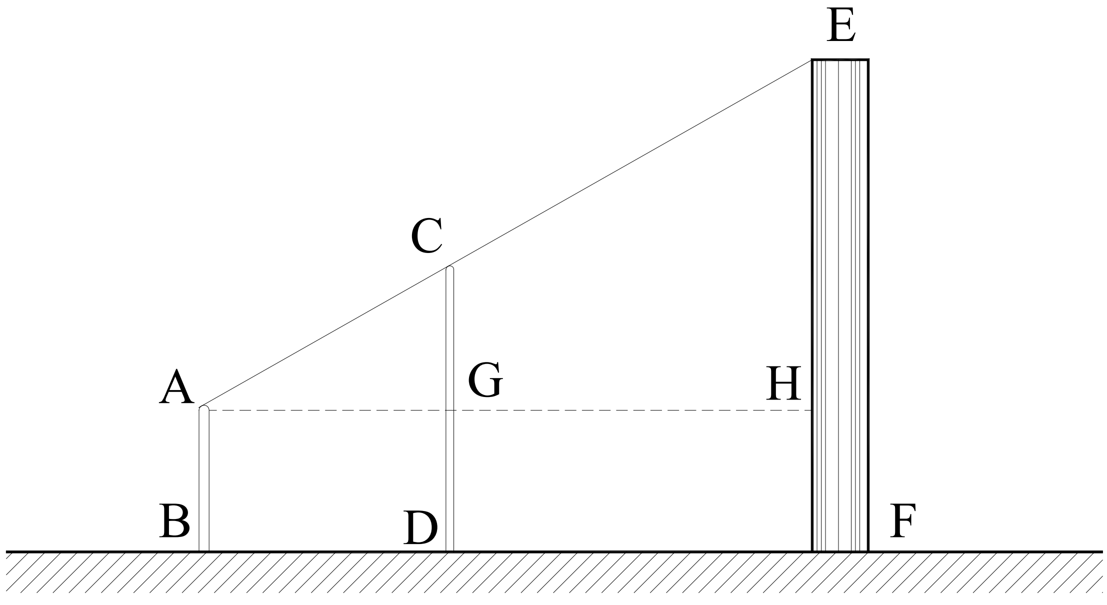
7- وضح كيفية التغلب على العقبات التى نواجهها فى الطبيعة

ب- للتغلب على العوائق فى القياس يمكن استخدام الطرق الآتية:

-1



8- وضح كيفية قياس برج يمكن الوصول إلى قاعدته ولا يمكن الوصول إلى قمته باستخدام أدوات القياس الطولى.



9- وضح كيفية قياس برج لا يمكن الوصول إلى قاعدته، ولا إلى إرتفاعه باستخدام أدوات القياس الطولى فقط.

المساحة بالبوصلة

تعريفات:

1- الشمال المغناطيسى

2- الشمال الجغرافى

3- زاوية الإختلاف

4- إنحراف الخط

5- الإنحراف الدائرى

6- الإنحراف المختصر

Summation of internal angles of a closed polygon = (n-2)*180 ………. (1)

Where:

n number of polygon's sides.

Summation of internal angles of a closed polygon (with the help of member's bearings) = Σ of back bearings - Σ of front bearings + L*360 ………. (2)

Where:

L number of points whose front bearing is greater than the back bearing of the previous member.

عدد النقاط التى بها الإنحراف الأمامى للخط اللاحق أكبر من الإنحراف الخلفى للخط السابق.

Error of internal angles (Δ) = (n-2)*180 –{ Σ of back bearings - Σ of front bearings + L*360 }

Allowable error = $K.\sqrt{2.n}$

Where: K constant

The amount of correction for each direction (e) = $\dfrac{\Delta}{2.n}$

Examples:

1- A closed polygon (abcd) was created. The bearings of all its members was measured by a compass, and they were as follows:

Member	Ab	bc	Ca	cd	Da
Front Bearing	180^0 ...\`	260^0 40\`	61^0 50\`	350^0 30\`	85^0 40\`
Back Bearing	…^{0} 20\`	81^0 …	240^0 40\`	170^0 40\`	265^0 30\`

2- The following observations were taken by a compass for a closed traverse. It is required to adjust the bearings of that traverse by the exact method, and the sides of the traverse by "Bowditch" method (length of side's method).

Side	Length	Front Bearing	Back Bearing
AB	96.23	64^o 16`	244^o 20`
BC	121.15	128^o 17`	307^o 51`
CD	79.16	201^o 03`	22^o 36`
DE	102.77	288^o 46`	107^o 59`
EA	94.75	324^o 16`	144^o 12`

Solution

خطوات الحل:

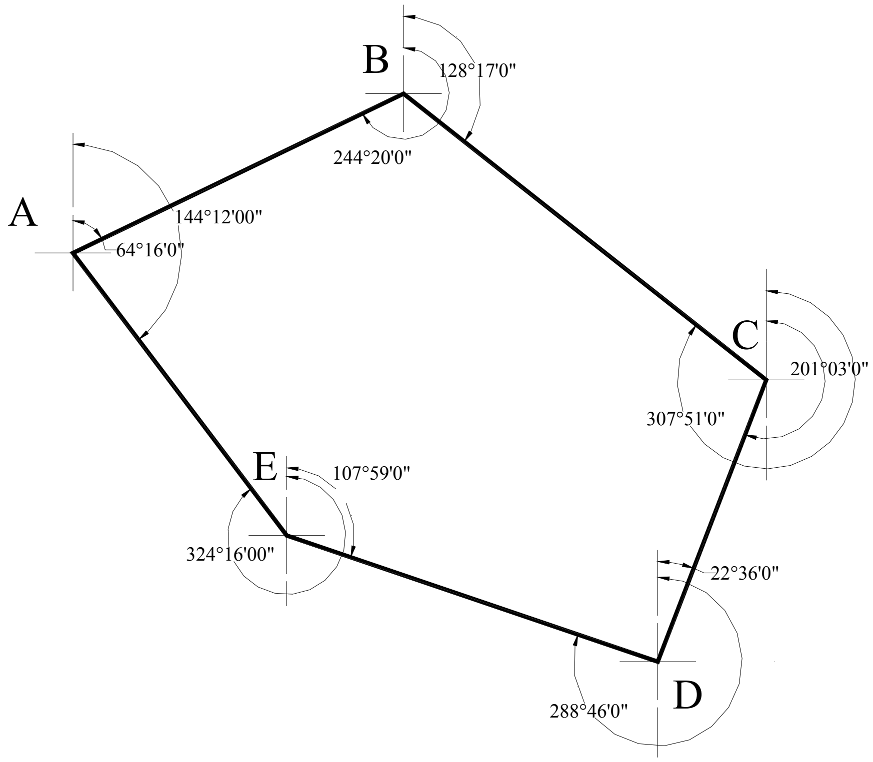
1- تصحيح الخطأ الزاوى:

من المعروف أن مجموع الزوايا الداخلية لأى مضلع مغلق تساوى:

= 180 (n-2) ………. (1)

where n = total number of angles, or sides of the polygon

ويمكن معرفة قيمة الزوايا الداخلية للمضلع بمعلومية الإنحراف الأمامى لخط والإنحراف الخلفى للخط السابق كما هو مبين بالرسم:



Angle (abc) = 244^o 20` - $128^o$ 17`

Angle (cde) = 360 – (288^o 46` - $22^o$ 36`)

وبالتالى يصبح :

مجموع الزوايا الداخلية للشكل = مجموع الإنحرافات الخلفية – مجموع الإنحرافات الأمامية + ل × 360
(2) …………

حيث أن (ل) = عدد النقط التى بها الإنحراف الأمامى للخط اللاحق أكبر من الإنحراف الخلفى للخط السابق

، مثلاً نقطة (d) الخط اللاحق لها هو (de) والخط السابق لها هو (cd)، فإذا كان الإنحراف الأمامى للخط (de) أكبر من الإنحراف الخلفى للخط (cd) فإن نقطة (d) تضاف إلى النقط المستخدمة لإيجاد قيمة (ل).

ولحساب قيمة (ل) فى المثال السابق نبدأ بالإنحراف الأمامى لثانى خط (bc) ونقارنه بالإنحراف الخلفى للخط السابق (ab) أى نقارن $128^0\ 17`$ مع $244^0\ 20`$، وهكذا كما هو مبين من الإتجاهات فى الجدول التالى:

Point	Line	Front Bearing	Back Bearing
A	AB	64^o 16`	244^o 20`
B	BC	128^o 17`	307^o 51`
C	CD	201^o 03`	22^o 36`
D	DE	288^o 46`	107^o 59`
E	EA	324^o 16`	144^o 12`
Summation		1006^o 38`	826^o 58`

وهكذا نجد أن عدد النقط التى يزيد فيها الإنحراف الأمامى للخط اللاحق عن الإنحراف الخلفى للخط السابق يساوى (2) هما نقطتى (d, e)، مع ملاحظة أن الإنحراف الأمامى للضلع الأول يقارن بالإنحراف الخلفى للضلع الأخير. ل = 2

- الخطوة التالية هى إيجاد قيمة الخطأ الزاوى (Δ) من المعادلة:
مجموع الزوايا المحسوبة من المعادلة (1) – مجموع الزوايا المحسوبة من المعادلة (2)

$$\Delta = 180\,(5-2) - \{ (826^o\ 58` - 1006^o\ 38`) + 2 * 360 \}$$
$$= 540.0 - 540^o\ 20` \quad = -00^o\ 20`$$

إذا كان الخطأ (سالب) فإنه يجب <u>زيادة</u> الإنحرافات الأمامية و <u>تقليل</u> الإنحرافات الخلفية
إذا كان الخطأ (موجب) فإنه يجب <u>تقليل</u> الإنحرافات الأمامية و <u>زيادة</u> الإنحرافات الخلفية

والخطأ المسموح به يمكن حسابه من المعادلة:

Allowable error = $k.\sqrt{2.n}$, k is constant, n: number of internal angles.

هذا الخطأ يوزع على عدد الإتجاهات المرصودة وهى تساوى (عدد الأضلاع × 2) = 5 × 2 = 10 اتجاهات

قيمة التصحيح = قيمة الخطأ ÷ عدد الإتجاهات ، ويفضل أن يكون التصحيح لكل إتجاه مقدار صحيح ، لذلك إذا كانت قيمة التصحيح للإتجاة الواحد كسر فإنه يتم الآتى:

error for each direction (e) = $\dfrac{\Delta}{2.n}$, (fraction)

ex: assume that n = 5, Δ = 46,

$e = \frac{46}{2*5} = 4.6$

1-نعين قيمتين صحيحتين للخطأ (e)أصغر مباشرة من قيمة الكسر ثم تلك القيمة الصحيحة + 1 القيمتين الصحيحتين للتصحيح هما (4, 4+1).

$e_1 = 4$, and $e_2 = 5$

2- نعين عدد الإتجاهات التى تأخذ التصحيح (e_2)

$d_1 = \Delta - 2.n.e_1$
$= 46 - 2*5*4 = 6$ directions (takes the correction 5)

3- عدد الإتجاهات التى تأخذ التصحيح (e_1)

$d_2 = 2.n - d_1$
$d_2 = 10 - 6 = 4$ directions (takes the correction 4)

بالعودة إلى المثال الأصلى:

$\Delta = -20.0`$, $e = \frac{\Delta}{2.n} = -20.0 / 10 = -2.0`$

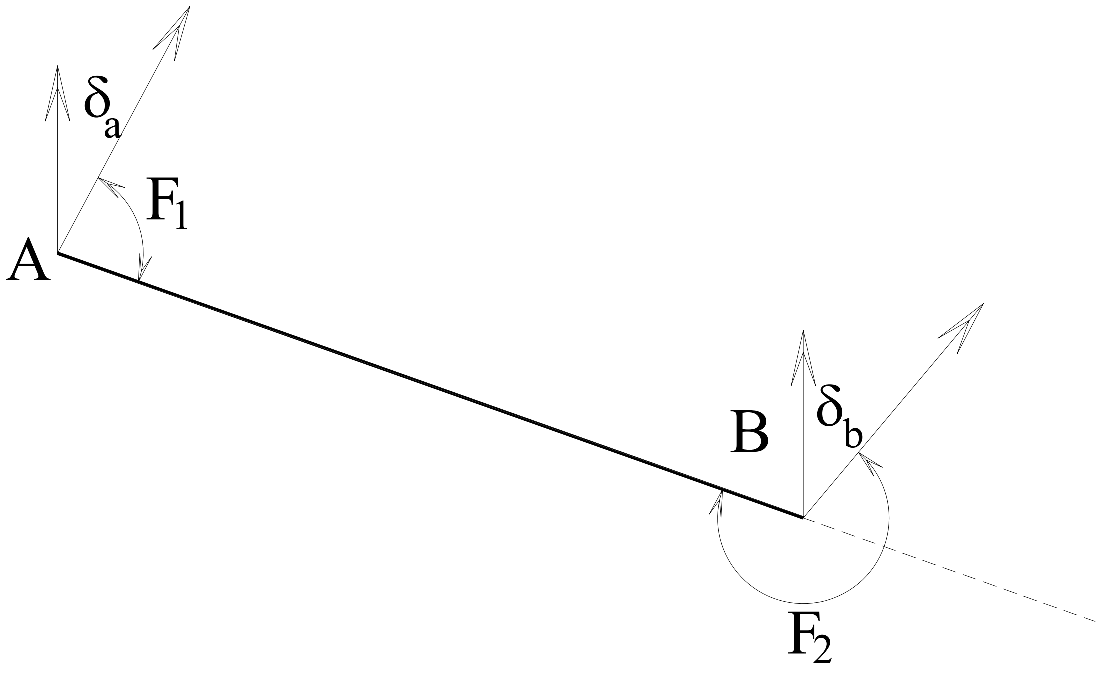
يتم زيادة جميع الإنحرافات الأمامية بمقدار (`2.0) وتقليل جميع الإنحرافات الخلفية بمقدار (`2.0).

Line	Front Bearing	Back Bearing	Corrected Front Bearing	Corrected Back Bearing
AB	64° 16`	244° 20`	64° 18`	244° 18`
BC	128° 17`	307° 51`	128° 19`	307° 49`
CD	201° 03`	22° 36`	201° 05`	22° 34`
DE	288° 46`	107° 59`	288° 48`	107° 57`
EA	324° 16`	144° 12`	324° 18`	144° 10`
Summation			1006° 48`	826° 48`

مجموع الزوايا الداخلية بعد التصحيح =

$= 826^o 48` - 1006^o 48` + 2 * 360 = 540^o$ o.k.

2- تصحيح الإنحرافات بالطريقة الدقيقة للجاذبية المحلية:



فى الشكل المبين (δ_a , δ_b) الفرق بين الشمال الجغرافى والشمال المغناطيسى عند النقطتين (a , b)، فى حالة عدم وجود جاذبية محلية فإن الفرق بين الإنحراف الخلفى والأمامى للخط يساوى 180، أما فى حالة وجود جاذبية محلية كما بالشكل:

$F_2 + \delta_b - 180 = F_1 + \delta_a$

$\delta_b - \delta_a = 180 - (F_2 - F_1)$ ………… (3)

ولإيجاد قيم (δ_a , δ_b , δ_c , …….) نتبع الخطوات الآتية:

1- نيعن الفرق بين الإنحراف الخلفى والأمامى لكل خط (بعد التصحيح الزاوى)
2- نطرح الفرق (بدون إشارة) من 180فنحصل على عدد من المعادلات على الصورة:

$\delta_b - \delta_a = k_1$
$\delta_c - \delta_b = k_2$
$\delta_d - \delta_c = k_3$
..
………

ويجب أن يكون مجموع هذه المعادلات = صفر، أى أن:

$k_1 + k_2 + k_3 + ………. = 0.0$

Line	Corrected Front Bearing	Corrected Back Bearing	Difference Back - Front	180 - d
AB	64^o 18\`	244^o 18\`	180	0.0
BC	128^o 19\`	307^o 49\`	179^o 30\`	0^o 30\`
CD	201^o 05\`	22^o 34\`	-178^o 31\`	1^o 29\`
DE	288^o 48\`	107^o 57\`	-180^o 51\`	-0^0 51\`
EA	324^o 18\`	144^o 10\`	-180^o 8\`	-0^0 8\`

$\delta_b - \delta_a = 0.0$
$\delta_c - \delta_b = 0^o\ 30`$
$\delta_d - \delta_c = -1^o\ 29`$
$\delta_e - \delta_d = 0^o\ 51`$
$\delta_a - \delta_e = 0^0\ 8`$

for check

$0^o\ 30` - 1^o\ 29` + 0^o\ 51` + 0^0\ 8` = 0.0$

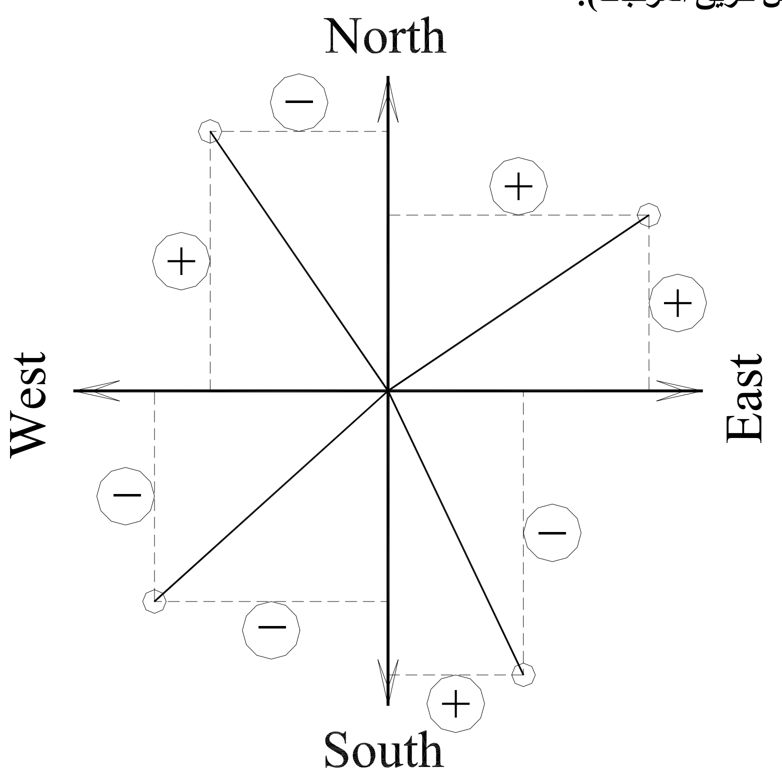
$\delta_b = \delta_a = 0.0$
$\delta_c = 0^0\ 30`$
$\delta_d = -1^o\ 29` + \delta_c = -1^o\ 29` + 0^o\ 30` = -0^o\ 59`$
$\delta_e = 0^o\ 51` + \delta_d = 0^o\ 51` - 0^o\ 59` = -0^o\ 8`$

the last equation is used for check

$\delta_a - \delta_e = 0.0 - (-0^o\ 8`) = 0^o\ 8`$ o.k.

Line	δ_{front}	δ_{Back}	Corrected Front Bearing	Corrected Back Bearing
AB	0.0	0.0	64^o 18\` + 0.0 = **$64^o$ 18\`**	244^o 18\` + 0.0 = **$244^o$ 18\`**
BC	0.0	0^o 30\`	128^o 19\` + 0.0 = **$128^o$ 19\`**	307^o 49\` + $0^o$ 30\` = **308^o 19\`**
CD	0^o 30\`	-0^o 59\`	201^o 05\` + $0^0$ 30\` = **201^o 35\`**	22^o 34\` - $0^o$ 59\` = **21^o 35\`**
DE	-0^o 59\`	-0^o 8\`	288^o 48\` - $0^o$ 59\` = **287^o 49\`**	107^o 57\` - $0^o$ 8\` = **107^o 49\`**
EA	-0^o 8\`	0.0	324^o 18\` - $0^o$ 8\` = **324^o 10\`**	144^o 10\` + 0.0 = **$144^o$ 10\`**

تصحيح خطأ القفل (عن طريق المركبات):



نحدد الإنحراف المختصر لكل ضلع، وبالتالى نعرف موقعه :

N.E (North-East) the Vertical component is (+) and Horizontal component is (+)
N.W (North-West) the Vertical component is (+) and Horizontal component is (-)
S.E (South-East) the Vertical component is (-) and Horizontal component is (+)
S.W (South-West) the Vertical component is (-) and Horizontal component is (-)

Then,

The vertical component (V) = L * cos (θ)
The horizontal component (H) = L * sin (θ),

Where θ is the reduced bearing **(الإنحراف المختصر)**

Line	Length	Corrected Front Bearing	Reduced Bearing	Vertical Component	Horizontal Component
AB	96.23	64^o 18`	N.E 64^o 18`	+41.731	+86.711
BC	121.15	128^o 19`	S.E 51^o 41`	-75.114	+95.054
CD	79.16	201^o 35`	S.W 21^o 35`	-73.61	-29.119
DE	102.77	287^o 49`	N.W 72^o 11`	+31.445	-97.841
EA	94.75	324^o 10`	N.W 35^o 50`	+76.816	-55.469
	494.06			+1.2684	-0.6655

Length of error = $\sqrt{\sum (Vertical\ Components)^2 + \sum (Horizontal\ Components)^2}$

$$= \sqrt{(1.2684)^2 + (-0.6655)^2} = 1.4324$$

$$\% \text{ of error} = \frac{\textit{Length of error}}{\textit{Total length of traverse lines}} = \frac{1.4324}{494.06} = 2.8992*10^{-3}.$$

تنص المواصفات على ألا يتجاوز نسبة خطأ القفل (1:100) فى الأراضى الوعرة ذات الطبوغرافية الشديدة، مع القياس بالجنزير، وألا يتجاوز (1:500) فى المدن.

يتم تصحيح المركبة الرأسية لكل خط كالآتى:

$$\text{تصحيح المركبة الرأسية للخط} = \frac{\text{طول الخط}}{\text{مجموع أطوال خطوط المضلع}} \times \text{المركبة الرأسية لخطأ القفل}$$

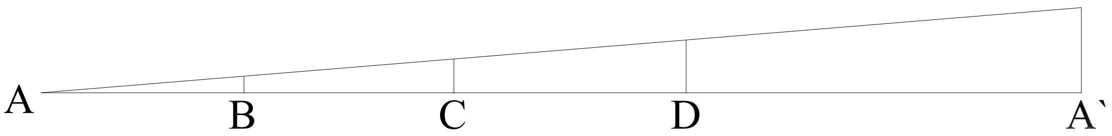
ويتم تصحيح المركبة الأفقية لكل خط كالآتى:

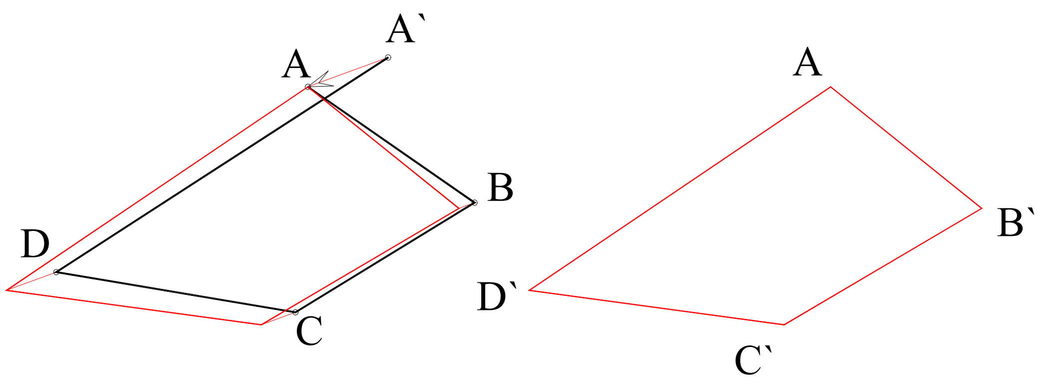
$$\text{تصحيح المركبة الأفقية للخط} = \frac{\text{طول الخط}}{\text{مجموع أطوال خطوط المضلع}} \times \text{المركبة الأفقية لخطأ القفل}$$

ونلاحظ أنه إذا كانت المركبة الرأسية لخطأ القفل موجبة، فإن تصحيح المركبات الرأسية لخطوط المربع تكون سالبة، وهكذا فإن إشارة التصحيح تكون عكس إشارة الخطأ.

Line	Length	Vertical Component	Horizontal Component	Vl. Corr.	Hl. Corr.	Corrected Vl. Comp.	Corrected Hl. Comp.
AB	96.23	+41.731	+86.711	-0.2471	+0.1296	41.484	86.841
BC	121.15	-75.114	+95.054	-0.3110	+0.1632	-75.425	95.217
CD	79.16	-73.61	-29.119	-0.2032	+0.1066	-73.813	-29.012
DE	102.77	+31.445	-97.841	-0.2638	+0.1384	31.181	-97.703
EA	94.75	+76.816	-55.469	-0.2433	+0.1276	76.573	-55.341
	494.06	+1.2684	-0.6655			0.0	0.0

تصحيح الخطأ بالطريقة البيانية:

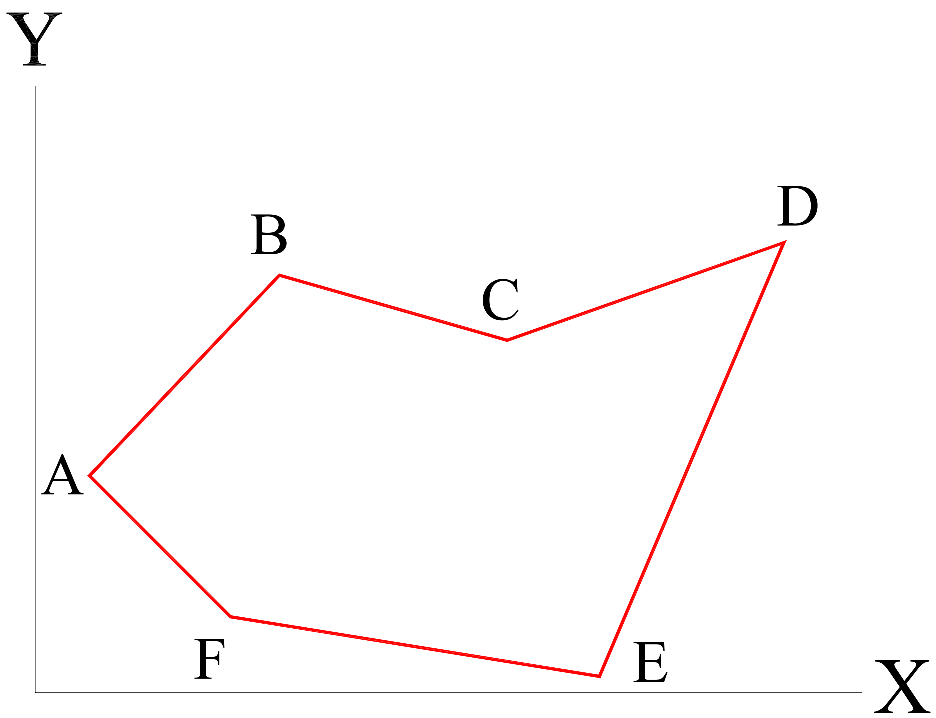




Area:

1- It is required to find the area of the closed traverse, if the coordinates of its corners are as follows:

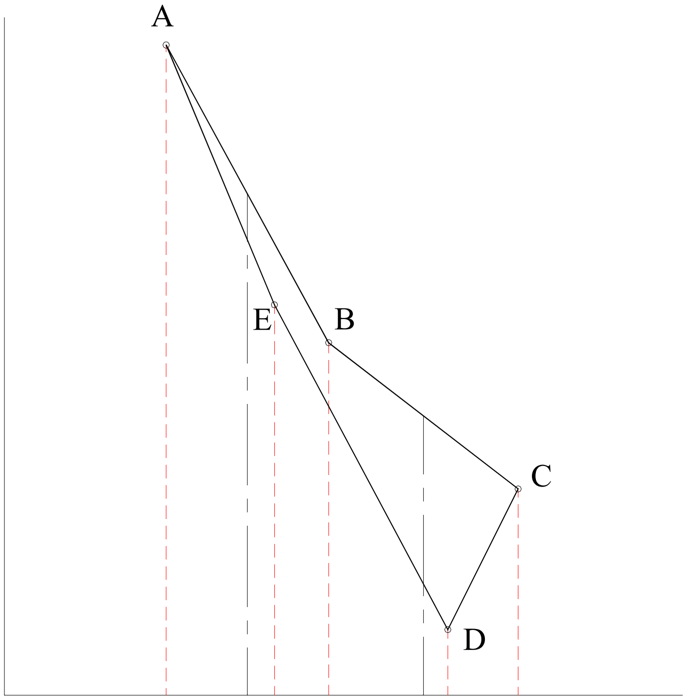
Point	A	B	C	D	E	F
X-Coordinate	10	45	87	138	104	36
Y-Coordinate	40	77	65	83	3	14



Area = 0.50 { $(X_1.Y_2 + X_2.Y_3 + X_3.Y_4 + X_4.Y_5 + X_5.Y_6 + X_6.Y_1) -$
$(Y_1.X_2 + Y_2.X_3 + Y_3.X_4 + Y_4.X_5 + Y_5.X_6 + Y_6.X_1)$ }

= 0.50 { (10 * 77 + 45 * 65 + 87 * 83 + 138 * 3 + 104 * 14 + 36 * 40) –
(40 * 45 + 77 * 87 + 65 * 138 + 83 * 104 + 3 * 36 + 14 * 10)
= 0.50 * 12123 = 6061.50

2- The area by the lines' components:



Line	X component	Y component	Vertical	2*Area
AB	150	-275	$Y_1 = -275$	-41250
BC	175	-135	$2Y_1+Y_2 = -685$	-119875
CD	-65	-130	$2(Y_1+Y_2)+Y_3 = -950$	61750
DE	-160	300	$2(Y_1+Y_2+Y_3)+Y_4 = -780$	124800
EA	-100	240	$2(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)+Y_5 = -240$	24000
				49425

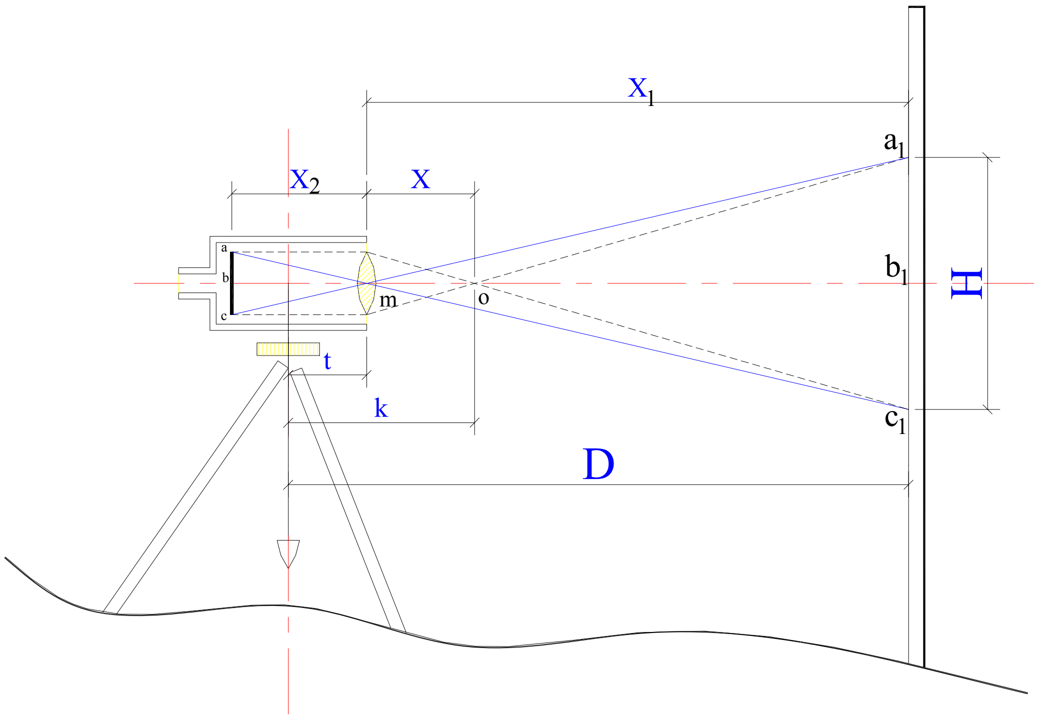
Area = 0.50 * 49425 = 24712.50

المساحة التاكيومترية

هى المساحة السريعة، وتتم باستخدام تيودليت مجهز ببعض الإضافات الخاصة. وبواسطة هذه الإضافات ومع استخدام بعض الأجهزة المساعدة يمكن إيجاد المسافات الأفقية ، والرأسية بسرعة وبدقة معقولة.

1- طريقة شعرات الإستاديا:

وتتم باستخدام تيودليت يزود دليله بشعرتين أفقيتين إضافيتين أعلى وأسفل الشعرة الرئيسية:



m	المركز البصرى للعدسة الشيئية
a , c	شعرتا الإستاديا
b	الشعرة الأفقية الوسطى
a_1 , b_1 , c_1	تقاطع شعرتى الإستاديا ، والشعرة الوسطى مع القامة
X	البعد البؤرى للعدسة الشيئية
X_1	المسافة الأفقية بين القامة والمركز البصرى للعدسة الشيئية
X_2	البعد الأفقى بين مركز العدسة الشيئية ، ومستوى حامل الشعرات
t	البعد الأفقى بين المركز البصرى للعدسة الشيئية ، والمحور الرأسى لدوران المنظار.
H	المسافة المقطوعة على القامة بين شعرتى الإستاديا ، = $a_1.b_1$
o	بؤرة العدسة الشيئية

$$D = H.\frac{X}{ab} + (X + t)$$

حيث (ab) = طول حامل الشعرات

$$\frac{X}{ab} = K_1$$ يسمى الثابت التاكيومترى = **البعد البؤرى للعدسة الشيئية / طول حامل الشعرات**

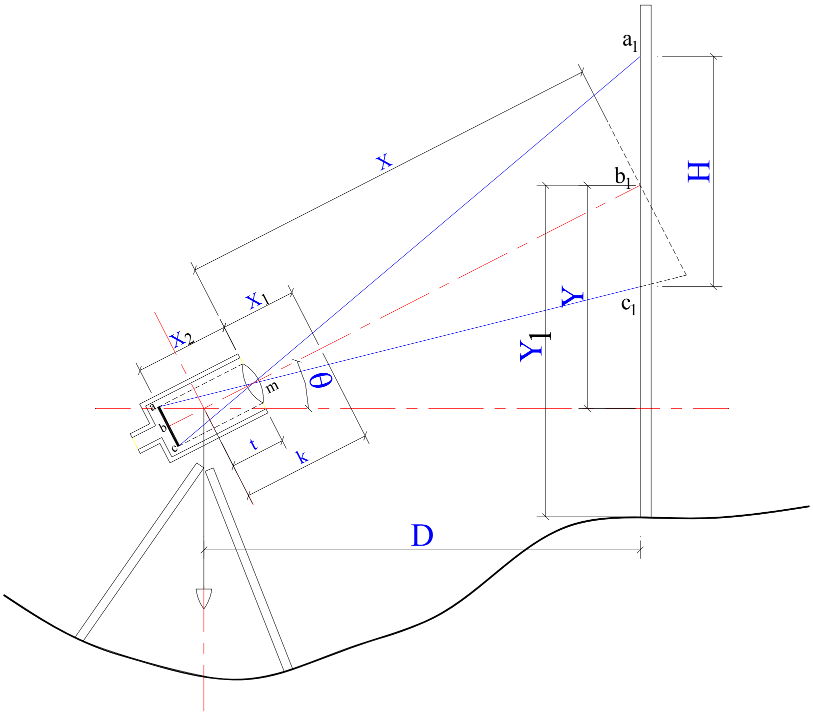
وتتراوح قيمة K_1 بين 50 , 100 , 200

K = (X + t) يسمى الثابت الإضافى = البعد البؤرى للعدسة الشيئية + المسافة من مستوى العدسة الشيئية إلى المحور الرأسى
ويتراوح قيمة الثابت الإضافى بين 30 ، 60 سم.

$D = H . K_1 + K$ .... (

المسافة الأفقية بين نقطة الرصد إلى القامة = فرق قراءة الشعرتين العليا والسفلى × الثابت التاكيومترى + الثابت الإضافى.

وفى حالة أخذ رصدة مائلة (زاوية النظر مرتفعة):



$$D = H.\frac{X}{ab}.\cos^2\theta + (X + t).\cos\theta$$

$D = H . K_1 . \cos^2 \theta + K . \cos \theta$ .... (

ويمكن إيجاد إرتفاع أو إنخفاض النقطة المرصودة عن المستوى الافقى المار بالجهاز (Y)

$Y = D . \tan \theta$ .... (

مثال:

1- رصدت نقطة بجهاز تيودليت مزود بشعرات الإستاديا، وكانت زاوية النظر أفقية، فكانت قراءة الشعرات 2.613 – 4.106، ثم قيست المسافة بواسطة شريط فكانت 150 م . رصدت نقطة أخرى ، وكان خط النظر مائلاً بزاوية 7 درجات وكانت قراءة الشعرات 1.146 – 3.154 وقيست المسافة بشريط فكانت 200 متر، أوجد الثابت التاكيومترى، والثابت الإضافى.

Solution

فى حالة خط النظر أفقى:

$$D = H \cdot K_1 + K$$

$$150 = (4.106-2.613) \cdot K_1 + K \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

فى حالة خط النظر يميل بزاوية 7 درجات:

$$D = H \cdot K_1 \cdot \cos^2\theta + K \cdot \cos\theta$$

$$200 = (3.154 - 1.146) \cdot K_1 \cdot \cos^2(7) + K \cdot \cos(7) \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

بحل المعادلتين 1، 2 آنياً ينتج أن:

$K_1 = 103$ (الثابت التاكيومترى)

$K = 3.785$ (الثابت الإضافى)

2- فى جهاز تيودليت مزود بحامل شعرات كانت المسافة بين كل زوج من الشعرات 40/1 بوصة، والبعد البؤرى للعدسة الشيئية (X) = 9 بوصة، والمسافة بين المحور الرأسى للجهاز إلى مستوى العدسة الشيئية (t) = 4.5 بوصة. رصدت نقطة بواسطة هذا الجهاز وكان خط النظر يميل بزاوية 9 درجات، وكانت قراءة الشعرات 1.63 – 2.14 - 2.65 على قامة مقسمة بالقدم والبوصة. أوجد المسافة الأفقية بين الجهاز والنقطة المرصودة، وإذا كان منسوب النقطة المرصودة = 80 قدم ،وإرتفاع خط النظر 4.50 قدم، أوجد منسوب نقطة الرصد (النقطة التى بها الجهاز).

Solution

$$ab = 2 * \frac{1}{40} = \frac{1}{20} \quad \text{inch}$$

$$X = 9.0 \quad \text{inch} \quad , \text{then} \quad K_1 = \frac{X}{ab} = 9.0 * 20.0 = 180 \ \text{(dimensionless value)}$$

$$K = X + t = 9.0 + 4.50 = 13.50 \quad \text{inch} = 13.50 / 12.0 = 1.125 \quad \text{Ft}$$

$$H = 2.65 - 1.63 = 1.02 \quad \text{Ft}$$

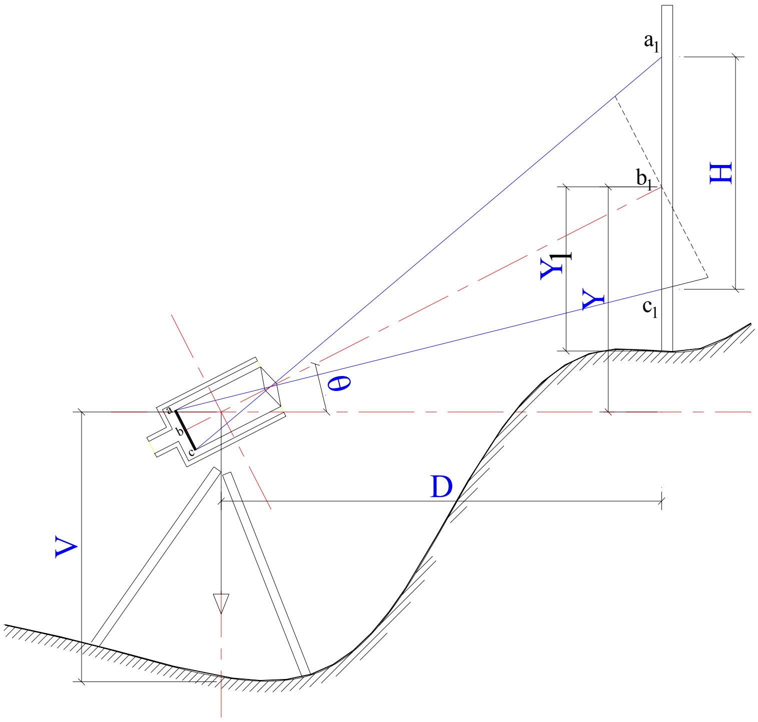
$$D = H \cdot K_1 \cdot \cos^2\theta + K \cdot \cos\theta$$

$$= 1.02 * 180 * \cos^2(9) + 1.125 * \cos(9) = 182.451 \quad \text{Ft}$$

المسافة الرأسية بين خط النظر ، وبين النقطة المرصودة :

$$Y = D \cdot \tan\theta$$

$$= 182.451 * \tan(9) = 28.879 \quad \text{Ft}$$



.

فرق المنسوب بين نقطة الرصد والنقطة المرصودة:

$= Y - Y_1 + V = 28.879 - 2.14 + 4.5 = 31.239$ Ft

منسوب نقطة الرصد:

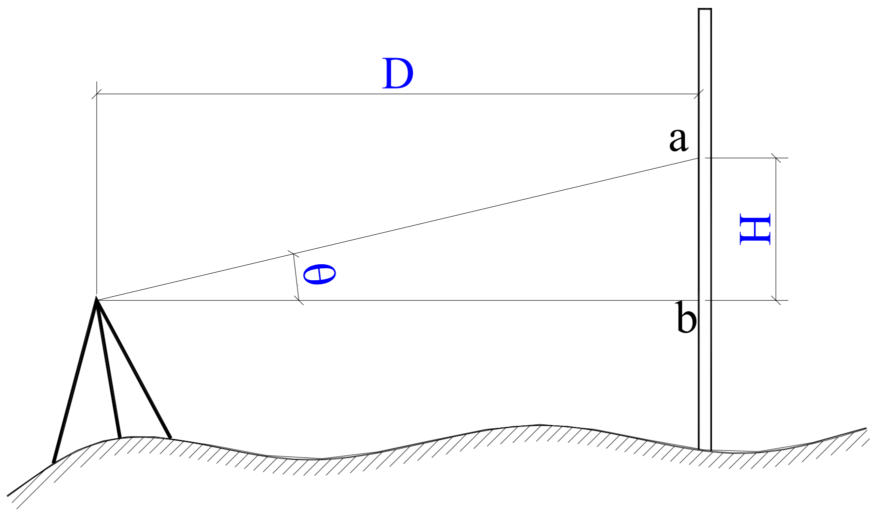
$= 80 - 31.239 = 48.761$ Ft

2- طريقة الظلال:

وترجع جذور هذه الطريقة إلى العام 1850، وبواسطة هذه الطريقة يمكن تعيين المسافة الأفقية والبعد الرأسى باستخدام تيودليت عادى ، وتوجد حالتان للرصد :

أ- إذا كانت طبيعة الأرض تسمح بأخذ رصدة أفقية:

نضع التيودليت عند نقطة الرصد (يطلق عليها عادة النقطة المحتلة)، والقامة عند النقطة المرصودة، ثم نأخذ قراءة القامة عندما يكون خط النظر أفقياً، ولتكن (b). ثم نميل المنظار بزاوية معينة (إلى أعلى أو إلى أسفل) ونعين قراءة القامة فى الحالة الثانية (a):

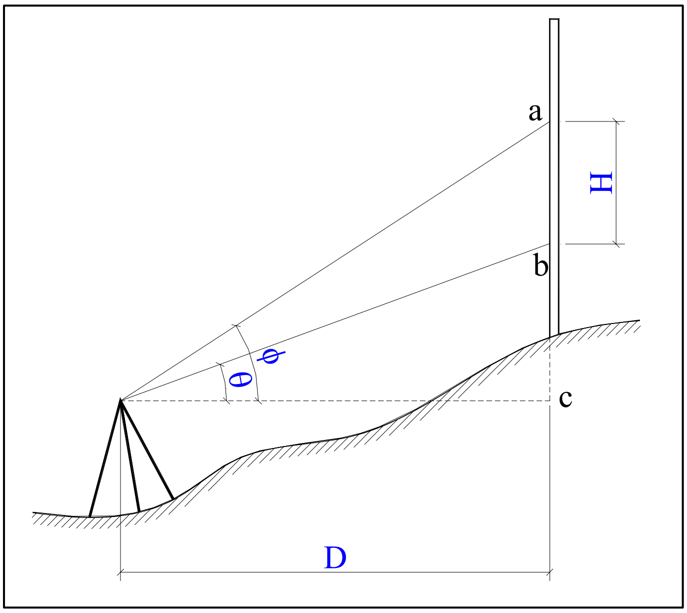


$$H = a - b$$

$$D = \frac{H}{\tan\theta}$$

ب- عندما لا تسمح طبيعة الأرض بأخذ نظرات أفقية:

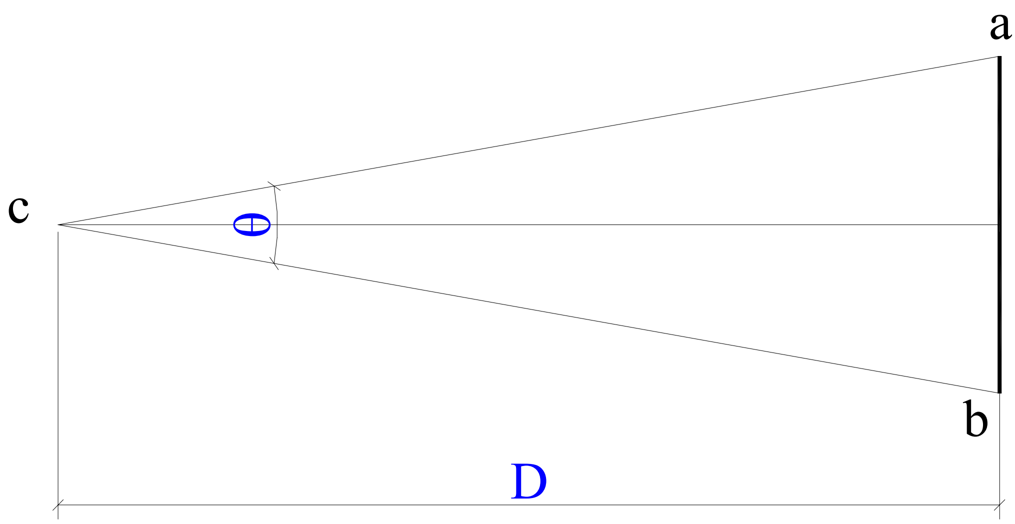
نوجه المنظار إلى القامة بزاوية ميل معينة (θ_1) ونأخذ القراءة على القامة (b)، ثم نغير زاوية ميل المنظار ولتكن (ϕ)، ونأخذ القراءة الثانية على القامة (a).



ac = D . tan ϕ, bc = D . tan θ ac – bc = H

H = D (tan ϕ - tan θ) $D = \dfrac{H}{\tan\phi - \tan\theta}$

3- طريقة قضيب المسافات:



وتتم عن طريق قياس زاوية أفقية على طرفى قضيب معروف طوله بدقة شديدة، وبالتالى يمكن معرفة المسافة الأفقية بين النقطة المحتلة والنقطة المرصودة كالآتى:

$D = \dfrac{1}{2}.ab.\tan\dfrac{\theta}{2}$

مسائل علـى القياس التاكيومترى

1- أخـذت القـراءات الآتيـة علـى قامـة رأسـية موضـوعة عنـد نقطتـين بواسـطة جهـاز تـاكيومترى بغـرض تعيـين الثابـت التاكيومترى، والإضافى. عين الثابتين:

المسافة الأفقية	زاوية الإرتفاع	قراءات القامة		
150	صفر	4.106	3.359	2.613
200	7 درجات	3.154	2.150	1.146

2- تاكومتر مزود بثلاث شعرات المسافة بين كل زوج منها $\frac{1}{40}$ من البوصة، والبعد البؤرى للشيئية 9.0 بوصة والمسافة من الشيئية للمحور الرأسى $4\frac{1}{2}$ بوصة. وضعت قامة رأسية عند نقطة منسوبها 80.0 قدم ، أميل المنظار 9.0^0 على الأفقى، وكانت قراءات القامة :

(1.63 – 2.14 – 2.65) feet

أوجد المسافة الأفقية بين الجهاز والقامة، وكذلك منسوب خط النظر علماً بأن ارتفاع الجهاز 4.50 قدم.

3- عين معدل الإنحدار بين نقطتين (A, B) من الأرصاد الآتية المأخوذة بتاكيومتر مجهز بعدسة تحليلية (الثابت الإضافى له = صفر)، وثابته التاكيومترى 100.0.

الزاوية الرأسية	القراءات			الإنحراف	من الجهاز
$+10^o\ 12'$	2.80	2.00	1.20	75^o	إلى A
$-4^o\ 48'$	1.30	2.10	2.90	345^o	إلى B

4- قيس خط (AB) باستخدام قضيب الإنفار (Subtense Bar) ، وخط قاعدة مساعد عمودى على جانب واحد من (AB)، وفى منتصفه تماماً، فإذا كان طول الخط (AB) هو 684.0 متر ، وطول القاعدة المساعد هو 28.0 متر، فعين الزاوية الأفقية بين نهايتى القضيب (زاوية البرالكس)، والزاوية الموجودة عند نهاية الخط.
وإذا كان خط القاعدة المساعد ينصف (AB)، وعلى جانبيه، فما هى زاوية البرالكس؟ والزاوية المرصودة عند نهاية الخط.

5- قمة تل معلوم إرتفاعها بأنه 2055 متر فوق سطح المياه فى بحيرة. رصدت هذه القمة من الجانب الآخر للبحيرة، وكانت زاوية إرتفاعها $5^o\ 10''$ ، فإذا كانت زاوية إنخفاض صورة القمة فى مياه البحيرة: $8^o\ 40''$، أوجد المسافة الأفقية من الجهاز إلى التل، وأوجد كذلك الفرق بين منسوبى النقطتين (اعتبر أن معامل الإنكسار للماء هو نفسه للهواء).

6- لإيجاد منسوب النقطة (A) من النقطة (B) المعلوم منسوبها وضع التيودوليت فوق نقطة جديدة (C) وأخذت القراءات الآتية على القامتين الموضوعتين رأسياً فوق (A, B) فكانت:

قراءات الشعرات (متر)			الزاوية الرأسية	القامة
0.950	1.502	2.055	$-7^o\ 35'\ 30''$	A
2.98	2.0	1.018	$+10^o\ 50'\ 30''$	B

فإذا علم أن الجهاز به عدسة تحليلية، والثابت التاكيومترى = 100 وأن منسوب نقطة (B) = 42.03- متر. أوجد منسوب نقطة (A).

7- أوجد إلى أى زاوية رأسية يمكن اعتبار المسافة المائلة تساوى المسافة الأفقية فى القياس التاكيومتر بحيث أن الخطأ لا يزيد عن $\frac{1}{300}$ ، ويوجد بالجهاز عدسة تحليلية (أى أن الثابت الإضافى = صفر).

8- البعد البؤرى للعدسة الشيئية فى منظار هو 12.0بوصة، والمحور الرأسى للدوران فى منتصف المسافة بين البؤرة، والعدسة الشيئية. وضعت قامة على بعد 301.50 قدم من المحور الرأسى للجهاز، وكان الجزء المقطوع بين شعرتى الاستاديا على القامة = 3.0 قدم.
ما هى المسافة بين شعرتى الستاديا على حامل الشعرات فى الجهاز؟

10- وضعت قامة رأسية ورصدت بتيودوليت عادى، ورصدت الزوايا الرأسية لهدفين على القامة، فإذا كانت المسافة الرأسية بينهما 4.26 متر، والفرق بين ظلى زاويتى الإرتفاع = 0.044 ، ماهو منسوب نقطة القامة إذا كان ظل زاوية الهدف السفلى = 0.161 والإرتفاع من الأرض للهدف العلوى = 1.75 متر، ومنسوب سطح الجهاز تحت سطح البحر بمقدار 4.0 متر.

12- فى ترافرس، أريد إيجاد المسافة بين النقطتين (A, B) النقطة A كانت ظاهرة من نقطة X احدى نقط الترافرس، أما نقطة B فكانت ظاهرة من نقطة أخرى Y . أخذت أرصاد تاكيومترية من النقطتين (X, Y) على قائمتين موضوعتين فوق النقطتين (A, B) وكانت الأرصاد كالآتى:

Occupied Point	Co-ordinates		Traverse Point	Bearing	Vertical angle	Hair Readings		
	Horizontal	Vertical						
X	3800 E	1000 N	A	326^o 42`	09^o 22`	1.50	2.11	2.72
Y	3600 W	740 N	B	10^o 27`	12^o 18`	1.80	2.25	2.70

الجهاز مزود بعدسة تحليلية، والثابت التاكيومتر = 100 . احسب المسافة AB، وانحراف الخط AB.

13- أخذت قراءات من جهازى تاكيومتر عند نقطة A، التى منسوبها 15.05 متر، إلى قامة موضوعة فوق B:
الجهاز الأول (ρ) : ثابته التاكيومترى = 100 ، وثابته الإضافى = 14.40 بوصة.
الجهاز الثانى (ϕ) : ثابته التاكيومترى = 95 ، وثابته الإضافى = 15.0 بوصة.
وكان ارتفاع الجهاز (ρ) عند نقطة A = 1.45 متر، وزاوية الإرتفاع

Theory of Errors

كلما وجدت أرصاد، كلما وجدت أخطاء، وتختلف طبيعة هذه الأخطاء، وقد تعود إلى الشخص الراصد أو الآلـة التى يرصد بها أو إلى عوامل طبيعية خارجية:

<u>1- Types of Errors:</u>

1-1- According to the sources:

a- Personal Errors
b- Instrumental Errors
c- Natural Errors

2-1 According to kind

a- Systematic Error
b- Un-systematic (random) Error
c- Gross error

<u>2- propagation of Errors</u>

عند قياس خط طوله يزيد عن طول الشريط عدة مرات، فإن عدد مرات القياس (n)، وإذا وجد خطأ فى القياس فإنه يتكرر بنفس العدد من المرات، فإذا كانت قيمة هذا الخطأ فى المرة الواحدة (E)، فإن الخطأ الناتج فى الخط كله = (n.E). ونلاحظ أن الخطأ يتجمع ولا تتغير نسبته بزيادة طول الخط.

<u>3- Random Errors:</u>

الأخطاء لها مصادر متعددة، ولإرجاع الخطأ إلى مصدره سواء كان شخصى أو من الجهاز المستخدم يتم الآتى:
- عند عمل مجموعة من الأشخاص على نفس الجهاز فإن مصدر الأخطاء يكون شخصى.
- عند استخدام شخص واحد مجموعة من الأجهزة، فإن مصدر الخطأ يكون من الجهاز،
بعد التخلص من الأخطاء المنتظمة، والثابتة تبقى الأخطاء العارضة ، وتتميز بأنها صغيرة جداً، وغير ثابتة الإشارة أو القيمة، ولا يمكن معرفة أسبابها أو التخلص منها.

بعض التعاريف الهامة

1- القياس المباشر: Direct Measure
هو القياس الذى يتم بواسطته تحديد الكمية المقاسة مباشرة، مثل قياس طول خط بواسطة الشريط، أو قياس قيمة زاوية بواسطة التيودوليت.

2- الرصد أو القياس غير المباشر: Indirect Measure
القياس الغير مباشر يعنى الحصول على كمية ، لم يتم عمل قياس مباشر لها. مثل حساب طول ضلع فى مثلث بمعلومية الضلعين الآخرين، والزاوية بينهما، فالضلع الذى تم الحصول على قيمة قياسه لم يستخدم الشريط فى قياسه، وإنما استخدمت علاقة خاصة تربط أضلاع المثلث.

3- القيمة الأكثر احتمالاً:   The most probable value

يتعذر التخلص تماماً من الأخطاء العادية والمنتظمة، كما يتعذر أيضاً أخذ عدد لا نهائى من الأرصاد للحصول على القيمة الحقيقية للكمية المقاسة. وبفرض أن الأخطاء العادية والمنتظمة تلاشت إلى أقصى حد ممكن بحيث يمكن اهمالها، فإن أفضل قيمة احتمالية تكون هى القيمة التى يحتمل صحتها أكثر من غيرها تبعاً لنظرية أقل مجموع لمربعات التصحيح.

لذلك فإن القيمة المتوسطة للأرصاد العديدة للكمية المطلوبة يطلق عليها القيمة الأكثر احتمالاً، ويقصد بذلك أنها أقرب ما يمكن للكمية الحقيقية.

4- الخطأ الحقيقى: True error

هو الفرق بين القيمة الحقيقية للكمية المرصودة (وهى يتعذر او يستحيل الحصول عليها) وبين القيمة المرصودة لها. ولما كان الحصول على القيمة الحقيقية مستحيل، فإن الحصول على الخطأ الحقيقى مستحيل أيضاً.

الخطأ الحقيقى = القيمة المرصودة – القيمة الحقيقية

5- الأخطاء الباقية: Residual error

هو الفرق بين القيمة المرصودة، وبين القيمة الأكثر احتمالاً لها

الخطأ الباقى = القيمة المرصودة – القيمة الأكثر احتمالاً

6- المتوسط الحسابى: Arithmetic mean

عندما يقوم الراصد برصد كمية ما عدد من المرات = n، فإنه يحصل على نتائج مختلفة، ومتوسط هذه الأرصاد يساوى المجموع الكلى للأرصاد ÷ عدد مرات الرصد.

وللمتوسط الحسابى عدة خواص أهمها:

أ- مجموع الأخطاء الباقية يساوى صفر (لأن الخطأ الباقى = القيمة المرصودة – القيمة الأكثر احتمالاً)، ولما كانت القيمة الأكثر احتمالاً تمثل المتوسط الحسابى فإن مجموع الأخطاء الباقية للأرصاد = صفر.

ب- مجموع مربعات الأخطاء الباقية أقل ما يمكن

7- الخطأ التربيعى المتوسط: Mean square error (MSE)

لتقدير دقة الأرصاد لكمية ما معلوم قيمتها الحقيقية يستخدم الإنحراف المعيارى أو ما يسمى فى نظرية الأخطاء بالخطأ التربيعى المتوسط Mean Square Error (M.S.E).

- الخطأ التربيعى المتوسط للرصدة الواحدة: MSE of a single observation

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

- الخطأ التربيعى المتوسط للمتوسط الحسابى: MSE of the arithmetic mean

من المعلوم أن دقة تعيين الكمية المجهولة باستخدام المتوسط الحسابى أكبر من تعيينها باستخدام أى رصدة أخرى. وبالتالى فإن الخطأ التربيعى المتوسط للمتوسط الحسابى أقل من الخطأ التربيعى المتوسط للرصدة الواحدة، والعلاقة بين الخطأ التربيعى المتوسط للرصدة الواحدة، وبين الخطأ التربيعى المتوسط للمتوسط الحسابى هى:

$$\sigma_o{}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

where σ_o the mean square error of the arithmetic mean

$$\sigma_o = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n.(n-1)}}$$

8- الخطأ النسبى: Relative error

عند اختلاف الكميات المقاسة فى الوحدات (مثلاً طول وزاوية) والمطلوب معرفة أيهما أدق فى القياس، فإنه من الخطأ مقارنة الأخطاء فى الحالتين، لذلك تعين كمية تسمى الخطأ النسبى للمقارنة لتحديد أى الأرصاد أدق.

$$\text{Re}lative\ Error = \frac{\sigma}{\overline{\overline{X}}}$$

9- الخطأ المتوسط: Mean error

وهو يساوى المتوسط الحسابى للأخطاء مجردة من الإشارة، ويرمز له بالرمز (η)، وقد أمكن اثبات أن:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.\sigma = 0.7979\ \sigma$$

10- الخطأ المحتمل: Probable error

هو الخطأ الذى يكون احتمال وقوعه = 50% من وقوع جميع الأخطاء، لذلك فهو يمثل الرقم الأوسط فى ترتيب الأخطاء الباقية، وقد أمكن اثبات أن الخطأ المحتمل يمكن تعينه من:

r = 0.6745 σ

example:

3- A distance was measured eight times and the observations were as follows:

118.167 m	***118.750 m***	***118.273 m***	***118.266 m***
118.165 m	***118.167 m***	***118.760 m***	***118.280 m***

a- calculate the mean value ($\overline{X}$) of this distance, and the mean square error (MSE) of the observations (σ_x) of a single measurement.
b- Calculate the (MSE) of the arithmatic mean (σ_x).
c- Calculate the relative error.
d- Find the mean error (a) and the probable error (r) from the above observations, then check their relations with (σ)
e- Supposing that if the true value of that distance was 118.248 m, what would you comment upon these observations?

Solution

No.	Observation	Residual error $X_i - \overline{X}$	error Sorting	True error $X_i - X_t$	error Sorting
1	118.167	-0.1865	0.0735	-0.081	0.018
2	118.750	0.3965	0.0805	0.502	0.025
3	118.273	-0.0805	0.0875	0.025	0.032
4	118.266	-0.0875	**0.1865**	0.018	**0.081**
5	118.165	-0.1885	**0.1865**	-0.083	**0.081**
6	118.167	-0.1865	0.1885	-0.081	0.083
7	118.760	0.4065	0.3965	0.512	0.502
8	118.280	-0.0735	0.4065	0.032	0.512
	Σ = 946.828				

a- mean value = $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{946.828}{8}$ = 118.3535 m

- mean square error of a single observation (σ_{n-1}) = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$ = 0.252725

b- MSE of the arithmetic mean = $\sigma_o = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n.(n-1)}} = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0.252725}{\sqrt{8}}$ = 0.08935

c- relative error :

$R_e = \frac{\sigma_{n-1}}{\overline{X}} = \frac{0.252725}{118.3535}$ = 0.002135

d- Mean error (a) = $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X}}{n} = \frac{1.606}{8}$ = 0.20075

check of mean error value with (σ_{n-1})

a = 0.7979 σ = 0.7979 * 0.2527 = 0.2016

d- Probable error:

يتم ترتيب الأخطاء من الأصغر إلى الأكبر، بدون النظر إلى الإشارة، إذا كان عدد الأرصاد فردية فإن الخطأ رقم $\frac{n+1}{2}$ يمثل الخطأ الأكثر احتمالاً.

وإذا كانت عدد الأرصاد زوجية فإن الخطأ الأكثر احتمالاً = متوسط الخطأين رقمى ($\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$) .

$$r = \frac{0.1865 + 0.1865}{2} = 0.1865$$

r = 0.6745 σ = 0.6745 * 0.2527 = 0.1704

e- if the true value = 118.248, then, it can be concluded that both observations (118.750, and 118.760) contains random errors, and must be excluded.

11- الأوزان:

ويقصد بها مدى الإعتداد بالرصدة، مثلاً الشخص الدقيق له أرصاد لها وزن، وبالتالى فإن الأرصاد التى لها وزن عبارة عن أرصاد لها ثقة نسبية.

$$\text{weight} = \frac{1}{\sigma^2}$$

Where:

σ Standard deviation

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

والإنحراف المعيارى يمثل إنحراف الرصدة الواحدة عن القيمة المتوسطة للأرصاد كلها. وبالتالى كلما قل الإنحراف المعيارى للرصدة كلما زداد وزنها.

12- خواص منحنى الأخطاء (منحنى جاوس):

عبارة عن منحنى يمثل فيه المحور الأفقى القيمة العددية والجبرية للأخطاء، ويمثل المحور الرأسى احتمال وقوع الخطأ أو عدد مرات حدوثه.
فمثلاً إذا قسنا كمية ما عدد كبير جداً من المرات، ثم حددنا الخطأ الباقى ويساوى الفرق بين القيم المرصودة وبين القيمة الأكثر احتمالاً، ثم تم ترتيب النتائج فى جدول كالتالى:

مثال:

1- the angle (ABC) was measured 25 times, with equally accuracy. By taking the arithmetic mean of the observations, the most probable value of the angle was (94º 04` 20.55``). The values of observations are listed in the following table:

No.	Observations	Residual Error $X_i - \overline{X}$	+V	-V
1	94º 04` 20.85``	0.30	1.80	1.80
2	94º 04` 20.50``	-0.05	1.45	1.50
3	94º 04` 20.60``	0.05	1.45	1.50
4	94º 04` 20.50	-0.05	1.20	1.05
5	94º 04` 20.70``	0.15	0.95	1.00
6	94º 04` 19.05``	-1.50	0.70	0.80
7	94º 04` 20.50	-0.05	0.70	0.55
8	94º 04` 22.00``	1.45	0.70	0.55
9	94º 04` 19.55``	-1.0	0.40	0.30
10	94º 04` 19.75``	-0.80	0.30	0.05
11	94º 04` 20.50``	-0.05	0.15	0.05
12	94º 04` 19.05``	-1.50	0.05	0.05
13	94º 04` 18.75``	-1.80		0.05
14	94º 04` 20.00``	-0.55		
15	94º 04` 20.00``	-0.55		
16	94º 04` 21.25``	0.70		
17	94º 04` 21.25``	0.70		
18	94º 04` 22.00``	1.45		
19	94º 04` 21.50``	0.95		
20	94º 04` 19.50``	-1.05		
21	94º 04` 21.75``	1.20		
22	94º 04` 22.35``	1.80		
23	94º 04` 20.95``	0.40		
24	94º 04` 20.35``	-0.20		
25	94º 04` 21.25``	0.70		

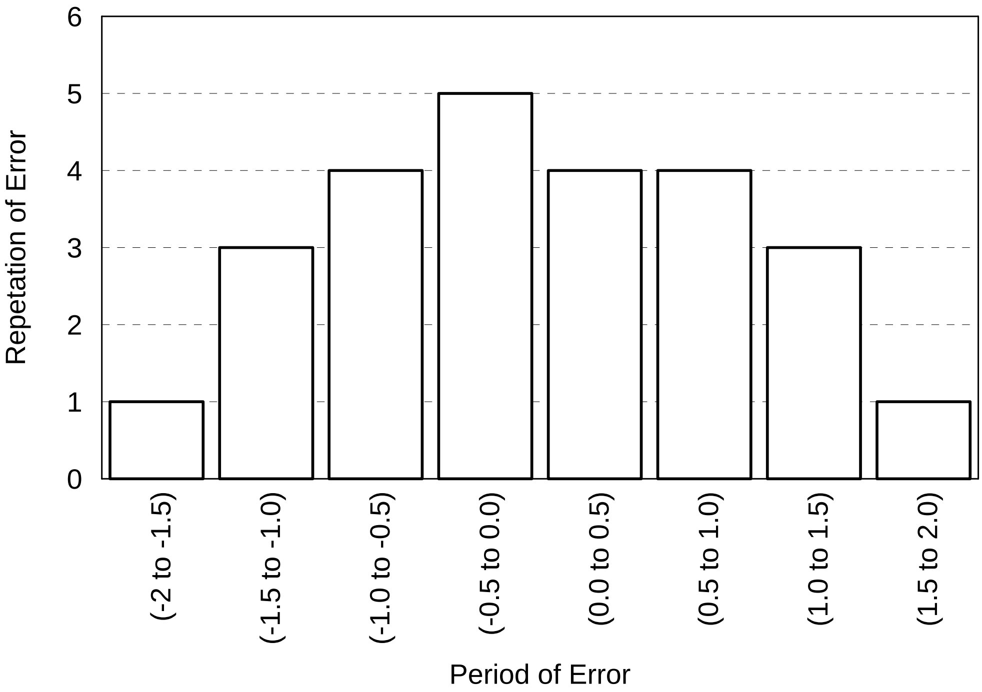
نقسم الأخطاء إلى فترات ولتكن قيمة الفترة (``0.50) ثم نحدد عدد الأخطاء فى كل فترة كالتالى:

Period	No. of Errors
2.0-1.5	1
1.5-1.0	3
1.0-0.5	4
0.5-0.0	4
0.0-(-0.5)	5
-0.5-(-1.0)	4
-1.0-(-1.5)	3
-1.5-(-2.0)	1

ثم يتم رسم عدة مستطيلات متجاورة، بحيث تمثل قاعدة المستطيل فترة الخطأ، ويمثل ارتفاعه عدد مرات تكرار الخطأ، ويلاحظ فى هذا المنحنى الذى يسمى منحنى التجميع التكرارى الآتى:

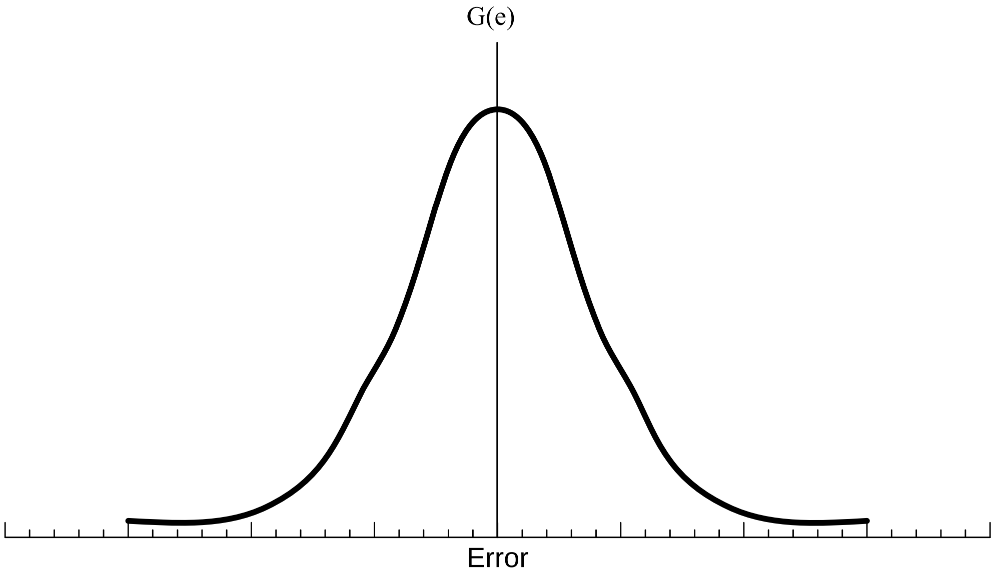
1- الأخطاء ذات القيمة الواحدة يتساوى عدد الموجب منها مع عدد السالب.

2- يزداد عدد الأخطاء كلما صغرت، ويقل عددها كلما كبر الخطأ.
3- يزداد المتوسط الحسابى قرباً من القيمة الحقيقية كلما ازداد عدد الأرصاد.



وفى الشكل السابق، إذا قلت الفترة إلى أقل ما يمكن، وزاد عدد الأرصاد إلى أكبر ما يمكن فإننا نحصل على منحنى الأخطاء، والذى يطلق عليه (منحنى جاوس) ، وهو يشبة من جميع الوجوه منحنى الإحتمالات وذلك بعد استبدال الإحداثى الرأسى ، فبدلاً من (n) التى تدل على عدد مرات حدوث الخطأ نضع (y) التى تدل على احتمال حدوث نفس الخطأ السابق، ويطلق عليه فى هذه الحالة (منحنى احتمال حدوث الخطأ)، وتتضح من هذا المنحنى الحقائق التالية:

1- احتمال حدوث الأخطاء الموجبة مثل احتمال حدوث الأخطاء السالبة التى لها نفس القيمة العددية .
2- الأخطاء الصغيرة أكثر حدوثاً من الأخطاء الكبيرة- أى يقل احتمال حدوث الخطأ كلما ازدادت قيمته.
3- الأخطاء الكبيرة نادرة الحدوث، ولهذا فإن المنحنى يقابل محور (X) فى مالانهاية.



المعادلة العامة لمنحنى الإحتمال:

أوجد جاوس العلاقة الآتية لمنحنى الإحتمال:

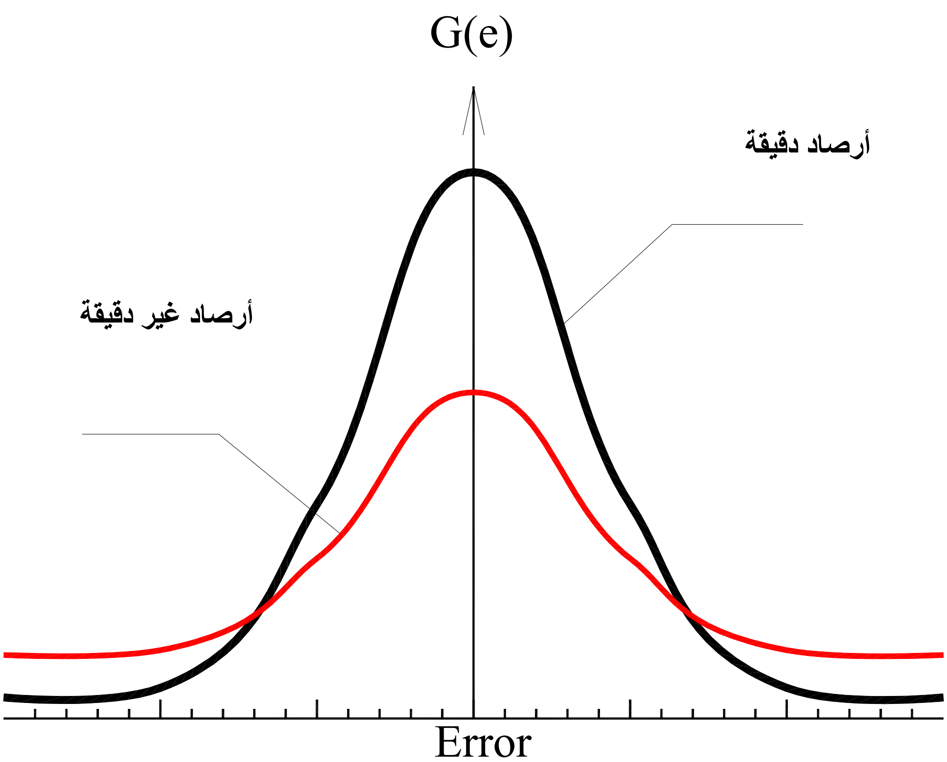
$$G(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{(-h^2.X^2)}$$

Where:

G(ε)	Probability of error X (for the Y-axis)
e	natural logarithmic base (2.71828)
X	the error
h	is a constant ($h = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2}}$)
σ	the standard deviation (MSE)

والخطأ التربيعى المتوسط مقدار ثابت (σ) بالنسبة للمنحنى الواحد، ويتوقف قيمته على دقة الأرصاد، واختلاف قيمته يؤثر فى شكل المنحنى كما هو موضح فى الشكل التالى:

- كلما ازدادت دقة الأرصاد ، كلما قلت قيمة (σ)، وبالتالى ازداد تحدب المنحنى.



إن معنى احتمال حدوث شيء ما هو نسبة حدوثه ويعبر عنه بكسر عشرى قيمته بين الصفر والواحد الصحيح، وبعرض فكرة مبسطة عن نظرية الإحتمالات نعرض المثال التالى:

$$\textbf{إحتمال حدوث شيء ما أو خطأ ما} = \frac{\textbf{عدد مرات تكرار الحدث}}{\textbf{العدد الكلى للأحداث}}$$

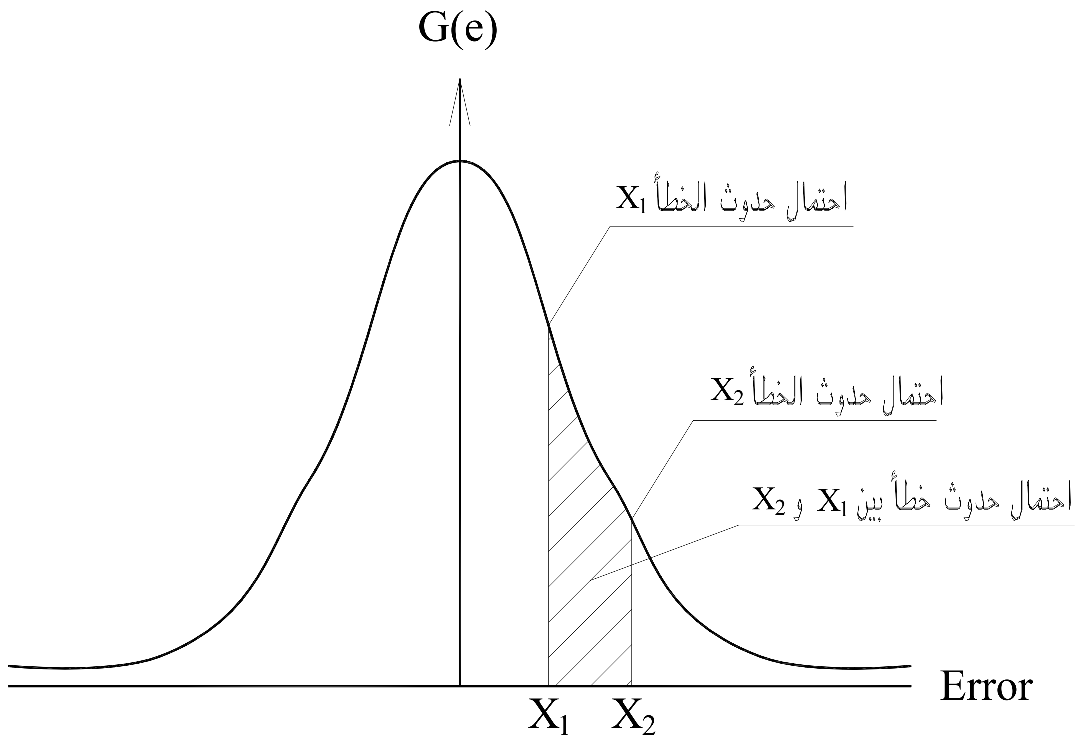
فمثلاً احتمال إخراج كرة حمراء من صندوق به 10 كرات حمراء، و 15 كرة سوداء، و 25 كرة بيضاء هو:

$$\frac{10}{10+25+15}=\frac{1}{5}=20\%$$

وبالتالى فإن المساحة تحت منحنى جاوس = 1، لأنها تمثل مجموع احتمالات حدوث جميع الأخطاء.

$$\text{Area under the (Gauss) curve} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.X^2}.dx = 1$$

وليس من المعتاد أن يحسب وقوع خطأ معين، وإنما يحسب احتمال وقوع خطأ بين قيمتين (X_1 , X_2)



احتمال وقوع خطأ بين قيمتين (X_1 , X_2) =

$$= \int_{X_1}^{X_2} \frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.X^2}$$

مقارنة معايير دقة الأرصاد:

معنى الخطأ (المحتمل حدوثه أكثر) أنه فى أى مجموعة من الأرصاد يكون عدد الأرصاد التى بها أخطاء أصغر من الخطأ المحتمل تساوى عدد الأرصاد التى بها أخطاء أكبر منه – كما وضحنا ذلك فى تعريف (Probable Error) .

$r = 0.6745\ \sigma$

وكذلك الخطأ المتوسط (η):

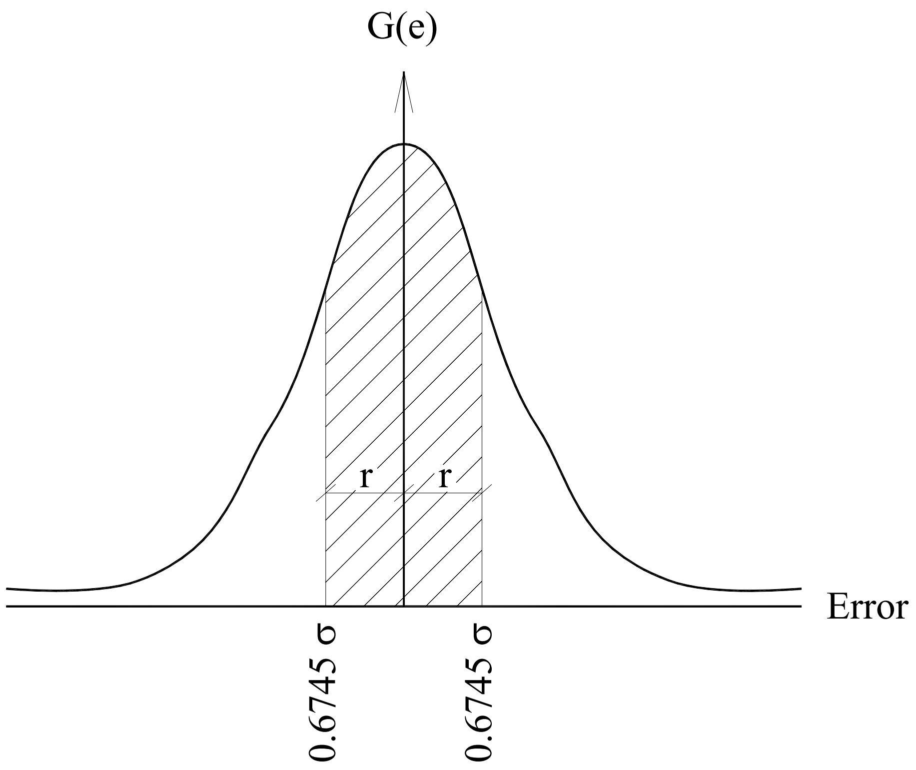
$\eta = 0.7979\ \sigma$

ويتميز كل من الخطأ التربيعى المتوسط (σ) ، والخطأ المحتمل بالآتى:

1- لا علاقة لكل منهما بإشارة الخطأ فيما لو كانت سالبة أو موجبة (لوجود التربيع).
2- يظهر فيهما تأثير الأخطاء مبكراً ، وذلك لأن التربيع يزيد القيمة ، لذلك يستخدم كلاً من (σ) و (r) فى قياس دقة الأرصاد واستبعاد الغير صالح منها ويفضل استخدام الخطأ التربيعى المتوسط MSE عند رفض بعض الأرصاد الغير محتملة الوقوع تحت منحنى الأخطاء.

حد الأخطاء التى يقع فيها (50%) من الأرصاد:

$r = \pm\ 0.6745\ \sigma$



وكما سبق أن أشرنا أن احتمال وقوع خطأ بين قيمتين (X_1 , X_2) =

$$= \int_{X_1}^{X_2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} . e^{-h^2 . X^2}$$

والخطأ الأكثر احتمالاً (r) نسبة حدوثه (50%):

$$0.50=\int_{-r}^{r}\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.r^2}$$

وكذلك يمكن إثبات التالى:

1- احتمال حدوث خطأ يقع بين (σ+ , σ-) يساوى 0.683

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.\sigma^2}=0.683$$

2- احتمال حدوث خطأ يقع بين (2σ+ , 2σ-) يساوى 0.953

$$\int_{-2\sigma}^{+2\sigma}\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.(2\sigma)^2}=0.953$$

3- احتمال حدوث خطأ يقع بين (3σ+ , 3σ-) يساوى 0.997

$$\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.(3\sigma)^2}=0.997$$

ومن المعادلة السابقة يتضح أن احتمال حدوث أخطاء تزيد عن 3σ ± تساوى (100-99.7) أى حوالى % 0.30، ولذلك فإن وجود أرصاد تزيد أخطاؤها الباقية (القيمة المرصودة – القيمة الأكثر احتمالاً) عن 3σ ± يلزم رفضها من مجموعة الأرصاد.

<u>Example:</u>

2- A distance was measured 40 times from which the standard deviation was found to be ±12 mm. How many of these forty observations containing errors that lie between –15 mm, and +10 mm?

Solution

σ = 12.0 mm

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.X^2}=0.683$$

but $$\int e^{F(x)}.dx=\frac{e^{F(x)}}{F`(x)}$$

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int e^{-h^2.X^2}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}.\frac{e^{-h^2.X^2}}{-2h^2.X}$$

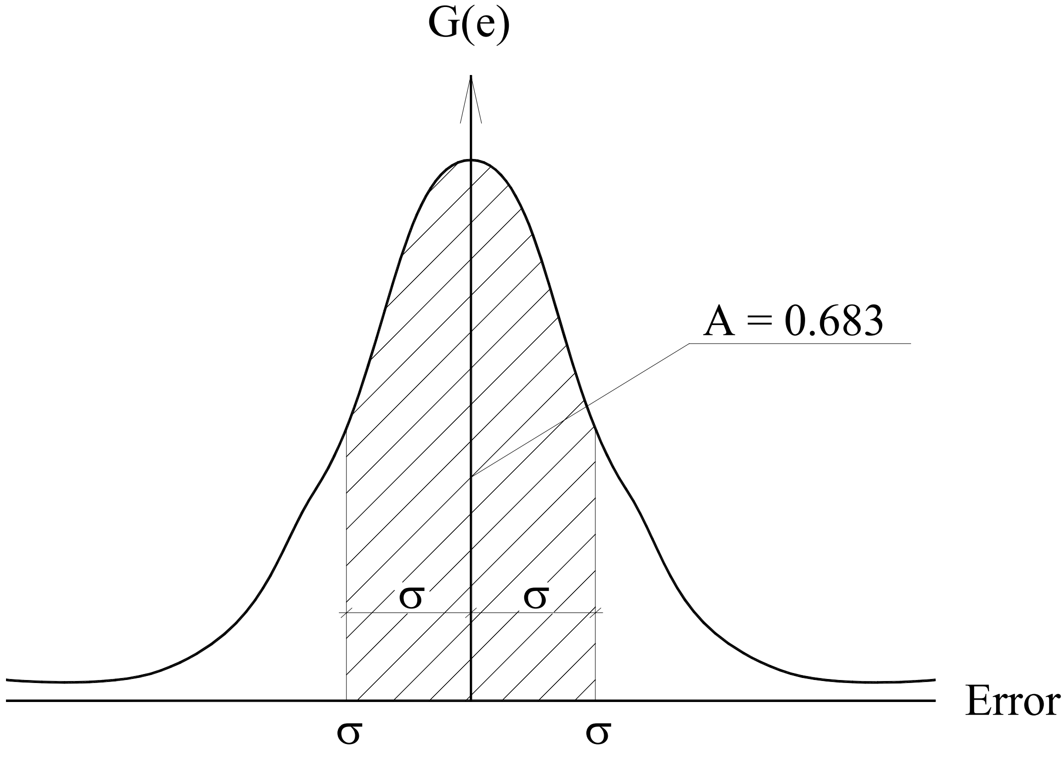
وبالتعويض فى المعادلة السابقة عن قيمة X بـ 12 ±

$$0.683 = \frac{-1}{2h\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-h^2(12)^2}}{12} - \frac{e^{-h^2(-12)^2}}{-12}\right)$$

$$0.683 = \frac{-1}{2h\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-144h^2}}{6}\right) \qquad h = 0.0688 * \left(e^{-144h^2}\right)$$

عدد الأرصاد التى بها خطأ يتراوح بين 12 ± تساوى:

= 0.683 * 40 = 27 observations



الخواص الهندسية لمنحنى (جاوس):

1- المنحنى عبارة عن دالة زوجية (متماثلة حول محور Y) وذلك لأن:

Y(x) = Y(-x)

2- أقصى قيمة للدالة تحدث عند (X = 0.0):

at X = 0.0, $G(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{0} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$

2- المنحنى له نقطتى انقلاب (نقطة الإنقلاب هى النقطة التى يغير فيها المماس اشارته)، ولتحديد نقطة الإنقلاب نفاضل الدالة مرتين بالنسبة لـ X ونساوى الناتج بالصفر فنحصل على قيمة X التى يحدث عندها الإنقلاب، ثم نعوض عن تلك القيمة فى معادلة المنحنى، فنحصل على قيمة G(ε) المقابلة لها. ولتعيين نقطتى الإنقلاب رياضياً نفاضل المعادلة مرتين:

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.X^2}$$

G\` = $\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.X^2}.(-2h^2X) \qquad = \frac{-2h^3}{\sqrt{\pi}}.X.e^{-h^2.X^2}$

G\`\` = $\frac{-2h^3}{\sqrt{\pi}}.(X * e^{-h^2.X^2} * -2h^2.X + e^{-h^2.X^2} * 1)$ **= 0.0**

$$X * e^{-h^2.X^2} * 2h^2.X = e^{-h^2.X^2} * 1$$

$$2h^2.X^2 = 1$$

$$X = \frac{1}{h.\sqrt{2}}$$

and that point is corresponding to Y = $\frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{-h^2.\frac{1}{h.\sqrt{2}}}$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}}.e^{\frac{-h}{\sqrt{2}}}$$

4- المساحة تحت المنحنى من نقطة (-∞) إلى نقطة (+∞) =1

Precision and Accuracy

لنعرف الفرق بين (Precision & Accuracy) نسوق المثال التالى:

أراد شخص أن يقس زاوية قيمتها الأقرب احتمالاً كانت (``40 `12 75^o) فكانت أرصاده كالتالى:

70^o 12\` 41\`\`	70^o 12\` 40.5\`\`	70^o 12\` 39\`\`	70^o 12\` 42\`\`	70^o 12\` 39.5\`\`
70^o 12\` 40\`\`	70^o 12\` 41.5\`\`	70^o 12\` 39.5\`\`	70^o 12\` 40\`\`	70^o 12\` 41\`\`

فإذا أردنا أن نعلق على هذه الأرصاد فماذا نقول؟ نجد أن الأرصاد متقاربة جداً من بعضها البعض ، ولكنها بعيدة عن القيمة الحقيقية للكمية المرصودة، وبالتالى فإن هذه الأرصاد يقال عليها (Precise but not Accurate).

Precision:

ونقيس بها دقة الأرصاد من حيث إرتباطها ببعضها البعض.

Accuracy:

ونقيس بها دقة الأرصاد من حيث إقترابها من القيمة الحقيقية للكمية المرصودة.

ويمكن تعريف الأرصاد من حيث الدقة فى أربعة مجموعات كالتالى :

نتخيل لوحة رماية تمثل الدائرة الداخلية فيها القيمة الحقيقية للكمية المرصودة ، وتكون احتمالات اطلاق الرصاص على الهدف:

1- طلقات الرصاص متقاربة من بعضها البعض ولكنها بعيدة عن الهدف:

Precise but not Accurate

2- طلقات الرصاص قريبة من الهدف ولكنها متباعدة عن بعضها البعض:

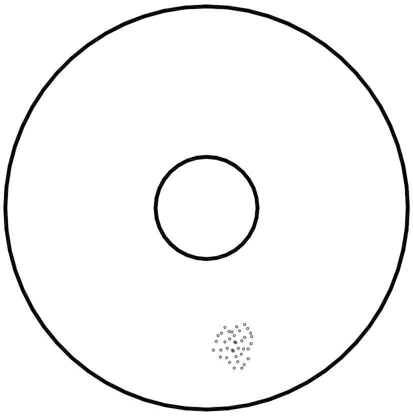
Accurate but not Precise

3- طلقات الرصاص قريبة من بعضها البعض وقريبة من الهدف:

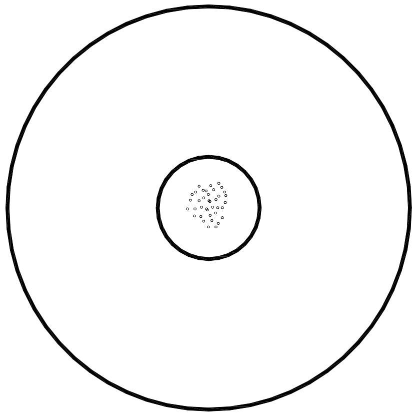
Precise and Accurate

4- طلقات الرصاص بعيدة عن بعضها البعض وبعيدة عن الهدف:

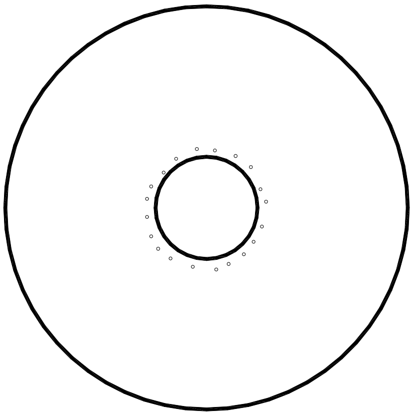
Not Accurate and Not Precise



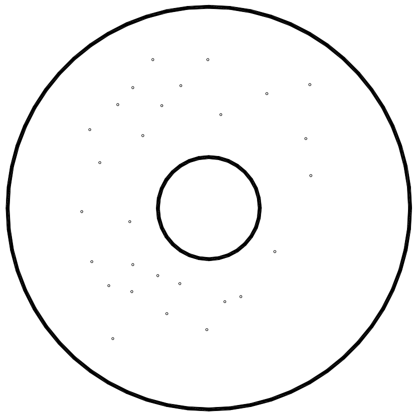
Precise but not Accurate



Precise and Accurate



Accurate not Precise



Not Accurate & Not Precise

Coefficient of Coronation (C_C)

$$C_c = \frac{\sum X.Y}{\sqrt{\sum X^2 . \sum Y^2}}$$

Variances and co-variances

وهى عبارة عن علاقة الأرصاد الغير مترابطة ، وتحدث فى حالة وجود أرصاد كثيرة جداً والمجهول كمية واحدة.

Co-variance:

هو الذى يوضح العلاقة بين نوعين من الرصدات

خواص مصفوفة الـ Variance

1- المصفوفة قطرية وعناصر القطر الرئيسى تساوى (σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 , σ_4^2 , ...) والباقى أصفار.

خواص مصفوفة الـ Co-variance

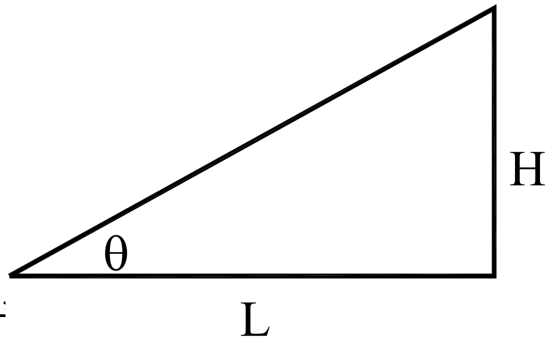
1- المصفوفة مربعة (الصفوف مساوية للأعمدة)
2- المصفوفة لها معكوس ضربى أى أن محددها لا يساوى صفر.
3- عناصر القطر الرئيسى موجبة دائماً، وباقى العناصر متماثلة حول القطر الرئيسى.

تطبيقات على التباين (Varianc):

فى حلة وجود أرصاد غير مترابطة ، والمطلوب إيجاد كمية مجهولة باستخدام هذه الرصدات:

1- نعين المعادلة العامة التى تربط هذه الكمية المجهولة بالأرصاد مثل حساب إرتفاع مثلث من زاوية وضلع كالمثال التال:

$H = L \cdot \tan(\theta)$



تم قياس ... نحراف المعيارى كالتالى:

$\theta \rightarrow \theta \pm \sigma_\theta$

$L \rightarrow L \pm \sigma_L$

2- يحسب قيمة المجهول باستخدام القيم المتوسطة فقط بدون σ

$H = L \cdot \tan(\theta)$

3- المعادلة العامة لحساب σ :

$$(\sigma_H)^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial L}\right)^2 .(\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2 .(\sigma_\theta)^2$$

ثم نفاضل المعادلة العامة ونعوض بقيم المتوسطات فنحصل على معادلة تربط بين:

$\sigma_H , \sigma_L , \sigma_\theta$

4- توحيد الوحدات Scaling :

إذا كانت الوحدات مختلفة (أطوال وزوايا) نحول كل الزوايا إلى التقدير الدائرى :

$$\sigma_\theta \rightarrow \sigma_\theta * \frac{\pi}{180}$$

نعوض فى المعادلة فنحصل على σ_H $(\sigma_H \rightarrow H \pm \sigma_H)$